

Bevor wir uns genauer mit der Lösungsmethode beschäftigen, ist es sinnvoll, Aussagen über die Struktur der allgemeinen Lösung zu machen. Außerdem werden Begriffe eingeführt, die in analoger Form bei der Behandlung linearer DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten Verwendung finden.

In Analogie zu entsprechenden Begriffsbildungen bei Vektoren nennt man zwei auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D definierte Funktionen $y_1(x), y_2(x)$ linear abhängig, wenn reelle Zahlen α_1, α_2 existieren, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, so dass

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0.$$

Andernfalls heißen die Funktionen linear unabhängig.

Wenn zwei linear unabhängige Funktionen $y_1(x), y_2(x)$ Lösungen der homogenen DGL $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ sind, so heißt $y_1(x), y_2(x)$ ein Fundamentalsystem der DGL.

Beispiel 1: 1) Die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$

sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

2) Die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda x}$ und $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 \cdot e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x} (\alpha_1 + \alpha_2 x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 x = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

3) Die Funktionen $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $\beta \neq 0$, sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \alpha_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \sin(\beta x) + \alpha_2 \cos(\beta x) = 0$$

für $\beta \neq 0$ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

Für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten gilt nun folgendes zentrale Resultat.

Satz: Es sei $y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x)$ eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ die zugehörige homogene Gleichung. Dann gilt:

Ist $y_1(x), y_2(x)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, dann ist $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

Ist darüberhinaus $y_p(x)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen DGL, so ist $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Aus diesem Satz schließen wir nun, dass wir einerseits eine Methode benötigen, um ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu bestimmen und andererseits Verfahren brauchen, um spezielle (partikuläre) Lösungen der inhomogenen DGL zu finden.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der homogenen Gleichung:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung benötigen wir ein Fundamentalsystem, d.h. 2 spezielle linear unabhängige Lösungen.

Es ist zunächst naheliegend, mit geeigneten Exponentialfunktionen "zu probieren", d.h. wir machen den Ansatz: $y = e^{\lambda x}$

Wenn dies tatsächlich eine Lösung sein soll, dann muss y zusammen mit $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ die Gleichung erfüllen. Es muss also

gelten: $\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad | : e^{\lambda x} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Diese Gleichung heißt charakteristische Gleichung, weil sie, wie wir gleich sehen werden, das Lösungsverhalten / die Art des Fundamentalsystems bestimmt.

Wir erinnern uns daran, dass bei einer quadratischen Gleichung drei Fälle auftreten können: zwei verschiedene reelle Nullstellen, eine doppelte reelle Nullstelle, keine reelle Nullstelle.

Wir betrachten die Fälle getrennt.

1. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 > 0$.

Nach unseren Überlegungen sind dann $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ Lösungen der DGL. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind sie linear unabhängig und bilden somit ein Fundamentalsystem.

Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall daher:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ hat eine (doppelte) reelle Nullstelle $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = 0$.

Somit haben wir eine spezielle Lösung $y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x}$. Für das Fundamentalsystem benötigen wir eine weitere linear unabhängige Lösung.

Wir zeigen, dass $y_2 = x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$ die Forderungen erfüllt, indem wir y_2 zusammen mit den Ableitungen

$$y_2' = e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2}x e^{-\frac{a_1}{2}x} = \left(1 - \frac{a_1}{2}x\right) e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

$$y_2'' = -\frac{a_1}{2} e^{-\frac{a_1}{2}x} - \left(1 - \frac{a_1}{2}x\right) \cdot \frac{a_1}{2} e^{-\frac{a_1}{2}x} = \left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 x - a_1\right) e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

in die DGL einsetzen:

$$\underbrace{\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_1\right) e^{-\frac{a_1}{2}x}}_{y_2''} + a_1 \underbrace{\left(1 - \frac{a_1}{2}x\right) e^{-\frac{a_1}{2}x}}_{y_2'} + a_0 \underbrace{e^{-\frac{a_1}{2}x}}_{y_2}$$

$$= \left\{ \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 x - a_1 + a_1 - \frac{a_1^2}{2}x + a_0 \right\} e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

$$= -\left(\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0\right) e^{-\frac{a_1}{2}x} = 0$$

= 0 in dem betrachteten Fall

$y_2 = x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$ erfüllt also ebenfalls die DGL und $y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x}$, $y_2 = x \cdot e^{-\frac{a_1}{2}x}$

sind linear unabhängig. Sie bilden also ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der DGL in diesem Fall ist

$$y = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{a_1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Nullstelle, d.h.

$(\frac{a_1}{2})^2 - a_0 < 0$. Wir zeigen, dass in diesem Fall die beiden linear unabhängigen Funktionen $y_1 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$ ein Fundamentalsystem bilden.

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x))$$

$$y_1'' = \alpha e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) + e^{\alpha x} (\alpha \beta \cos(\beta x) - \beta^2 \sin(\beta x)) \\ = e^{\alpha x} \{ (\alpha^2 - \beta^2) \sin(\beta x) + 2\alpha\beta \cos(\beta x) \}$$

Einsetzen in die DGL:

$$e^{\alpha x} \{ (\alpha^2 - \beta^2) \sin(\beta x) + 2\alpha\beta \cos(\beta x) \} + a_1 e^{\alpha x} (\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x)) + a_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ = e^{\alpha x} \{ (\alpha^2 - \beta^2 + a_1 \alpha + a_0) \sin(\beta x) + \beta (2\alpha + a_1) \cos(\beta x) \} = 0 \\ = \underbrace{\left(\left(\frac{a_1}{2} \right)^2 - \left[a_0 - \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 \right] - \frac{a_1^2}{2} + a_0}_{=0} \sin(\beta x) + \underbrace{\beta (-a_1 + a_1)}_{=0} \cos(\beta x) = 0$$

Somit erfüllt y_1 die DGL. Eine analoge Rechnung zeigt, dass auch y_2 die DGL erfüllt. Da y_1, y_2 linear unabhängig sind, bilden sie ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung der DGL ist somit:

$$y = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} \sin(\sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2} x) + C_2 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cos(\sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2} x) \\ = e^{-\frac{a_1}{2}x} \{ C_1 \sin(\sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2} x) + C_2 \cos(\sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2} x) \}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Bevor wir uns damit beschäftigen, wie man an eine spezielle Lösung einer inhomogenen DGL gelangt, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der linearen, homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} = 0 \quad | : e^{\lambda x} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \vee \lambda_2 = 3 \quad (2 \text{ verschiedene reelle Nullst.})$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{3x}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$

Beispiel: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der linearen, homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = 0.$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + \frac{9}{4}e^{\lambda x} = 0 \quad | : e^{\lambda x} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \quad (\text{doppelte reelle Nullstelle})$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\frac{3}{2}x}$, $y_2 = x \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$

Beispiel: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der linearen, homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' - \frac{4}{3}y' + \frac{29}{9}y = 0.$$

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda x} - \frac{4}{3}\lambda e^{\lambda x} + \frac{29}{9}e^{\lambda x} = 0 \quad | : e^{\lambda x} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{29}{9} = 0 \quad (\text{charakteristische Gleichung})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{29}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{-\frac{25}{9}} \quad (\text{keine reellen Lösungen})$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\frac{2}{3}x} \sin(\frac{5}{3}x)$, $y_2 = e^{\frac{2}{3}x} \cos(\frac{5}{3}x)$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = e^{\frac{2}{3}x} (C_1 \sin(\frac{5}{3}x) + C_2 \cos(\frac{5}{3}x))$

Nachdem wir nun gesehen haben, wie man die allgemeine Lösung einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmen kann, wenden wir uns dem Problem zu eine spezielle (partikuläre) Lösung für die inhomogene Gleichung zu finden. Dazu gibt es ein allgemeines Verfahren, das mit "Variation der Konstanten" bezeichnet wird.

Die Durchführung ist in der Regel recht aufwendig. Wir werden hier eine andere Methode kennenlernen, die in vielen praktischen Problemstellungen funktioniert und in der Regel mit geringerem Aufwand durchgeführt werden kann.

