Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	stiglmayr@math.uni-wuppertal.de
www:	http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Logarithmen

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann heißt $\log_a x$ der *Logarithmus von x zur Basis a* und bezeichnet den Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten, d. h.

$$\log_a x = u \Longleftrightarrow a^u = x\,.$$

Für Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e verwendet man häufig die Abkürzungen:

$$\lg x = \log_{10} x$$
$$\ln x = \log_e x$$

Beispiel

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \log_2 8 = 3\,, & \text{denn} \quad 2^3 = 8 \\ \text{b)} & \lg 100 = 2\,, & \text{denn} \quad 10^2 = 100 \\ \text{c)} & \log_9 3 = \frac{1}{2}\,, & \text{denn} \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \\ \text{d)} & \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2\,, & \text{denn} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9 \end{array}$$

Rechenregeln

Für $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (a^x) = x$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \quad \text{bzw.} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Die ersten beiden Regeln bedeuten, dass das Logarithmieren sozusagen die Anwendung der entsprechenden Exponentialfunktion „rückgängig“ macht. Die letzte Regel benötigt man zur Umrechnung in andere Basen.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Potenzen & co
Logarithmen
Beträge
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2 (8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2\log_2 x$$

$$\lg \left(\frac{100}{x^5}\right) = \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5 \lg x$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Potenzen & co
Logarithmen
Beträge
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Herr Huber bekommt von seinem Arbeitgeber eine jährliche Gehaltssteigerung von 4% zugesagt. Er überlegt, nach wie vielen Jahren er zum ersten Mal mehr als doppelt soviel verdient.

Mit G bezeichnen wir Herrn Hubers aktuelles Gehalt.

$$\begin{aligned} & 2G = G\left(1 + \frac{4}{100}\right)^t \\ \iff \quad & 2 = 1.04^t \\ \iff \quad & \lg 2 = \lg (1.04^t) \\ \iff \quad & \lg 2 = t \cdot \lg 1.04 \\ \iff \quad & \frac{\lg 2}{\lg 1.04} = t \end{aligned}$$

Da $\frac{\lg 2}{\lg 1.04} \approx 17.67$, verdient Herr Huber nach 18 Jahren zum ersten Mal mehr als doppelt so viel.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Potenzen & co
Logarithmen
Beträge
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beträge reeller Zahlen

Definition

Unter dem Betrag einer reellen Zahl a versteht man geometrisch den Abstand von a zum Ursprung auf der reellen Zahlengeraden, d. h.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geqslant 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} |4| &= 4 \\ |-5| &= 5 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{falls } x-2 \geqslant 0 \\ -(x-2) & \text{falls } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{falls } x \geqslant 2 \\ 2-x & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Potenzen & co
Logarithmen
Beträge
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \text{ falls } x_1 \geqslant x_2 \text{, d. h. } x_1 - x_2 \geqslant 0 \quad \text{und} \\ &x_2 - x_1 \text{ falls } x_2 > x_1 \text{, d. h. } x_1 - x_2 < 0\,. \end{aligned}$$

Somit gibt

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{falls } x_1 \geqslant x_2 \\ -(x_1 - x_2) & \text{falls } x_1 < x_2 \end{cases}$$

den Abstand zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden an.

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Potenzen & co
Logarithmen
Beträge
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Beispiel

Abstand zwischen 2 und 8: $|2-8| = |-6| = 6$

Abstand zwischen -5 und 10: $|-5-10| = |-15| = 15$

Abstand zwischen -7 und -3: $|-7-(-3)| = |-4| = 4$

Vorkurs Mathematik
M. Stiglmayr
Potenzen & co
Logarithmen
Beträge
BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL