

Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Lösungen zu den Aufgaben der Aufgabensammlung

Aufgabe 1

a)

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w
f	f	w	w	w	f	w
f	f	f	f	f	f	f

b)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

c)

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
w	f	w
f	w	f

d)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Aufgabe 2

a)

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge B$	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge B)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	f	w

b)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

c)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 3

a) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

b) $(\frac{1}{x} - x)^2 = \frac{1}{x^2} - 2 + x^2$

c) $(2z - 5w)(2z + 5w) = 4z^2 - 25w^2$

Aufgabe 4

a) $201^2 - 199^2 = (201 - 199)(201 + 199) = 800$

b) $\frac{1000^2}{252^2 - 248^2} = \frac{1000^2}{(252 - 248)(252 + 248)} = 500$

Aufgabe 5

a) $(2t - 1)(t^2 - 2t + 1) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$

b) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2 - 2(a + 1)(a - 1) = [(a + 1) - (a - 1)]^2 = 4$

c) $(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2 = [(x + y + z) + (x - y - z)][(x + y + z) - (x - y - z)] = 4xy + 4xz$

Aufgabe 6

a) $A \cap B = \{2\}$ b) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ c) $A \setminus B = \{3, 4\}$

d) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{3, 4, 5, 6\}$ e) $A \cup B \cup C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Aufgabe 7

a) $\Omega \setminus M$: Schülerinnen und Schüler, die nicht Mathe als Lieblingsfach haben

b) $M \cup C$: Schülerinnen und Schüler, die Mathe als Lieblingsfach haben oder im Schulchor singen

c) $F \cap T$: Schülerinnen, die Tennis spielen

d) $M \setminus (B \cap T)$: Schülerinnen und Schüler mit Lieblingsfach Mathe, die nicht sowohl Bio nicht mögen als auch Tennis spielen

Aufgabe 8

126 Personen haben an der Umfrage teilgenommen:

$$80 + 65 - 47 + 28 = 126$$

$$\text{bzw. } 33 + 18 + 47 + 28 = 126$$

Aufgabe 9

$\{ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
 $2^3 = 8$ Teilmengen

Aufgabe 10

a) $A = [3, 4)$ b) $B = [13, 19)$ c) $D = (-\infty, -33]$ d) $E = (5, \infty)$

Aufgabe 11

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$

Aufgabe 12

Es gibt $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ Möglichkeiten

Aufgabe 13

$10! = 3628800$ Sitzmöglichkeiten; $10! \cdot 2\text{min} = 120960\text{h} = 5040\text{Tage}$

Aufgabe 14

Es gibt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$ Möglichkeiten

Aufgabe 15

Es gibt 10 verschiedene Ziffern. Aus diesen können wir $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ verschiedene Zahlen mit verschiedenen Ziffern bilden. Da eine 0 an erster Stelle nicht erlaubt ist, reduziert sich die Anzahl der zulässigen Kombination auf $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ Möglichkeiten.

Aufgabe 16

$\binom{18}{2} = 153$ Spiele

Aufgabe 17

$\binom{25}{4} = 12650$ Möglichkeiten

Aufgabe 18

a) ab^8 b) $t^{p+q-r-s}$ c) $\frac{1}{100}$ d) $\frac{1}{x+1}$

Aufgabe 19

a) $K_{15} = 12000 \cdot 1.04^{15} \approx 21611.32$ b) $K_0 = 50000 \cdot 1.06^{-5} \approx 37362.91$

Aufgabe 20

a) G: Gewinn in 2000, Gewinn in 2002: $0.996 \cdot G$ b) circa 20.48% c) circa 16.67%

Aufgabe 21

a) $a \in [-4, \infty)$ b) $y \in (-\infty, -1]$ c) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ d) ex. für kein $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 22

a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{1+x}$ c) $2(b+5)$ d) $|3a-1|$

Aufgabe 23

a) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{7}{3}\sqrt{6t}$ c) $\frac{\sqrt{a^2+ab}-\sqrt{ab+b^2}}{a-b}$

Aufgabe 24

a) 2 b) -3 c) 0

Aufgabe 25

a) $1 + \log_3 x$ b) $\frac{1}{2} \lg a + 2 \lg b - \frac{1}{4} \lg c$
c) $\lg 5 + \lg x + \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{2} \lg a - \frac{1}{4} \lg b$

Aufgabe 26

a) $\log_5 (u^2 v^3)$ b) $\log_2 \sqrt[3]{4x}$
c) 0 d) $\lg \frac{a^2 + 1}{a^2}$

Aufgabe 27

a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5} \right\}$ b) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$
c) $\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{8}{7} \right\}$

Aufgabe 28

a) i) genau eine Lösung: $a = \frac{9}{4}$, zwei Lösungen: $a < \frac{9}{4}$, keine Lösung: $a > \frac{9}{4}$
ii) genau eine Lösung: $a = \pm 4$, zwei Lösungen: $a > 4 \vee a < -4$, keine Lösung: $a \in (-4, 4)$
b) $x^2 - 2x - 1 = 0$

Aufgabe 29

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, $\mathbb{L} = \{2\}$ b) $\mathbb{D} = [-1, 1]$, $\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$

