Bergische Universiät Wuppertal
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. Margareta Heilmann, Britta Schulze, M. Sc.
Vorkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Aufgabensammlung Wintersemester 2016/2017

Aufgabe 1

Es seien A, B, C Aussagen. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit der folgenden Regeln.

a) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$
b) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
c) $\neg(\neg A) \iff A$ (Doppelte Verneinung)
d) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
e) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$

Aufgabe 2

Verneinen Sie die folgenden Aussagen.

a) Alle im März 2015 in Wuppertal zugelassenen Autos der Marke Fiasko verbrauchen mehr als 10 l Benzin pro 100 km Autobahnfahrt.

b) Im Vorkurs Mathematik für Ingenieure an der Uni Wuppertal gibt es einen (zukünftigen) Maschinenbaustudenten, der aus Köln oder Dortmund kommt.

Aufgabe 3

Es seien die Mengen $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ und $D = \{6\}$ gegeben.
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$
e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ f) $A \cap D$ g) $A \cup B \cup C \cup D$

Aufgabe 4

Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums X-Schlau. F sei die Menge aller Schülerinnen, M die Menge aller Schülerinnen und Schüler, deren Lieblingsfach Mathematik ist, C die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die im Schulchor singen, B die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die das Fach Biologie nicht mögen und T die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Freizeit Tennis spielen.
Beschreiben Sie die folgenden Mengen:

a) $\Omega \setminus M$ b) $M \cup C$ c) $F \cap T$ d) $M \setminus (B \cap T)$

Aufgabe 5

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an.

a) $\{n^2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 8\}$ b) $\{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 5\}$ c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 6

Geben Sie die folgenden Mengen in beschreibender Darstellung an.

a) $\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ b) $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8}\right\}$ c) $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}\right\}$

Aufgabe 7

Zwei Weingläser sind jeweils mit der gleichen Menge Wein gefüllt. In einem Glas befindet sich Weißwein, in dem anderen Rotwein. Aus dem Rotweinglas wird nun ein Löffel Rotwein entnommen und in das Weißweinglas geschüttet. Nach kräftigem Umrühren wird dem Weißweinglas ein Löffel der entstandenen Weinmischung entnommen und in das Rotweinglas geschüttet.
Befindet sich anschließend mehr Rotwein im Weißweinglas oder mehr Weißwein im Rotweinglas?

Aufgabe 8

Erstellen Sie eine Liste aller möglichen verschiedenen Teilmengen der Menge {a,b,c}.
Wie viele gibt es, wenn die leere Menge und die Menge selbst dazu gehören?
Ebenso für die Menge {a,b,c,d}.

Aufgabe 9

Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 4\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 19\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 13 \leq x < 27\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 44\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : -33 < x < \infty\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

Aufgabe 10

Seien $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Bilden Sie das Kreuzprodukt $A \times B$.

Aufgabe 11

Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{11}$

Aufgabe 12

Wandeln Sie die Dezimalzahlen in Brüche um.

a) 0.75 b) 0.35 c) 1.24

Aufgabe 13

Wie lauten die Binomischen Formeln? Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $(x + 2y)^2$ b) $(\frac{1}{x} - x)^2$ c) $(2z - 5w)(2z + 5w)$

Aufgabe 14

Berechnen Sie (geschickt!) ohne Taschenrechner.

a) $201^2 - 199^2$ b) $\frac{1000^2}{252^2 - 248^2}$

Aufgabe 15

Berechnen und vereinfachen Sie möglichst geschickt die folgenden Ausdrücke.

a) $(2t-1)(t^2-2t+1)$

b) $(a+1)^2+(a-1)^2-2(a+1)(a-1)$

c) $(x+y+z)^2-(x-y-z)^2$

Aufgabe 16

Fassen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln zusammen.

a) $x^2+14xy+49y^2$ b) $4a^2-9b^2$ c) $4a^4-20a^2b^2+25b^4$ d) $2x^4-18y^2$

Aufgabe 17

Eine Umfrage ergab, dass 80 Befragte regelmäßig Fernsehnachrichten schauen und 65 regelmäßig eine Tageszeitung lesen. Beide Angaben schließen 47 Personen ein, die beides regelmäßig tun. Schließlich gab es noch 28 Personen, die weder regelmäßig Fernsehnachrichten schauen noch eine Tageszeitung lesen.
Wieviele Personen haben insgesamt an der Umfrage teilgenommen?

