Vorkurs Mathematik für Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Informatik

Visitenkarte

Dr. Michael Stiglmayr

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

email:	`stiglmayr@math.uni-wuppertal.de`
www:	`http://math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi`
Büro:	D.13.01
Telefon:	0202-439 3487

Inhalt

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{2,3,5\}, \{2,3,7\}, \{2,5,7\}, \{3,5,7\}, \{2,3,5,7\}\}$

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$

Definition

Sei A eine Menge. Unter der *Potenzmenge* 2^A von A versteht man die Menge aller möglichen Teilmengen, d. h.

$$2^A = \{U : U \subseteq A\}$$

Beispiel

- $A = \{\}$: $\quad 2^A = \{\}$
- $B = \{1\}$: $\quad 2^B = \{\{\}, \{1\}\}$
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$: $\quad 2^C = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\}$

Beispiel

An einer Umfrage, welche Zeitung A, B oder C sie an einem bestimmten Tag gelesen haben, nehmen 1000 Personen teil. Es haben 420 A gelesen, 316 B und 160 C, darunter sind 116, die A und B gelesen haben, 100, die A und C gelesen haben und 30 haben B und C gelesen. Außerdem gibt es 16, die alle drei Zeitungen gelesen haben.

- Wieviele haben A, aber nicht B gelesen?
- Wieviele haben C, aber weder A noch B gelesen?
- Wieviele haben weder A noch B noch C gelesen?

aus Knut Sydsaeter, Peter Hammond: „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“

Beispiel

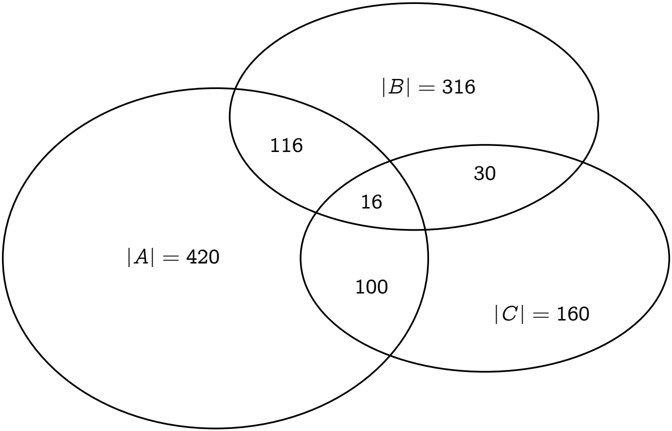
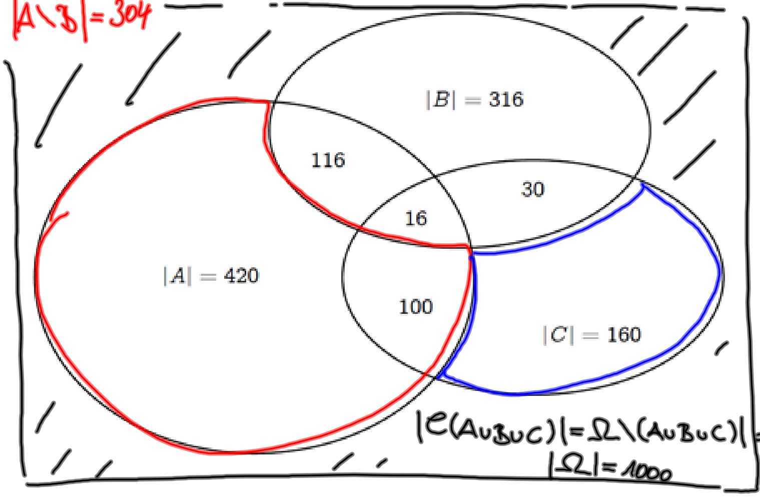


Abbildung: Mengendiagramm (Venn-Diagramm)

Beispiel

$|C \setminus (A \cup B)| = 160 - (100 + 30 - 16) = 46$

$|A \setminus B| = 304$



$|\complement(A \cup B \cup C)| = |\Omega \setminus (A \cup B \cup C)| = 1000 - (420 + 316 - 116 + 46) = 334$

$|\Omega| = 1000$

Abbildung: Mengendiagramm (Venn-Diagramm)

Beispiel

- Wieviele haben A, aber nicht B gelesen?

$$|A \setminus B| = 420 - 116 = 304$$

- Wieviele haben C, aber weder A noch B gelesen?

$$|C \setminus (A \cup B)| = 160 - (100 + 30 - 16) = 46$$

- Wieviele haben weder A noch B noch C gelesen?

