Wiederholertutorium zu Grundzüge der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Aufgabensammlung

Sommersemester 2012

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Fachgruppe Mathematik, Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation
Dr. M. Stiglmayr, Dipl. Math. M. Wagner

Besprechung der Aufgaben: In den Tutorien vom 29. Mai 2012 bis 1. Juni 2012

1 Lineare Algebra

Aufgabe 1.1
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & - & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 20 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & (\alpha-1)x_3 & = & 2 \end{array}$$

in Abhängigkeit eines Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.2
Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften der folgenden Matrizen mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.3
Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für welche die Vektoren

$$(a,1,0)^\top, (1,a,1)^\top, (0,1,a)^\top$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 1.4
Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.5

a) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Sind die Matrizen invertierbar? Falls ja, geben Sie die Inverse an.

b) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?

Aufgabe 1.6

a) Gegeben sei die quadratische Form

$$q(\vec{x}) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1x_3 - 7x_3^2.$$

Bestimmen Sie die zugehörige symmetrische Matrix A, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^\top A\vec{x}$.

b) Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist B positiv definit?

2 Analysis 1

Aufgabe 2.1

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen.

$$\textbf{a)}\ f(x) = 4x - 3 \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \sqrt[5]{x+1} \qquad \textbf{c)}\ h(x) = \frac{3x-1}{x+4}$$

Aufgabe 2.2

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

a) $f(t) = \sqrt[4]{t} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{t}}$ b) $f(z) = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{z} - \sqrt{z}\right)\ln(z)$ c) $f(x) = x^{-2}(x^3+1)\sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e) $f(x) = (\ln(x^2-1))^2$ f) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(\sqrt{x})$

g) $f(t) = 4\left(\ln(t) + \sqrt{t}\right)^{101}$ h) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2-5)}$ i) $f(x) = 8\,\mathrm{e}^{x^2-\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x} + 2)$ k) $f(x) = \sqrt[4]{x + \sqrt[4]{x}}$ l) $f(x) = 5^x + x^5$

Aufgabe 2.3

Man bestimme die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regeln von l'Hospital:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Aufgabe 2.4

Es sei die Funktion f mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^2} & , \text{ für } x < 0, \\ \ln(x+a) & , \text{ für } x \geq 0, \end{cases}$$

wobei $a > 0$ ein Parameter ist. Warum ist f stetig in allen Punkten $x \neq 0$? Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 2.5
Führen Sie für die folgenden Funktionen vollständige Kurvendiskussionen durch.

a) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ **b)** $f(x) = \ln(5 - x^2)$

c) $f(x) = x[\ln(x^2)]^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5}$

Aufgabe 2.6
Versuchen Sie möglichst alle der folgenden Integrale selbstständig zu berechnen.

a) $\displaystyle\int (3x^4 - 5x^2 - 3)\, dx$ b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) dt$ c) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{w} + \frac{2}{w^{1/3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{w}}\right) dw$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x^{1/4}\sqrt{x}}\, dx$ e) $\displaystyle\int \sqrt{(x+1)\sqrt{x+1}}\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{z^2 - 3z + 1}{z}\, dz$

g) $\displaystyle\int \frac{(2u+3)^2}{\sqrt[3]{u}}\, du$ h) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}x - 10\right)^{2009} dx$ i) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{3}x + 2\right)^{999} dx$

j) $\displaystyle\int 3\,\mathrm{e}^{2x-5}\, dx$ k) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2t}(4 - \mathrm{e}^{t})\, dt$ l) $\displaystyle\int \frac{1}{2 - \pi v}\, dv$

m) $\displaystyle\int \ln(2t+3)\, dt$ n) $\displaystyle\int \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) dx$ o) $\displaystyle\int \ln(4 - 3x)\, dx$

p) $\displaystyle\int 3x^2(x^3+1)^{49}\, dx$ q) $\displaystyle\int \frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 7}\, dx$ r) $\displaystyle\int (3x^2 - 2)^4 x\, dx$

s) $\displaystyle\int \frac{x^3}{5x^4 + 8}\, dx$ t) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x}\, dx$ u) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{x}\, dx$

v) $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{e}^{x}\, dx$ w) $\displaystyle\int (x^2+3)\,\mathrm{e}^{1-x}\, dx$ x) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^3}}\, dx$

A) $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) dx$ B) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}\, dx$ C) $\displaystyle\int_2^{12} \frac{3}{t+4}\, dt$

D) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} (3\,\mathrm{e}^{2x} + x^{1/3})\, dx$ E) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1}\, dx$ F) $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{2}{x^{1/3}} - \frac{12}{x^3}\right) dx$

G) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |2x - 1|\, dx$ H) $\displaystyle\int_{0.5}^{2.5} |x^2 - 3x + 2|\, dx$

3 Analysis 2

Aufgabe 3.1
Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der folgenden Funktionen und skizzieren Sie diesen in der xy-Ebene.

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{e^{x+y} - 1}$

b) $g(x,y) = \ln(5 - x^2) - \ln(y^2 - 10)$

c) $k(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 3}$

Aufgabe 3.2
Sei $f(x,y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ mit $x, y \in \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y).$$

Aufgabe 3.3
Skizzieren Sie für folgende Funktionen die Niveaulinie, auf welcher der angegebene Punkt liegt, und den Gradienten in diesem Punkt.

a) $f(x,y) = 3x + 2y,\ \ P_1(1,1)$ **b)** $g(x,y) = \dfrac{x}{y^2},\ \ P_2(1,-1)$ **c)** $h(x,y) = x^2 + y^2,\ \ P_3(-3,4)$

Aufgabe 3.4
Bestimmen Sie die Lage der stationären Punkte der folgenden Funktionen, deren Art und den darin angenommen Wert.

a) $f(x,y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2$ **b)** $g(x,y) = x^2 \ln(y) - y$ für $y > 0$

c) $h(x,y) = y^3 + x^2 - 3xy + x$ **d)** $k(x,y) = x^2 e^y - xy$

Aufgabe 3.5
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2x(3x - 2y) + (2y - x^2)y$.

a) Bestimmen Sie die Lage und die Art aller stationären Punkte.

b) Skizzieren Sie für $x \in [-6, 2]$ die Niveaulinien der Funktion $f_y(x,y)$ zum Niveau $c_1 = 0$ und $c_2 = 4$ in der xy-Ebene in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zum Tutorium finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi/tutorium/tut12.html