Aufgabe 18

An einer Umfrage, ob sie an einem bestimmten Tag die Sendung A, B oder C im Radio gehört hatten, nahmen 1000 Personen teil. Von den befragten Personen hatten 420 A, 316 B und 160 C gehört. Diese Angaben schließen ein: 116, die A und B, 100, die A und C, 30, die B und C und 16, die alle drei Sendungen gehört hatten.

a) Wieviele Personen hatten A, aber nicht B gehört?

b) Wieviele hatten C, aber weder A noch B gehört?

c) Wieviele hatten weder A noch B noch C gehört?

Aufgabe 19

Ein Autohändler bietet ein PKW-Modell in 5 verschiedenen Farben mit 3 unterschiedlichen Motorleistungen und 4 verschiedenen Polsterungen an.
Wieviele Autos müsste der Händler auf Lager haben, um jede mögliche Ausführung sofort liefern zu können?
Stellen Sie die Situation zunächst mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.

Aufgabe 20

In einem Seminarraum stehen für 10 Teilnehmer 10 Sitzplätze zur Verfügung. Da sich die Teilnehmer nicht kennen, wird beschlossen, alle möglichen Sitzplatzkombinationen auszuprobieren.
Wieviel Zeit wird benötigt, wenn jede Sitzprobe 2 Minuten dauert?

Aufgabe 21

3 Mathematikbücher, 4 Englischbücher und 5 Deutschbücher sollen in einem Regal so angeordnet werden, dass jeweils alle Bücher eines Fachgebietes nebeneinander stehen.
Wieviele Möglichkeiten für die Anordnung der Bücher gibt es?

Aufgabe 22

Wieviele Möglichkeiten gibt es für 6 Personen, sich auf 8 Stühle zu verteilen?

Aufgabe 23

Wieviele Zahlen aus verschiedenen Ziffern gibt es zwischen 1000 und 9999?

Aufgabe 24

Ein Versandkatalog bietet T-Shirts in 20 verschiedenen Farben an. Als besonderer Service wird den Kunden angeboten, fünf verschiedene Farben zur Ansicht zu bestellen.
Wieviele Möglichkeiten der Auswahl gibt es?

Aufgabe 25

In der Bundesliga spielen 18 Mannschaften.
Wieviele Spiele gibt es in der Hinrunde, wenn jede Mannschaft gegen jede andere spielt?

Aufgabe 26

In einer Grundschulklasse mit 25 Kindern ist jeweils eine Gruppe von 4 Kindern für den Tafeldienst, das Gießen der Blumen, die Verteilung von Arbeitszetteln und das Fegen des Klassenraums zuständig.
Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus den 25 Kindern solche Vierergruppen zu bilden?

Aufgabe 27

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie an, welche Werte die Variablen nicht annehmen dürfen.

a) $a^2b^3a^{-1}b^5$ b) $\frac{t^p t^{q-1}}{t^r t^{s-1}}$ c) $\frac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10^0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}$ d) $\frac{(k^2)^3 \cdot k^4}{(k^3)^2}$ e) $\frac{(x+1)^2(x+1)^{-2}}{(x+1)^4(x+1)^{-3}}$

Aufgabe 28

a) 12000 Euro werden mit 4 % Zinsen pro Jahr auf einem Konto angelegt, wobei die am Jahresende fälligen Zinsen jeweils dem Guthaben zugeschlagen werden. Wie hoch ist das Guthaben nach 15 Jahren?

b) Wie viel Geld hätten Sie vor 5 Jahren bei einer Bank mit 6% pro Jahr anlegen müssen, um heute einen Betrag von 50.000 Euro zu erhalten?