Dabei versucht man, Kenntnisse über strukturelle Eigenschaften der Störfunktion / Inhomogenität zu nutzen, indem man dazu passend einen geeigneten Ansatz für eine Lösung y_p formuliert, in dem zunächst noch freie Parameter sind. Diese werden dann so bestimmt, dass tatsächlich eine Lösung herauskommt. Für viele in der Praxis vorkommende Störfunktionen kann man einen passenden Ansatz aus einer Tabelle wählen.

Zunächst werden wir aber an einigen Beispielen plausibel machen, wie man auf solche Ansätze kommt.

Beispiel: $y'' - y' - 6y = x^2 - 1$.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - y' - 6y = 0$ haben wir bereits bestimmt: $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung überlegen wir, dass wenn $r(x) = x^2 - 1$ ein Polynom vom Grad 2 ist, y_p so sein muss, dass die linke Seite der DGL ebenfalls ein Polynom vom Grad 2 ergibt. Da Ableitungen von Polynomen wieder Polynome mit niedrigerem Grad sind, ist es sinnvoll y_p in der Form $y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ anzunehmen.

Die Parameter A_0, A_1, A_2 sind nun so zu bestimmen, dass y_p die inhomogene DGL löst. Dazu setzen wir y_p zusammen mit den Ableitungen $y_p' = 2A_2x + A_1$, $y_p'' = 2A_2$ in die DGL ein:

$$2A_2 - (2A_2x + A_1) - 6(A_2x^2 + A_1x + A_0) = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -6A_2x^2 + (-2A_2 - 6A_1)x + (2A_0 - A_1 - 6A_0) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1)$$

Da 2 Polynome genau dann gleich sind, wenn ihre Koeffizienten gleich sind, muss also gelten:

$$-6A_2 = 1$$

$$-6A_1 - 2A_2 = 0$$

$$-6A_0 - A_1 + 2A_2 = -1$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung:

$$A_0 = \frac{11}{108}, A_1 = \frac{1}{18}, A_2 = -\frac{1}{6}$$

Somit ist $y_p = \frac{11}{108}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{1}{6}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Da für die allgemeine Lösung der DGL $y = y_h + y_p$ gilt, erhalten wir nun insgesamt:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{11}{108}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{1}{6}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y'' - y' - 6y = x^2 - 1$.

Beispiel: $y'' - y' = x^2 + 3x - 1$

Die zugehörige homogene DGL ist $y'' - y' = 0$ mit der allgemeinen Lösung $y_h = C_1 + C_2 e^x$.

Um nun eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen DGL zu bestimmen, müssen wir beachten, dass in diesem Beispiel y nicht vorkommt, sondern nur die 1. und 2. Ableitung. Um nun mit $y'' - y'$ an ein Polynom 2. Grades, wie in der Störfunktion zu gelangen, muss im Ansatz für y_p ein Polynom 2. Grades gewählt werden, d. h. y_p als eine Stammfunktion eines Polynoms dritten Grades:

$$y_p = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x; \quad y_p' = 3A_3 x^2 + 2A_2 x + A_1, \quad y_p'' = 6A_3 x + 2A_2$$

Einsetzen in die DGL:

$$6A_3 x + 2A_2 - 3A_3 x^2 - 2A_2 x - A_1 = x^2 + 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow -3A_3 \cdot x^2 + (6A_3 - 2A_2) \cdot x + (2A_2 - A_1) = 1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + (-1)$$

Koeffizientenvergleich: $-3A_3 = 1$

$$-2A_2 + 6A_3 = 3$$

$$-A_1 + 2A_2 = -1$$

Lösung: $A_1 = -4, A_2 = -\frac{5}{2}, A_3 = -\frac{1}{3}$

Somit: $y_p = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist also:

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4$$

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(x)$ ein Polynom vom Grad n , dann macht man für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & , \text{ falls } a_0 \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) & , \text{ falls } a_0 = 0, a_1 \neq 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & , \text{ falls } a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \quad , \text{ wobei } Q_n \text{ Polynom vom Grad } n.$$

Beispiel: $y'' - y' - 6y = 3e^{4x}$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

Ansatz für partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{4x}$.

