

VII Differentialgleichungen

In vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften wie z.B. in der ökonomischen Wachstumstheorie, in Untersuchungen der Ausschöpfung natürlicher Ressourcen, in Modellen der Umweltökonomie und in der Finanzmathematik hat man es häufig mit Gleichungen zu tun, in denen die gesuchten Größen Funktionen sind, und in denen zusätzlich auch Ableitungen dieser Funktionen auftreten. Gleichungen dieser Art nennt man Differentialgleichungen. Handelt es sich um Funktionen einer Variablen und ihren Ableitungen, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen; bei Gleichungen mit Funktionen mehrerer Variablen und zugehörigen partiellen Ableitungen von partiellen Differentialgleichungen.

Als Beispiel für die große Bedeutung der Differentialgleichungen sei hier das Black-Scholes Modell, ein Modell zur Bewertung von Finanzoptionen, genannt. Fischer Black, Myron Samuel Scholes und Robert C. Merton erhielten 1997 für ihre Arbeiten den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Die inzwischen meist als Black-Scholes-DGL bezeichnete Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

ist unter gewissen vereinfachenden Annahmen eine Gleichung für den Wert V einer (europäischen) Aktienoption mit dem Zinssatz r , dem Aktienkurs S und der Volatilität σ^2 .

Wir werden uns im Rahmen dieser Veranstaltung auf relativ einfache gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken und dazu zunächst ein einfaches Beispiel behandeln.

Es wird dringend empfohlen, das Kapitel Integralrechnung aus dem letzten Semester zu wiederholen!

Beispiel: Stetige Verzinsung

Man gelangt zu der Formel für die stetige Verzinsung, die wir bereits in Kapitel I im letzten Semester kennengelernt haben, auf folgende Weise. Man nimmt an, dass die momentane Änderungsrate $K'(t)$ des Kapitals zu jedem Zeitpunkt proportional zum Kapital $K(t)$ ist oder anders ausgedrückt, dass die relative Änderungsrate $\frac{K'(t)}{K(t)}$ zu jedem Zeitpunkt t konstant gleich $i = p\%$ ist, d.h.

$$K'(t) = i \cdot K(t).$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL, bei der man die Lösungen durch einfache Überlegungen ermitteln kann.

Eine Funktion, die mit ihrer Ableitung bis auf den konstanten Faktor i übereinstimmt, kann nur eine Exponentialfunktion sein.

Genauer gilt: $K(t) = C \cdot e^{it}$ erfüllt für jede beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ die angegebene DGL. Man erhält also zunächst unendlich viele Lösungen. Gibt man zusätzlich das Anfangskapital, d.h. das Kapital zum Zeitpunkt $t=0$ durch $K(0) = K_0$ vor, so ergibt sich durch Einsetzen $K(0) = C \cdot e^0 = K_0$, d.h. $C = K_0$.

Die Funktion $K(t) = K_0 \cdot e^{it}$ für die stetige Verzinsung ist also (die) Lösung der DGL mit der zusätzlichen Anfangsbedingung $K(0) = K_0$.

Nach diesem einführenden Beispiel stellen wir nun zunächst einige Definitionen zusammen und grenzen genauer ein, mit welchen DGL'n wir uns im Rahmen dieser Veranstaltung beschäftigen werden.

Definition: Unter einer gewöhnlichen DGL versteht man eine Gleichung, in der eine Funktion y einer Variablen, deren Ableitungen und die unabhängige Variable auftreten. Jede Funktion, die mit ihren Ableitungen die Gleichung erfüllt, heißt eine Lösung der DGL.

Die Menge aller Lösungen heißt Lösungsmenge oder allgemeine Lösung.

Die höchste auftretende Ableitung heißt Ordnung der DGL.

Eine DGL heißt explizit, wenn sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist, sonst implizit.

Beispiel:

$y''' = x - 2y + y''$, explizite DGL 3ter Ordnung

$y' - \sqrt{y} + x^2 y'' = 0$, implizite DGL 2ter Ordnung

Definition: Die Aufgabe, eine Lösung einer DGL n-ter Ordnung zu bestimmen, die zusätzlich sogenannten Anfangsbedingungen (AB)

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

genügt, heißt Anfangswertproblem (AWP).

In unserem einführenden Beispiel haben wir für das AWP

$$K'(t) = i \cdot K(t) \text{ mit } K(0) = K_0$$

die Funktion $K(t) = K_0 \cdot e^{it}$ der stetigen Verzinsung als Lösung ermittelt. Leider gibt es nicht "das Verfahren", um beliebige DGL zu lösen. Nur für sehr spezielle "Typen" von DGL können allgemeine Methoden zur Bestimmung der Lösungsmenge angegeben werden. Bestimmte Lösungsmethoden sind also stets im Zusammenhang mit bestimmten Eigenschaften einer DGL zu sehen und umgekehrt.

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir behandeln in diesem Abschnitt Methoden zur Berechnung der Lösungen von bestimmten Typen von DGL n 1. Ordnung.