Aufgabe 29

Der Umsatz eines Unternehmens wächst über einen Zeitraum von 3 Jahren jedes Jahr (im Vergleich zum Vorjahr) um 25 %. Wie groß ist das gesamte prozentuale Wachstum von p % über die gesamte Dreijahresperiode?

Aufgabe 30

a) Der Gewinn eines Unternehmens stieg von 2000 auf 2001 um 20 % und nahm dann von 2001 auf 2002 um 17 % ab. In welchem der Jahre 2000 und 2002 war der Gewinn höher?

b) Bei welcher prozentualen Zunahme von 2000 auf 2001 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?

c) Bei welcher prozentualen Abnahme von 2001 auf 2002 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?

Aufgabe 31

Für welche Werte von $a, x, y \in \mathbb{R}$ existiert die jeweils angegebene Wurzel?

a) $\sqrt{4+a}$ b) $\sqrt{-3-3y}$ c) $\sqrt{x^2-1}$ d) $\sqrt{-x^2-1}$ e) $\sqrt{1-a^2}$

Aufgabe 32

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. a, b, x und y seien dabei so gewählt, dass alle auftretenden Terme definiert sind.

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y}$ b) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}$ c) $(\sqrt{b}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{b}+\sqrt{5})^2$

d) $\sqrt{9a^2-6a+1}$ e) $\dfrac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$ f) $\sqrt{a^2-10a+25}$

Aufgabe 33

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\log_5 25$ b) $\lg 0.001$ c) $\log_{17} 1$ d) $\log_2 (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3})$ e) $\log_8 \left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$

Aufgabe 34

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Summen bzw. Differenzen und Produkte bzw. Quotienten.

a) $\log_3 (3x)$ b) $\log_5 \left(\dfrac{5a}{y}\right)$ c) $\lg \left(\dfrac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}\right)$ d) $\lg \left[\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}\right]$ e) $\lg \left(\dfrac{5\sqrt{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{a\sqrt{b}}}\right)$

Aufgabe 35

Schreiben Sie die folgenden Terme mit nur einem Logarithmus auf.

a) $2\log_5 u + 3\log_5 v$ b) $\lg (a+b) + \lg (a+b)^2 - \dfrac{1}{2}\lg a - \dfrac{1}{3}\lg b$

c) $\dfrac{1}{3}\log_2 x + \dfrac{2}{3}$ d) $\log_4 (x^2-1) - \log_4 (x-1) - \log_4 (x+1)^2$

e) $\left[(\log_4 x^2) : (\log_4 x)\right] - 2$ f) $\left[\left(\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{b}\right) : \left(\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{b}\right)\right] \cdot \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

g) $2\lg a - \lg \dfrac{a}{a^2+1} - \lg a^3$

Aufgabe 36

Formen Sie die folgenden Terme so um, dass sie mit Logarithmen zur Basis 10 oder e berechnet werden können.

a) $\log_4 130 - \log_3 20$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 234 + \lg 93 - \log_2 92$

Aufgabe 37

Schreiben Sie die folgenden Terme als Summe.

a) $\ln \left(\sqrt[4]{\dfrac{a^3 b}{c^2 d}}\right)$ mit $a, b, c, d > 0$ b) $\ln \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)$ mit $x > 0$

Aufgabe 38

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens.

a) $1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$ b) $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}$

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$ d) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$

Aufgabe 39

Berechnen Sie.

a) $3!$ b) $4!$ c) $5!$ d) $\binom{20}{5}$

e) $\binom{403}{3}$ f) $\binom{10}{5}-\binom{11}{5}$ g) $\dfrac{\binom{102}{27}}{\binom{100}{26}}$

Aufgabe 40

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $x^2-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}=0$ b) $2x(x-1)+6=4(x+1)$ c) $11x-3=30x^2$

d) $7x^2=8x$ e) $4x^2+4=8x$ f) $-9x^2=1+6x$

Aufgabe 41

a) Für welche $a\in\mathbb{R}$ hat die Gleichung

i) $x^2+3x+a=0$ ii) $x^2+ax+4=0$

genau eine, zwei, gar keine Lösung?

b) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\}$ ist.