$$y_p' = 4A \cdot e^{4x}, \quad y_p'' = 16A e^{4x}.$$

Einsetzen in die DGL:

$$16A e^{4x} - 4A e^{4x} - 6A e^{4x} = 3e^{4x} \quad | : e^{4x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 6A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Also ist $y_p = \frac{1}{2} e^{4x}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{4x}$$

Beispiel: $y'' - y' - 6y = 3 \cdot e^{3x}$

Wie oben berechnet, ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{3x}$. Hier macht es keinen Sinn für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung einen Ansatz der Form $A \cdot e^{3x}$ zu machen, da dies bereits (mit $C_1 = 0, C_2 = A$) Lösung der homogenen DGL ist; die linke Seite ergibt demnach für jeden Wert für die Konstante A den Wert Null. Es funktioniert aber ein Ansatz der Form $y_p = A \cdot x \cdot e^{3x}$.

Dafür ist $y_p' = A(1+3x)e^{3x}$; $y_p'' = 3A(2+3x)e^{3x}$

Einsetzen des Ansatzes in die DGL liefert:

$$3A(2+3x)e^{3x} - A(1+3x)e^{3x} - 6Ax e^{3x} = 3 \cdot e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot e^{3x} \underbrace{\{ 3 \cdot (2+3x) - (1+3x) - 6x \}}_{=5} = 3 \cdot e^{3x} \quad | : e^{3x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 5A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{5}$$

Somit ist $y_p = \frac{3}{5}x \cdot e^{3x}$ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist somit:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + \frac{3}{5}x e^{3x}$$

Beispiel: $y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = 2 \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Wir haben bereits berechnet, dass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{\frac{3}{2}x}$ ist, da $\lambda = \frac{3}{2}$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Hier machen Ansätze der Form $A \cdot e^{\frac{3}{2}x}$, $A \cdot x e^{\frac{3}{2}x}$ oder auch $(A_1 + A_2 x) e^{\frac{3}{2}x}$ keinen Sinn, da diese ja sämtlich Lösungen der homogenen Gleichung sind. Es funktioniert aber ein Ansatz der Form $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{\frac{3}{2}x}$.

Dafür ist $y_p' = A \cdot (2x + \frac{3}{2}x^2) \cdot e^{\frac{3}{2}x}$, $y_p'' = A \cdot (2 + 6x + \frac{9}{4}x^2) \cdot e^{\frac{3}{2}x}$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$A \cdot (2 + 6x + \frac{9}{4}x^2) \cdot e^{\frac{3}{2}x} - 3A \cdot (2x + \frac{3}{2}x^2) e^{\frac{3}{2}x} + \frac{9}{4} \cdot A \cdot x^2 \cdot e^{\frac{3}{2}x} = 2 \cdot e^{\frac{3}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot e^{\frac{3}{2}x} \underbrace{\{ (2 + 6x + \frac{9}{4}x^2) - 3(2x + \frac{3}{2}x^2) + \frac{9}{4}x^2 \}}_{=2} = 2 \cdot e^{\frac{3}{2}x} \quad | : e^{\frac{3}{2}x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2A = 2 \Leftrightarrow A = 1$$

Somit ist $y_p = x^2 \cdot e^{\frac{3}{2}x}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und damit $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{2}x} + x^2 \cdot e^{\frac{3}{2}x} = (C_1 + C_2 x + x^2) e^{\frac{3}{2}x}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(x)$ von der Form $C \cdot e^{cx}$ mit Konstanten $C, c \in \mathbb{R}$, dann macht man für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} A \cdot e^{cx} & , \text{ falls } c \text{ keine Lösung der charakteristischen Gleichung} \\ A \cdot x \cdot e^{cx} & , \text{ falls } c \text{ einfache Lösung der charakteristischen Gleichung} \\ A \cdot x^2 \cdot e^{cx} & , \text{ falls } c \text{ doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung} \end{cases}$$

Auch wenn wir im Rahmen dieser Vorlesung die trigonometrischen Funktionen sträflich vernachlässigt haben, kommen diese als Störfunktionen häufig vor und sollen daher an dieser Stelle in die Überlegungen mit einbezogen werden. Dazu muss man hier eigentlich nur die Ableitungen $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ und $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ kennen.