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(A \cup B \cup C)| =& 1000 - (420 + (316 - 116) \\ & + (160 - 100 - 30 + 16)) = 334 \end{aligned}$$

Zahlenmengen

Bezeichnung

natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *oder* $\mathbb{Q} = \{x : x \text{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}$
reellen Zahlen	$\mathbb{R} = \{x : x \text{ endliche oder unendliche Dezimalzahl}\}$

Die nichtnegativen Elemente einer Zahlenmenge kennzeichnet man mit einem tiefgestellten „+“ die von Null verschiedenen Elemente mit einem hochgestellten „∗“, z. B.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\},$$
$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\},$$
$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Zahlenmengen

Bezeichnung

natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *oder* $\mathbb{Q} = \{x : x \text{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}$
reellen Zahlen	$\mathbb{R} = \{x : x \text{ endliche oder unendliche Dezimalzahl}\}$

Die nichtnegativen Elemente einer Zahlenmenge kennzeichnet man mit einem tiefgestellten „+“ die von Null verschiedenen Elemente mit einem hochgestellten „∗“, z. B.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\},$$
$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\},$$
$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Intervalle

Bezeichnung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b heißt (endliches) Intervall. *a und b heißen* Randpunkte *des Intervalls.*

abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

offenes Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

halboffene Intervalle

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

Die Länge der Intervalle beträgt jeweils $b - a$.

Intervalle

Bezeichnung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b heißt (endliches) Intervall*. a und b heißen* Randpunkte *des Intervalls.*

abgeschlossenes Intervall

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

offenes Intervall

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

halboffene Intervalle

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

Die Länge der Intervalle beträgt jeweils $b - a$.

Unendliche Intervalle

Auch gewisse unbeschränkte Mengen werden als *(unendliche) Intervalle* bezeichnet und mit Hilfe des Symbols ∞ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Zahlenmengen

Kombinatorische Grundlagen

- Permutationen
- Auswahl von Teilmengen

Potenzen, Wurzeln & co

Kombinatorische Grundlagen

Was ist Kombinatorik?

Abzählen einer Anzahl von Entscheidungs-, Kombinations-, oder Auswahl-Möglichkeiten. Man betrachtet dabei häufig

- Vertauschungen (Permutationen)
- Anzahl von Teilmengen einer Menge
-

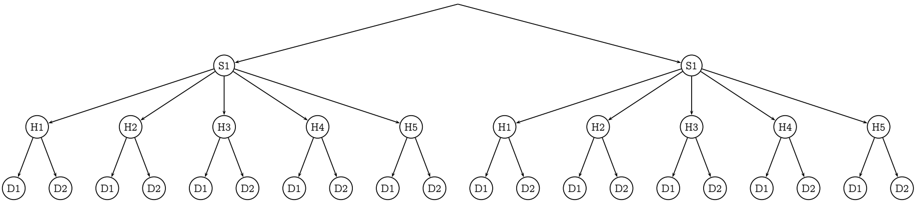
Beispiel (Menüs)

Ein Restaurant bietet zwei verschiedene Suppen, fünf Hauptgerichte und zwei Desserts an. Wieviele verschiedene Menüs lassen sich daraus kombinieren?

Beispiel (Menüs)

Ein Restaurant bietet zwei verschiedene Suppen, fünf Hauptgerichte und zwei Desserts an. Wieviele verschiedene Menüs lassen sich daraus kombinieren?