Aufgabe 42

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

a) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2-x+1}$ b) $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2-x+1}$ c) $\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{x^2+2x+2}$

d) $x=\sqrt{3x+10}$ e) $\sqrt{x+\sqrt{x+6}}=6$ f) $\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{x-1}$

Aufgabe 43

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

a) $\frac{x-2}{2x+2}=\frac{x^2-x-1}{x+1}-\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2-1}=\frac{x^2}{x-1}$ c) $2-\frac{10x-13}{x-2}=\frac{x^2+x+1}{2-x}$

Aufgabe 44

Geben Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Logarithmusgleichungen an und lösen sie diese.

a) $\lg x=3$ b) $\lg x=\frac{1}{3}$ c) $\log_2 x=\frac{3}{2}$ d) $3\lg x=1$

e) $\lg(3x)=\frac{1}{2}$ f) $\lg x=\lg 3-\lg 2$ g) $\lg x+\lg(4x)=2$ h) $\lg x-\lg\sqrt{x}=2\lg 2$

Aufgabe 45

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

a) $4^x = 64$ b) $5^x = 10$ c) $3^{x-1} = 7$

d) $2^{x-2} - 2^{x+1} = 14$ e) $9 \cdot 2^{x+3} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 9(3^x - 2^x)$

Aufgabe 46

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Achten Sie genau auf die nötigen Fallunterscheidungen.

a) $|x - 7| = 2$ b) $|3x + 6| = x$ c) $|3x - 5| = 2|x + 2|$ d) $|x - 4| + |2 - x| = 2$

Aufgabe 47

Geben Sie für die folgenden Gleichungen jeweils den Definitionsbereich an, und bestimmen Sie die Lösungsmengen mit Hilfe geeigneter Substitutionen.

a) $a^4 - 13a^2 + 36 = 0$ b) $w^4 - 5w^2 + 4 = 0$ c) $y^3 - y^6 = 1$

d) $x^{-2} - 2x^{-1} = 15$ e) $2^{x+1} - 4^x - 1 = 0$ f) $(\ln x)^2 - \ln\left(x^4\right) - 21 = 0$

Aufgabe 48

a) Berechnen Sie den Wert der folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0\,?$$

Aufgabe 49
Lösen Sie die folgenden linearen Gleichnungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{2} - y &=& 1 \\ x + y &=& 3 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} x - 3y &=& 3 \\ \frac{x}{3} - y &=& -5 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} 2x - y &=& 7 \\ -x + \frac{y}{2} &=& -\frac{7}{2} \end{array}$$

Aufgabe 50

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a) $-x - 3 \leq 5$ b) $3x + 5 < x - 13$ c) $3y - (y - 1) \geq y - (1 - y)$

d) $\frac{2a - 4}{3} \leq 7$ e) $\frac{1}{3}(1 - x) \geq 2(x - 3)$ f) $\frac{t}{24} - (t + 1) + \frac{3t}{8} < \frac{5}{12}(t + 1)$

Aufgabe 51

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Ungleichungen.

a) $x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \leq 2x + 1$ b) $-x^2 + 2x \geq 35$ c) $4x^2 + 25 > 20x$

Aufgabe 52

Geben Sie die Definitionsmengen und die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an.

$$\text{a) } \frac{y}{y+5} \geq -4 \qquad \text{b) } \frac{x}{x+5} \leq -4 \qquad \text{c) } \frac{3u+25}{u+3} \geq 2u-5$$

Aufgabe 53

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.