Beispiel: $y'' - y' - 6y = 2 \cdot \sin(2x) - 3 \cdot \cos(2x)$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hatten wir zu $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ berechnet. Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p = A_1 \cdot \sin(2x) + A_2 \cdot \cos(2x)$. Damit erhalten wir $y_p' = 2A_1 \cos(2x) - 2A_2 \sin(2x)$, $y_p'' = -4A_1 \sin(2x) - 4A_2 \cos(2x)$.

Einsetzen in die DGL liefert:

$$-4A_1 \sin(2x) - 4A_2 \cos(2x) - 2A_1 \cos(2x) + 2A_2 \sin(2x) - 6A_1 \sin(2x) - 6A_2 \cos(2x) = 2 \sin(2x) - 3 \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow (-4A_1 + 2A_2 - 6A_1) \sin(2x) + (-4A_2 - 2A_1 - 6A_2) \cos(2x) = 2 \sin(2x) - 3 \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow (-10A_1 + 2A_2) \sin(2x) + (-2A_1 - 10A_2) \cos(2x) = 2 \sin(2x) - 3 \cos(2x)$$

Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen rechts und links jeweils übereinstimmen. Ein Vergleich der Koeffizienten liefert somit das lineare Gleichungssystem:

$$-10 A_1 + 2 A_2 = 2$$

$$-2 A_1 - 10 A_2 = -3$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist $A_1 = -\frac{7}{52}$, $A_2 = \frac{17}{52}$. Somit erhält man die partikuläre Lösung $y_p = -\frac{7}{52} \sin(2x) + \frac{17}{52} \cos(2x)$ für die inhomogene Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{7}{52} \sin(2x) + \frac{17}{52} \cos(2x)$.

Beispiel: $y'' + 4y = 2 \sin(2x) - 3 \cos(2x)$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y'' + 4y = 0$. Mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ erhält man die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{-4}$, d.h. keine reelle Lösung.

Das Fundamentalsystem ist somit: $y_1 = e^{0 \cdot x} \sin(2x) = \sin(2x)$,

$y_2 = e^{0 \cdot x} \cos(2x) = \cos(2x)$ und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $y_h = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$.

Als Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist eine Funktion der Form $A_1 \sin(2x) + A_2 \cos(2x)$ hier nicht sinnvoll.

Es funktioniert aber mit $y_p = x(A_1 \sin(2x) + A_2 \cos(2x))$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } y_p' &= A_1 \sin(2x) + A_2 \cos(2x) + x(2A_1 \cos(2x) - 2A_2 \sin(2x)) \\ &= (A_1 - 2A_2 x) \sin(2x) + (A_2 + 2A_1 x) \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= -2A_2 \sin(2x) + (A_1 - 2A_2 x) \cdot 2 \cos(2x) + 2A_1 \cos(2x) - (A_2 + 2A_1 x) \cdot 2 \sin(2x) \\ &= -4(A_2 + A_1 x) \sin(2x) + 4(A_1 - A_2 x) \cos(2x) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$\begin{aligned} -4(A_2 + A_1 x) \sin(2x) + 4(A_1 - A_2 x) \cos(2x) + 4x(A_1 \sin(2x) + A_2 \cos(2x)) \\ = 2 \sin(2x) - 3 \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -4A_2 \sin(2x) + 4A_1 \cos(2x) = 2 \sin(2x) - 3 \cos(2x)$$

Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen rechts und links jeweils übereinstimmen.