Mit Hilfe eines Baumdiagramms kann man abzählen:



Multiplikationssatz

Beispiel (Menüs (Fortsetzung))

Jede der beiden Suppen kann mit jedem der fünf Hauptgerichte kombiniert werden, und jede dieser Kombinationen kann wiederum mit jedem der beiden Desserts kombiniert werden. Es gibt also insgesamt

$$2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ verschiedene Menüzusammenstellungen.}$$

Satz

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $m_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Wählt man aus jeder von k Mengen, die jeweils m_i Elemente enthalten genau ein Element aus, so gibt es dafür insgesamt

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \text{ Möglichkeiten.}$$

Multiplikationssatz

Beispiel (Menüs (Fortsetzung))

Jede der beiden Suppen kann mit jedem der fünf Hauptgerichte kombiniert werden, und jede dieser Kombinationen kann wiederum mit jedem der beiden Desserts kombiniert werden. Es gibt also insgesamt

$$2 \cdot 5 \cdot 2 = 20 \text{ verschiedene Menüzusammenstellungen.}$$

Satz

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $m_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Wählt man aus jeder von k Mengen, die jeweils m_i Elemente enthalten genau ein Element aus, so gibt es dafür insgesamt

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \text{ Möglichkeiten.}$$

Beispiel

Wie viele gerade vierstellige Zahlen lassen sich bilden, wenn die erste und die dritte Ziffer ungerade sein sollen?

Für die erste und dritte Ziffer gibt es jeweils 5, für die zweite 10 und für die vierte Ziffer wieder 5 Möglichkeiten, insgesamt also

$$5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 1250 \text{ Möglichkeiten.}$$

Beispiel

Wie viele gerade vierstellige Zahlen lassen sich bilden, wenn die erste und die dritte Ziffer ungerade sein sollen?

Für die erste und dritte Ziffer gibt es jeweils 5, für die zweite 10 und für die vierte Ziffer wieder 5 Möglichkeiten, insgesamt also

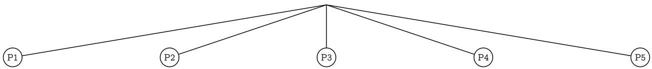
$$5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 1250 \text{ Möglichkeiten.}$$

Permutationen

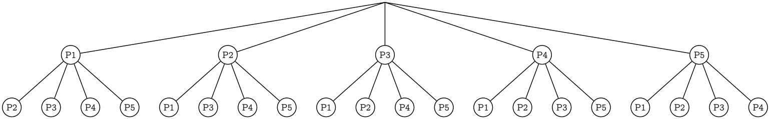
Beispiel

Ein Arzt soll nacheinander Hausbesuche bei fünf seiner Patienten machen. Wie viele Möglichkeiten in Bezug auf die Reihenfolge der Patienten hat der Arzt, seine Hausbesuche zu erledigen?

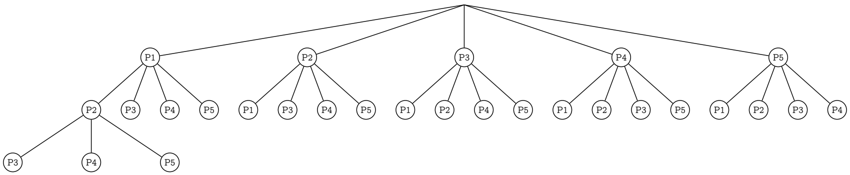
Skizze des Baumdiagramms (unvollständig)



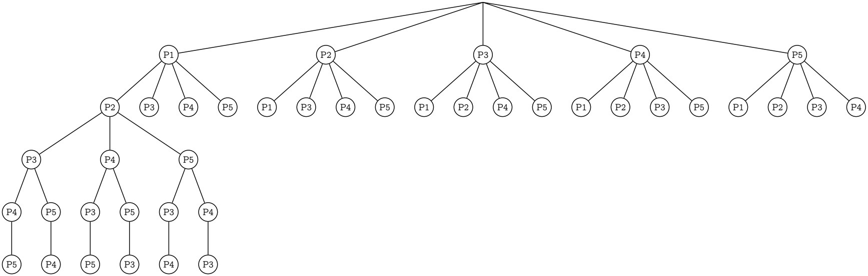
Skizze des Baumdiagramms (unvollständig)