a) $|2x-1| \leq 4$ b) $|1-0.5x| \geq x+4$ c) $|x-2| \leq |4-3x|+1$

d) $|-2x-3| > |x+1|+4$ e) $2|x+2|-|x-1|+|x+1| > 0$

Aufgabe 54

Entscheiden Sie, ob die folgenden Ungleichungen für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. f'ur alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültig sind. (Mit Begründung!)

$$\text{a) } x+1 > x \qquad \text{b) } x^2 > x \qquad \text{c) } x+x > x \qquad \text{d) } x^2+y^2 \geq 2xy$$

Aufgabe 55

Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Punktmengen, die durch die folgenden Ungleichungen beschrieben werden.

a) $x-y < 0$ b) $y \leq x^2$ c) $|x| \leq |y|$

d) $x^2+y^2 \leq 4$ e) $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 4$

Aufgabe 56

Gegeben sei die lineare Funktion $y = -\frac{4}{7}x + 4$

a) Zeichnen Sie die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem.

b) Wo schneidet die Gerade die x-Achse und die y-Achse?

c) Zeigen Sie durch Umformung, dass man die Geradengleichung auch in der Form $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ angeben kann.
Was fällt Ihnen auf? Können Sie eine allgemeine Regel angeben?

Aufgabe 57

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden,

a) die durch den Punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{11}\right)$ verläuft und die Steigung $a = \frac{1}{3}$ besitzt,

b) die die Steigung $a = -\frac{1}{2}$ besitzt und die x-Achse bei 5 schneidet,

c) die parallel zu der Geraden durch die Punkte $P(-72, -60)$ und $Q(-24, -20)$ verläuft und durch den Ursprung geht.

Aufgabe 58

Bestimmen Sie jeweils (falls möglich) die gemeinsamen Punkte der Geraden mit den angegebenen Gleichungen.

$$\text{a) } y = -2x+8 \text{ und } -y+3x = 7 \qquad \text{b) } y = \frac{3}{2}x+2 \text{ und } y = \frac{3}{2}x-5 \qquad \text{c) } y = \frac{3}{7}x+0.5 \text{ und } y - \frac{5}{10} = \frac{9}{21}x$$

Wie lässt sich an den Funktionstermen ablesen, ob zwei Geraden keine gemeinsamen Punkte besitzen?

Aufgabe 59

Es sei $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $x \in [-4, 2]$ für ganzzahlige Werte von x.

b) Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen mit Hilfe der in a) ermittelten Werte.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen von f.

d) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitelpunkt von f.

Aufgabe 60

Bestimmen Sie für jede der folgenden quadratischen Funktionen die Scheitelpunktform und (falls möglich) die Nullstellenform.

a) $f_1(x) = x^2 + 4x$ b) $f_2(x) = x^2 + 6x + 18$ c) $f_3(x) = -3x^2 + 30x - 30$

d) $f_4(x) = 9x^2 - 6x - 44$ e) $f_5(x) = -x^2 - 200x + 30000$ f) $f_6(x) = x^2 + 100x - 20000$

Aufgabe 61

Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ und } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}\,.$$

a) Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen in ein Koordinatensystem.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe 62

Die Firma Fix und Fertig produziert Bauteile für Elektrogeräte. Da sie seit einiger Zeit Verluste erleidet, soll die finanzielle Situation analysiert werden.
Die zur Produktion gehörende Kostenfunktion ist gegeben durch

$$K(x) = 3.75x^2 - 70x + 315\,,$$

wobei eine Produktionseinheit 1000 Stück beträgt und eine Geldeinheit 1000 Euro sein soll.
Der derzeitige Preis beträgt 5 Euro pro Bauteil, also 5 Geldeinheiten pro Produktionseinheit. Zur Zeit produziert Firma Fix und Fertig etwa 5000 Bauteile pro Tag. Untersuchen Sie folgende Fragen.

a) Wie lautet die zugehörige Gewinnfunktion?

b) Wie hoch ist der derzeitige Verlust pro Tag?

c) Bei welchen Produktionsmengen würde die Firma verlustfrei arbeiten?

d) Bei wieviel Produktionseinheiten wäre der Gewinn maximal und wie hoch wäre dieser dann?