Aufgabe 30

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\mathbb{L} = \{5\}$

Aufgabe 31

a) $x = 10^3$ b) $x = \sqrt[3]{10}$ c) $x = 2^{\frac{3}{2}}$ d) $x = 5$ e) $x = 16$

Aufgabe 32

a) $x = 3$ b) $x = \log_3 21 = \frac{\lg 21}{\lg 3}$ c) keine Lösung

Aufgabe 33

a) $\mathbb{L} = \{5, 9\}$ b) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{5}, 9 \right\}$ c) $\mathbb{L} = [2, 4]$

Aufgabe 34

Sei v (in km/h) die übliche Geschwindigkeit und t (in h) die dafür nötige Zeit. Weiter ist zu beachten,

dass $v > 0$ sein muss. Also:

$$1) v \cdot t = 80 \Leftrightarrow \frac{80}{v}, \text{ da } v \neq 0$$
$$2) (v + 10)\left(t - \frac{16}{60}\right) = 80$$

1) in 2) eingesetzt erhalten wir

$$(v + 10)\left(\frac{80}{v} - \frac{4}{15}\right) = 80$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{15}v + \frac{800}{v} - \frac{8}{3} = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{15}{4}v\right) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow v^2 + 10v - 3000 = 0$$
$$\Leftrightarrow v = -5 \pm \sqrt{3025}$$
$$\Leftrightarrow v = -60 \vee v = 50.$$

Da $v > 0$ sein muss, ist $v = 50$ die gesuchte Lösung. Eingesetzt in 1) erhalten wir $t = \frac{80}{50} \cdot 60 \text{min} = 96 \text{min}$.
Insgesamt:

Übliche Zeit: 96min; Eilige Fahrt: $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Aufgabe 35

a) $\mathbb{L} = \{-2, -1, 1, 2\}$ b) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$

Aufgabe 36

a) Beide Determinanten haben den Wert 22. b) $x = 2 \vee x = -2$

Aufgabe 37

a) $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ b) $\mathbb{L} = \{ \}$

Aufgabe 38

a) $\mathbb{L} = [-8, \infty)$ b) $\mathbb{L} = (-\infty, -9)$ c) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{25}{2}\right]$

Aufgabe 39

a) $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ b) $\mathbb{L} = \{ \}$

Aufgabe 40

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \mathbb{L} = (-\infty, -5) \cup [-4, \infty)$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \mathbb{L} = (-5, -4]$

Aufgabe 41

a) $\mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ b) $\mathbb{L} = (-\infty, -2]$ c) $\mathbb{L} = \{ \}$

Aufgabe 42

- a) Ja, denn $x + 1 > x \Leftrightarrow 1 > 0$
b) Nein, denn z.B. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
c) Nein, denn $x + x > x \Leftrightarrow x > 0$
d) Ja, denn $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$

Aufgabe 44

- b) Die Gerade schneidet die x -Achse bei $x = 7$, die y -Achse bei $y = 4$.
c) Eine Gerade mit der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ schneidet die x -Achse bei $x = a$, die y -Achse bei $y = b$.

Aufgabe 45

- a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{85}{99}$ b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ c) $y = \frac{5}{6}x$

Aufgabe 46

- a) Schnittpunkt $S(3, 2)$ b) kein Schnittpunkt c) unendlich viele Schnittpunkte

Aufgabe 47

- c) Nullstellen bei $x = -3$ und bei $x = 1$ d) Scheitelpunkt $S(-1, 2)$

Aufgabe 48

a) $f_1(x) = (x + 2)^2 - 4 = x(x + 4)$

b) $f_2(x) = (x + 3)^2 + 9$

c) $f_3(x) = -3(x - 5)^2 + 45 = -3(x - (5 + \sqrt{15}))(x - (5 - \sqrt{15}))$

Aufgabe 49

b) Schnittpunkte bei $P\left(4, \frac{3}{2}\right)$, $Q(5, 2)$ c) $h(x) = 3x - \frac{17}{2}$

Aufgabe 50

a) Gewinnfunktion: $G(x) = 5x - (3.75x^2 - 70x + 315)$

b) $G(5) = 33.75$

c) Für $x \in [6, 14]$

d) Maximaler Gewinn von 60GE bei Produktion von 10PE.

Aufgabe 51

$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

$P(x) > 0$ für $x \in (-1, 1) \cup (2, \infty)$; $P(x) < 0$ für $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

Aufgabe 52

$P(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2$. Damit ergibt sich:

$$P(x) \geq 0 \iff x \in \{-1\} \cup [1, \infty);$$

$$P(x) \leq 0 \iff x \in (-\infty, 1].$$

Aufgabe 53

a) $f(x) = \frac{(x - 1)^2(2x + 1)(x - 3)^2}{(x - 1)(-2x + 6)(x + 1)} = \frac{2(x - 1)^2(x + \frac{1}{2})(x - 3)^2}{2(x - 1)(3 - x)(x + 1)}$

$$g(x) = \frac{(x - 1)(2x + 1)(3 - x)}{2(x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + \frac{1}{2})(3 - x)}{(x + 1)} = -\frac{(x - 1)(x + \frac{1}{2})(x - 3)}{(x + 1)}$$

b) Nullstellen bei $x = 1$, $x = -1/2$ und bei $x = 3$ Polstelle bei $x = -1$

c) $g(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2} + \frac{4}{x + 1}$