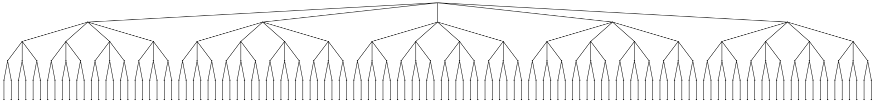
Skizze des Baumdiagramms (unvollständig)



Skizze des Baumdiagramms (unvollständig)



Vollständiges Baumdiagramm



Für den ersten Hausbesuch kommen alle fünf Patienten in Frage, zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den zweiten Hausbesuch noch vier Möglichkeiten u. s. w. bis für den letzten Hausbesuch nur noch jeweils eine Möglichkeit besteht, insgesamt also

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ Möglichkeiten.}$$

Definition

Haben wir allgemein eine Menge mit n Elementen gegeben, so bezeichnen wir jede mögliche Anordnung der n Elemente als *Permutation* der Elemente.

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ Möglichkeiten,}$$

n unterscheidbare Elemente anzuordnen.
$n!$ wird „n Fakultät“ gesprochen.

Definition

Haben wir allgemein eine Menge mit n Elementen gegeben, so bezeichnen wir jede mögliche Anordnung der n Elemente als *Permutation* der Elemente.

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ Möglichkeiten,}$$

n unterscheidbare Elemente anzuordnen.
$n!$ wird „n Fakultät“ gesprochen.

Beispiel

- Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es?
  Da es sich um fünf verschiedene Buchstaben handelt, gibt es $5! = 120$ Permutationen.
- Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es, wenn jede mit a c beginnen soll?
  Da die ersten zwei Buchstaben bereits festgelegt sind, gibt es noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

Beispiel

- Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es?
  Da es sich um fünf verschiedene Buchstaben handelt, gibt es $5! = 120$ Permutationen.
- Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es, wenn jede mit a c beginnen soll?
  Da die ersten zwei Buchstaben bereits festgelegt sind, gibt es noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

Beispiel

- Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es?
  Da es sich um fünf verschiedene Buchstaben handelt, gibt es $5! = 120$ Permutationen.
- Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es, wenn jede mit a c beginnen soll?
  Da die ersten zwei Buchstaben bereits festgelegt sind, gibt es noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

Beispiel

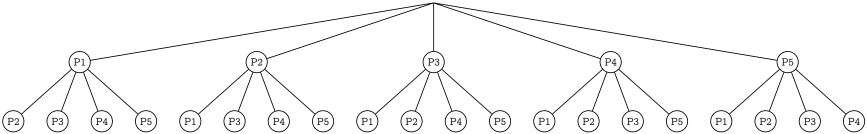
- Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es?
  Da es sich um fünf verschiedene Buchstaben handelt, gibt es $5! = 120$ Permutationen.
- Wie viele verschiedene Anordnungen der Buchstaben a, b, c, d, e gibt es, wenn jede mit a c beginnen soll?
  Da die ersten zwei Buchstaben bereits festgelegt sind, gibt es noch $3! = 6$ Möglichkeiten.

Auswahl mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

Ein Arzt will zwei von fünf fälligen Hausbesuchen vor seiner Sprechstunde erledigen, die restlichen drei kann er erst nach der Sprechstunde machen.
Wie viele verschiedenen Möglichkeiten gibt es für den Arzt, seine Route für die Hausbesuche vor der Sprechstunde zu planen?

Beispiel



Aus dem Baumdiagramm ergeben sich

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ Möglichkeiten.}$$

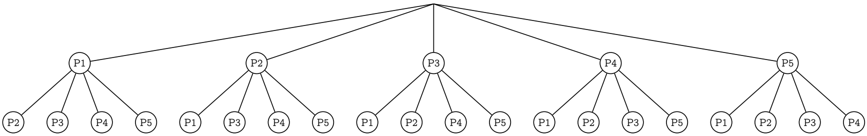
Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Arten auswählen.