Ein Vergleich der Koeffizienten liefert somit

$$-4A_2 = 2 \Leftrightarrow A_2 = -\frac{1}{2}, \quad 4A_1 = -3 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{3}{4}$$

Somit erhält man die partikuläre Lösung $y_p = x(-\frac{3}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x))$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \text{zu } y &= C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + x(-\frac{3}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)) \\ &= (C_1 - \frac{3}{4}x)\sin(2x) + (C_2 - \frac{1}{2}x)\cos(2x). \end{aligned}$$

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(x)$ von der Form $K_1 \sin(kx) + K_2 \cos(kx)$, K_1, K_2, k Konstanten, $k > 0$, dann macht man für die partikuläre Lösung folgenden Ansatz.

$$y_p = \begin{cases} A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx), & \text{falls } a_1 \neq 0 \vee a_0 \neq k \\ x(A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx)), & \text{falls } a_1 = 0 \wedge a_0 = k \end{cases}$$

Aufgabe: Stellen Sie sich in geeigneter Form eine Tabelle für die verschiedenen Ansätze zusammen!

Bevor wir uns noch ein paar abschließende Beispiele anschauen, wollen wir noch einmal in einer Übersicht zusammenstellen, welche Schritte zur Lösung eines AWP der Form

$$y'' + a_1 y' + a_0 = r(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

erforderlich sind.

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

a) Ansatz: $y_h = e^{\lambda x}$

b) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

c) Fundamentalsystem: y_1, y_2 abhängig von den Lösungen der charakteristischen Gleichung

d) Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

a) Geeigneten Ansatz y_p wählen

b) y_p', y_p'' bestimmen

c) y_p, y_p', y_p'' in die inhomogene DGL einsetzen

d) Parameter im Ansatz durch Koeffizientenvergleich ermitteln

e) Ermittelte partikuläre Lösung y_p angeben.

3. Schritt: Angabe der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$ der inhomogenen DGL

4. Schritt: Bestimmung der Lösung des AWP

a) Bestimmung von $y' = y_h' + y_p'$

b) Einsetzen der Anfangsbedingungen

c) Bestimmung der Konstanten C_1, C_2

d) Angabe der Lösung des AWP

4. Schritt: Bestimmung der Lösung des AWP

a) Einsetzen der AB

b) Bestimmung der Konstanten C_1, C_2

c) Angabe der Lösung des AWP

Beispiel: AWP $y'' - 3y' = 9t^3 - 9t^2 - 1$ mit $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

1. Schritt: Allgemeine Lösung homogene DGL $y'' - 3y' = 0$

a) Ansatz: $y_h = e^{\lambda t}$

b) Ansatz einsetzen, Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$ liefert

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 3$

c) Fundamentalsystem: $y_1 = e^{0 \cdot t} = 1, y_2 = e^{3t}$

d) Allgemeine Lösung homogene DGL: $y_h = C_1 + C_2 e^{3t}$

2. Schritt: Partikuläre Lösung von $y'' - 3y' = 9t^3 - 9t^2 - 1$

a) Ansatz: $y_p = t \cdot (A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0)$
 $= A_3 t^4 + A_2 t^3 + A_1 t^2 + A_0 t$

b) $y_p' = 4A_3 t^3 + 3A_2 t^2 + 2A_1 t + A_0$

$y_p'' = 12A_3 t^2 + 6A_2 t + 2A_1$

c) $(12A_3 t^2 + 6A_2 t + 2A_1) - 3(4A_3 t^3 + 3A_2 t^2 + 2A_1 t + A_0) = 9t^3 - 9t^2 - 1$
 $\Leftrightarrow -12A_3 t^3 + (12A_3 - 9A_2)t^2 + (6A_2 - 6A_1)t + 2A_1 - 3A_0 = 9t^3 - 9t^2 - 1$

d) Koeffizientenvergleich:

$-12A_3 = 9$

Lineares Gleichungssystem:

$12A_3 - 9A_2 = -9$

Lösung: $A_3 = -\frac{3}{4}$, $A_2 = A_1 = 0$, $A_0 = \frac{1}{3}$

$6A_2 - 6A_1 = 0$

$2A_1 - 3A_0 = -1$

e) Partikuläre Lösung: $y_p = t(-\frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{3})$

3. Schritt: Allgemeine Lösung von $y'' - 3y' = 9t^3 - 9t^2 - 1$

$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{3t} - \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{3}t$

