

Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften



Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal

Fachbereich C – Mathematik und Informatik

Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email: `stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`

www: `http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`

Büro: D.13.01

Telefon: 0202-439 3487

Potenzen, Wurzeln & co

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann heißt $\log_a x$ der *Logarithmus von x zur Basis a* und bezeichnet den Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten, d. h.

$$\log_a x = u \iff a^u = x.$$

Für Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e verwendet man häufig die Abkürzungen:

$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann heißt $\log_a x$ der *Logarithmus von x zur Basis a* und bezeichnet den Exponent, mit dem a potenziert werden muss, um x zu erhalten, d. h.

$$\log_a x = u \iff a^u = x.$$

Für Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e verwendet man häufig die Abkürzungen:

$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

Beispiel

- a) $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$
- b) $\lg 100 = 2$, denn $10^2 = 100$
- c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, denn $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- d) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, denn $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

Für $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (a^x) = x$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \quad \text{bzw.} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Beispiel

Für $x > 0$ gilt

$$\log_2(8x^2) = \log_2 8 + \log_2 x^2 = 3 + 2 \log_2 x$$

$$\lg\left(\frac{100}{x^5}\right) = \lg 100 - \lg x^5 = 2 - 5 \lg x$$

Umrechnen in eine andere Basis:

$$\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$$

Beispiel

Herr Huber bekommt von seinem Arbeitgeber eine jährliche Gehaltssteigerung von 4% zugesagt. Er überlegt, nach wie vielen Jahren er zum ersten Mal mehr als doppelt soviel verdient.

Mit G bezeichnen wir Herrn Hubers aktuelles Gehalt.

$$\begin{aligned}2G &= G \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t \\ \Leftrightarrow 2 &= 1.04^t \\ \Leftrightarrow \lg 2 &= \lg(1.04^t) \\ \Leftrightarrow \lg 2 &= t \cdot \lg 1.04 \\ \Leftrightarrow \frac{\lg 2}{\lg 1.04} &= t\end{aligned}$$

Da $\frac{\lg 2}{\lg 1.04} \approx 17.67$, verdient Herr Huber nach 18 Jahren zum ersten Mal mehr als doppelt so viel.

Beispiel

Herr Huber bekommt von seinem Arbeitgeber eine jährliche Gehaltssteigerung von 4% zugesagt. Er überlegt, nach wie vielen Jahren er zum ersten Mal mehr als doppelt soviel verdient.

Mit G bezeichnen wir Herrn Hubers aktuelles Gehalt.

$$\begin{aligned}2G &= G \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t \\ \Leftrightarrow 2 &= 1.04^t \\ \Leftrightarrow \lg 2 &= \lg(1.04^t) \\ \Leftrightarrow \lg 2 &= t \cdot \lg 1.04 \\ \Leftrightarrow \frac{\lg 2}{\lg 1.04} &= t\end{aligned}$$

Da $\frac{\lg 2}{\lg 1.04} \approx 17.67$, verdient Herr Huber nach 18 Jahren zum ersten Mal mehr als doppelt so viel.

Definition

Unter dem Betrag einer reellen Zahl a versteht man geometrisch den Abstand von a zum Ursprung auf der reellen Zahlengeraden, d. h.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Beispiel

$$|4| = 4$$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{falls } x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Beispiel

$$|4| = 4$$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{falls } x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Beispiel

$$|4| = 4$$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{falls } x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\iff |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{falls } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

Sind x_1 und x_2 zwei beliebige reelle Zahlen, so ist der Abstand von x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \text{ falls } x_1 \geq x_2, \text{ d. h. } x_1 - x_2 \geq 0 \quad \text{und} \\ &x_2 - x_1 \text{ falls } x_2 > x_1, \text{ d. h. } x_1 - x_2 < 0. \end{aligned}$$

Somit gibt

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ -(x_1 - x_2) & \text{falls } x_1 < x_2 \end{cases}$$

den Abstand zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengeraden an.

Beispiel

Abstand zwischen 2 und 8: $|2 - 8| = |-6| = 6$

Abstand zwischen -5 und 10: $|-5 - 10| = |-15| = 15$

Abstand zwischen -7 und -3: $|-7 - (-3)| = |-4| = 4$