Beispiel



Aus dem Baumdiagramm ergeben sich

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ Möglichkeiten.}$$

Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente mit Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Arten auswählen.

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

Beim Lottospiel werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Zunächst mit fester Reihenfolge der getippten Zahlen:
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.
Man kann 6 Zahlen auf $6!$ verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.
Bei den $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp $6!$ mal vor.
Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

Beim Lottospiel werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Zunächst mit fester Reihenfolge der getippten Zahlen:
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.

Man kann 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.
Bei den $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp 6! mal vor.
Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

Beim Lottospiel werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Zunächst mit fester Reihenfolge der getippten Zahlen:
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.
Man kann 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.
Bei den $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp 6! mal vor.
Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

Beim Lottospiel werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Zunächst mit fester Reihenfolge der getippten Zahlen:
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.
Man kann 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.
Bei den $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp 6! mal vor.
Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel

Beim Lottospiel werden bei einem Tipp 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tipp abzugeben?

Zunächst mit fester Reihenfolge der getippten Zahlen:
$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten.
Man kann 6 Zahlen auf 6! verschiedene Arten anordnen, ohne dass sich der Tipp ändert.
Bei den $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten kommt also jeder Tipp 6! mal vor.
Es gibt also

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816 \text{ verschiedene Tipps.}$$

Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Arten auswählen.

Abkürzend schreibt man auch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

gesprochen „n über k“ oder „k aus n“.

Satz

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leqslant n$. Von n Elementen lassen sich k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auf

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Arten auswählen.

Abkürzend schreibt man auch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

gesprochen „n über k“ oder „k aus n“.

Inhalt

Potenzen

Definition

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n-te Potenz von a*. Dabei heißt a Basis und n Exponent.

Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}.$$

Potenzen

Definition

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n-te Potenz von a*. Dabei heißt a Basis und n Exponent.

Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}.$$

Potenzen

Definition

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n-te Potenz von a*. Dabei heißt a Basis und n Exponent.

Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}.$$

Potenzen

Definition

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

die *n-te Potenz von a*. Dabei heißt a Basis und n Exponent.

Für $a \neq 0$ ist:

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}.$$

Wurzeln

Definition

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

die eindeutig bestimmte nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. $\sqrt[n]{a}$ heißt *n-te Wurzel von a*.

Für $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Wurzeln

Definition

Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

die eindeutig bestimmte nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. $\sqrt[n]{a}$ heißt *n-te Wurzel von a*.

Für $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Beispiel

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 \qquad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Beispiel

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 \qquad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Beispiel

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 \qquad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Beispiel

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 \qquad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Beispiel

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2 \qquad \text{da } 2^4 = 16$$

$$4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Zinseszins

Beispiel

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen. Sein Guthaben beträgt nach

$$\begin{aligned}
\text{einem Jahr} \quad K_1 &= K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\
\text{zwei Jahren} \quad K_2 &= K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \\
&= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \\
&\vdots \\
n \text{ Jahren} \quad K_n &= K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

Zinseszins

Beispiel

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.Sein Guthaben beträgt nach

$$\text{einem Jahr} \quad K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\text{zwei Jahren} \quad K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$n \text{ Jahren} \quad K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Zinseszins

Beispiel

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.Sein Guthaben beträgt nach

$$
\begin{aligned}
\text{einem Jahr} \quad K_1 =& K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\
\text{zwei Jahren} \quad K_2 =& K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \\
=& K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \\
\vdots \\
n \text{ Jahren} \quad K_n =& K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n
\end{aligned}
$$

Zinseszins

Beispiel

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.Sein Guthaben beträgt nach

$$\begin{aligned}
\text{einem Jahr} \quad K_1 &= K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\
\text{zwei Jahren} \quad K_2 &= K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \\
&= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \\
&\vdots \\
n \text{ Jahren} \quad K_n &= K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