4. Schritt: Lösen des AWP

a) $y' = 3C_2 e^{3t} - 3t^3 + \frac{1}{3}$

b) 1. AB: $y(1) = 1$: $C_1 + C_2 \cdot e^3 - \frac{5}{12} = 1$ ①

2. AB: $y'(1) = 0$: $3C_2 e^3 - \frac{8}{3} = 0$ ②

c) ①, ② - lineares Gleichungssystem für C_1, C_2

Lösung: $C_2 = \frac{8}{9} \cdot e^{-3}$, $C_1 = \frac{19}{36}$

d) Lösung des AWP: $y = \frac{19}{36} + \frac{8}{9} e^{-3} \cdot e^{3t} - \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{3}t$

Beispiel: AWP $y'' - 4y' + 4y = -3e^{2t}$ mit $y(0) = 1, y'(0) = 1$

1. Schritt: Allgemeine Lösung homogene DGL $y'' - 4y' + 4y = 0$

a) Ansatz: $y_h = e^{\lambda t}$

b) Ansatz einsetzen, Division durch $e^{\lambda t} \neq 0$ liefert

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2$

c) Fundamentalsystem: $y_1 = e^{2t}$, $y_2 = t \cdot e^{2t}$

d) Allgemeine Lösung homogene DGL: $y_h = (C_1 + C_2 t) e^{2t}$

2. Schritt: Partikuläre Lösung von $y'' - 4y' + 4y = -3e^{2t}$

a) Ansatz: $y_p = A \cdot t^2 \cdot e^{2t}$

b) $y_p' = 2A(t + t^2)e^{2t}$, $y_p'' = 2A(1 + 4t + 2t^2)e^{2t}$

c) $2A(1 + 4t + 2t^2)e^{2t} - 8A(t + t^2)e^{2t} + 4At^2e^{2t} = -3e^{2t}$

$$\Leftrightarrow 2Ae^{2t} = -3e^{2t}$$

d) Koeffizientenvergleich: $2A = -3 \Leftrightarrow A = -\frac{3}{2}$

e) Partikuläre Lösung: $y_p = -\frac{3}{2}t^2 \cdot e^{2t}$

3. Schritt: Allgemeine Lösung von $y'' - 4y' + 4y = -3e^{2t}$

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 t)e^{2t} - \frac{3}{2}t^2 \cdot e^{2t}$$

4. Schritt: Lösen des AWP

a) $y' = (2C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^{2t} - 3(t + t^2)e^{2t}$

b) 1. AB: $y(0) = 1 : C_1 = 1$ ①

2. AB: $y'(0) = 1 : 2C_1 + C_2 = 1$ ②

c) ①, ② - lineares Gleichungssystem für C_1, C_2 ; Lösung: $C_1 = 1, C_2 = -1$.

d) Lösung des AWP: $y = (1 - t)e^{2t} - \frac{3}{2}t^2 e^{2t}$

Beispiel: Angebot $a(t)$ und Nachfrage $n(t)$ eines Gutes seien in Abhängigkeit vom Preis $p(t)$ gegeben durch:

$$a(t) = A + B \cdot p(t) + C \cdot p'(t) + D p''(t), \quad A, B, C, D \geq 0$$

$$n(t) = E - F \cdot p(t) - G \cdot p'(t) - H \cdot p''(t), \quad E, F, G, H \geq 0.$$

Angebot und Nachfrage hängen hier auch von der Preisänderung $p'(t)$ und der Preisbeschleunigung $p''(t)$ ab.

Gleichgewicht herrscht, wenn $a(t) = n(t)$ gilt, also

$$A + B \cdot p(t) + C p'(t) + D p''(t) = E - F p(t) - G p'(t) - H p''(t)$$

$$\Leftrightarrow (D + H) p''(t) + (C + G) p'(t) + (B + F) p(t) = E - A$$

Für $D+H \neq 0$ also :

$$p''(t) + \frac{C+G}{D+H} p'(t) + \frac{B+F}{D+H} p(t) = \frac{E-A}{D+H}$$

Hat man zusätzlich noch Angaben zum Preis und zur Preisänderung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 , so hat man insgesamt ein

AWP der Form $p'' + K_1 p' + K_2 p = K_3$, $p(t_0) = p_0$, $p'(t_0) = p_1$, das sich mit den hier vorgestellten Methoden lösen lässt.