Aufgabe 63

Sei $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und geben Sie die faktorisierte Darstellung an. Für welche Werte von x ist $P(x)$ positiv, für welche negativ?

Aufgabe 64

Sei $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$. Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ und bestimmen Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \leq 0\}$.

Aufgabe 65

Bestimmen Sie alle Nullstellen von $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 49x^2 - x + 12$.

Aufgabe 66

Sei

$$f(x) = \frac{2x^5 - 15x^4 + 36x^3 - 26x^2 - 6x + 9}{-2x^3 + 6x^2 + 2x - 6}\,.$$

a) Bestimmen Sie die faktorisierten Darstellungen des Zähler- und des Nennerpolynoms und bestimmen Sie daraus die "gekürzte Funktion" $g(x)$.

b) Bestimmen Sie sämtliche Null- und Polstellen der "gekürzten Funktion" $g(x)$.

c) Zerlegen Sie $g(x)$ in eine Summe aus einem Polynom und einer rationalen Funktion, deren Zählergrad kleiner ist als ihr Nennergrad.

Aufgabe 67

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$ für die Funktionen

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$$

Aufgabe 68

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $f(x) = 3^x$. Wie erhält man den Graphen der Funktion g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 aus dem Graphen von f? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = 3^x + 1 \qquad g_2(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3^x \qquad g_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$
$$g_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad g_5(x) = 3^{x-1}$$

Aufgabe 69

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Funktionswerte an den Stellen $-1, 0$ und 1.
Skizzieren Sie dann den ungefähren Verlauf der Funktionsgraphen. Welche der Funktionen sind bzgl. der y-Achse symmetrisch zueinander?

$$\text{a) } f_1(x) = 2^x \qquad \text{b) } f_2(x) = 1.5 \cdot 2^{-x} \qquad \text{c) } f_3(x) = \tfrac{1}{2^x}$$
$$\text{d) } f_4(x) = 3^{-x} \qquad \text{e) } f_5(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 3^x \qquad \text{f) } f_6(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-x}$$

Aufgabe 70

Gegeben sei die Funtionenschar f_k mit $f_k(x) = x - ke^x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass sich zwei Funktionen der Schar mit verschiedenen Werten für k nicht schneiden.

Aufgabe 71

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der folgenden Logarithmusfunktionen.

$$f_1(x) = \ln(\sqrt{x}) \qquad f_2(x) = \ln(cx), c < 0 \qquad f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$f_4(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad f_5(x) = \ln\left(\frac{c^2}{x}\right), c \neq 0$$

Aufgabe 72

Zeichnen Sie die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$. Wie erhält man die Graphen der Funktionen g_1, g_2, g_3, g_4 aus dem Graphen von f? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = \ln(x) + 1 \qquad g_2(x) = \ln(x-1) \qquad g_3(x) = \ln(-x) \qquad g_4(x) = -\ln(-x)$$

Aufgabe 73

Bestimmen Sie Definitionsbereich und Nullstellen der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = \sqrt{\ln(1-x)} - e \qquad f_2(x) = \ln(x)(\ln(x) - 3) \qquad f_3(x) = x^3 \ln(x^3)$$
$$f_4(x) = e^x \cdot \ln(x) - e^x - \ln(x) + 1 \qquad f_5(x) = \ln(5x^2) - 4\ln(\sqrt{x}) - 3 \qquad f_6(x) = \ln(2e^{2x-3}) - \ln(e^{-x})$$

Aktuelle Informationen zum Vorkurs finden Sie im Internet unter:

http://www.opt.uni-wuppertal.de/ag-opt/lehre/wintersemester-201617/vorkurs-mathematik-fuer-wirtschaftswissenschaftler.html