Zinseszins

Beispiel

Herr Huber legt bei seiner Bank einen Betrag von K_0 € mit einer Zinsrate von $p\%$ jährlich an. Die Zinsen werden jeweils am Jahresende gutgeschrieben und dem Anlagebetrag zugeschlagen.Sein Guthaben beträgt nach

$$\begin{aligned}
\text{einem Jahr} \quad K_1 &= K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\
\text{zwei Jahren} \quad K_2 &= K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \\
&= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \\
&\vdots \\
n \text{ Jahren} \quad K_n &= K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

Beispiel

Frau Kramer benötigt in n Jahren einen Betrag von K_n €. Wie kann sie ausrechnen, welches Kapital sie heute anlegen muss, wenn die Bank ihr Kapital jährlich mit einer Zinsrate von $p\%$ verzinst und die Zinsen jeweils dem Kapital gutschreibt.

Aus dem ersten Beispiel sieht man:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n \Longleftrightarrow \qquad K_0 = K_n \cdot (1 + \frac{p}{100})^{-n}$$

Beispiel

Frau Kramer benötigt in n Jahren einen Betrag von K_n €. Wie kann sie ausrechnen, welches Kapital sie heute anlegen muss, wenn die Bank ihr Kapital jährlich mit einer Zinsrate von $p\%$ verzinst und die Zinsen jeweils dem Kapital gutschreibt.
Aus dem ersten Beispiel sieht man:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n \iff \qquad K_0 = K_n \cdot (1 + \frac{p}{100})^{-n}$$

Rechenregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$$

$$a^{b^r} = a^{(b^r)}$$

Rechenregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$$

$$a^{b^r} = a^{(b^r)}$$

Rechenregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$$

$$a^{b^r} = a^{(b^r)}$$

Rechenregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$$

$$a^{b^r} = a^{(b^r)}$$

Rechenregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$$

$$a^{b^r} = a^{(b^r)}$$

Rechenregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} = (a^s)^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r \cdot b^{-r}$$

$$a^{b^r} = a^{(b^r)}$$

a) $4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3\cdot 3} = 4^9$

$(4^3)^2 = (4\cdot 4\cdot 4)^2 = 4^6$

b) $\left(27\, x^{3p} y^{6q} z^{12r}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 x^p y^{2q} z^{4r}$

$= 27^{\frac{1}{3}} (x^{3p})^{\frac{1}{3}} (y^{6q})^{\frac{1}{3}} (z^{12r})^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot x^{\frac{3p}{3}} y^{\frac{6q}{3}} z^{\frac{12r}{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^9} \cdot \sqrt{c}}{\sqrt[10]{a} \cdot b^2} = \dfrac{a^{\frac{4}{10}}\, b^{\frac{9}{3}}\, \sqrt{c}}{a^{\frac{1}{10}}\, b^2} =$

$= a^{\frac{3}{10}} \cdot b \cdot \sqrt{c}$

d) $\dfrac{\left[(3a)^{-1}\right]^{-2} (2a^{-2})^{-1}}{a^{-3}} = \dfrac{(3a)^2 \cdot 2^{-1} \cdot a^2}{a^{-3}}$

$= \dfrac{9}{2} \dfrac{a^4}{a^{-3}} = \dfrac{9}{2} a^4 \cdot a^3 = \dfrac{9}{2} a^7$

e) $\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{7}} = \left[x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{7}} = x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{7}} = x^{\frac{6}{28}} =$

$= x^{\frac{3}{14}} = \sqrt[14]{x^3}$

Beispiel

a) $4^{3^2} = 4^{(3^2)} = 4^{3\cdot 3} = 4^9$ aber $\left(4^3\right)^2 = (4\cdot 4\cdot 4)^2 = 4^6$

b) $\left(27x^{3p}y^{6q}z^{12r}\right)^{\frac{1}{3}} = 3x^p y^{2q} z^{4r}$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^9}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt[10]{a}\cdot b^2} = a^{\frac{3}{10}}b\sqrt{c}$

d) $\dfrac{\left[(3a)^{-1}\right]^{-2}(2a^{-2})^{-1}}{a^{-3}} = \dfrac{9}{2}\cdot a^7$

e) $\left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{2}{7}} = x^{\frac{2}{21}} = \sqrt[14]{x^3}$