Typ: DGL mit getrennten Variablen

Dies ist eine DGL, die sich in der Form

$$y' \cdot h(y) = g(x)$$

darstellen lässt.

Lösungsmethode: Trennung der Variablen

Bezeichnen wir mit H und G Stammfunktionen von g und h , so erhalten wir mit der Kettenregel und der DGL

$$\frac{d}{dx} H(y(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} h(y) \cdot y' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DGL}}}{=} g(x)$$

und somit durch **Integration der DGL**

$$(*) H(y) = G(x) + C \quad \text{bzw.} \quad \int h(y) dy = \int g(x) dx$$

Ist H umkehrbar mit der Umkehrfunktion H^{-1} , so lässt sich die allgemeine Lösung in der Form

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C)$$

darstellen.

Beispiel: Wir betrachten die DGL $y' \cdot e^y = t$.

Sei wir vom Typ DGL mit getrennten Variablen mit $h(y) = e^y$, $g(t) = t$.

Mit $H(y) = e^y$ und $G(t) = \frac{1}{2} t^2$ erhält man mit **(*)**

$$e^y = \frac{1}{2} t^2 + C.$$

Auflösen nach y ergibt die allgemeine Lösung

$$y = \ln\left(\frac{1}{2} t^2 + C\right) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2} t^2 + C > 0.$$

Beispiel: Wir lösen das AWP

$$y' \cdot e^y = t \quad \text{mit} \quad y(2) = 1.$$

Die allgemeine Lösung haben wir bereits zu $y = \ln\left(\frac{1}{2} t^2 + C\right)$, $\frac{1}{2} t^2 + C > 0$ bestimmt. Setzen wir darin nun unsere AB ein, so erhalten wir:

$$y(2) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + C\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 + C) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 + C = e$$

$$\Leftrightarrow C = e - 2 \quad (\approx 0.718)$$

Somit ist $y = \ln\left(\frac{1}{2} t^2 + e - 2\right)$, $t \in \mathbb{R}$, die Lösung des AWP.

Beispiel: Logistisches Wachstum (vgl. auch Übung 6.1, WS 08/09, Taufelien)

$y(t)$ sei der Automobilbestand eines Landes zum Zeitpunkt t .

Eine Modellannahme geht davon aus, dass die relative Wachstumsrate $\frac{y'(t)}{y(t)}$ bei einem geringen Bestand annähernd konstant ist und gegen Null konvergiert, wenn sich der Bestand einer gewissen Kapazitätsgrenze K nähert. Eine spezielle Form dieses Modells ist z.B. die Annahme, dass die relative Änderungsrate mit steigendem Bestand linear abnimmt. Daraus ergibt sich die DGL

$$\frac{y'}{y} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

mit $y > 0$ (positiver Bestand) und $y < K$ (Bestand unterhalb der Kapazitätsgrenze). Dividiert man die DGL durch $1 - \frac{y}{K}$, so erhält man $y' \cdot \frac{1}{y(1 - \frac{y}{K})} = r$.

Dies ist wieder eine DGL mit getrennten Variablen, wobei hier $h(y) = \frac{1}{y(1 - \frac{y}{K})}$ und $g(t) = r$ ist.

$h(y)$ lässt sich umschreiben in $h(y) = \frac{K}{y(K-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}$.

Somit haben wir die Stammfunktionen

$H(y) = \ln|y| - \ln|K-y| = \ln \frac{y}{K-y}$ (da $y \in (0, K)$) und $G(t) = r \cdot t$.

Somit erhält man $\ln \frac{y}{K-y} = rt + C$

Wir lösen die Gleichung nach y auf.

$$\ln \frac{y}{K-y} = rt + C \Leftrightarrow \frac{y}{K-y} = e^{rt+C}$$

$$\Leftrightarrow y \cdot e^{-rt-C} = K-y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{K}{1 + e^{-C} \cdot e^{-rt}}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-rt}}, \text{ wobei } A = e^{-C}$$

Eine Funktion dieser Form nennt man logistische Funktion. Da $A = e^{-C} > 0$, gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + A \cdot e^{-rt}} = K$, d.h. für wachsendes t nähert sich der Bestand der Kapazitätsgrenze.

Beispiel: In einem Modell für die Ausbreitung einer Grippe bezeichne $a(t)$ die Anzahl der Personen, die am t -ten Tag, nachdem alle Mitglieder einer Gruppe von 1000 Personen mit einem Infektionsträger in Kontakt waren, eine Grippe bekommen. Wir nehmen an, dass für die relative Änderungsrate von $a(t)$ gilt: $\frac{a'(t)}{a(t)} = 0.25 \left(1 - \frac{a(t)}{1000}\right)$. Weiter sei $a(0) = 1$ (eine Kontaktperson ist noch am selben Tag erkrankt). Wir bestimmen zunächst $a(t)$.

Dazu müssen wir das AWP

$$\frac{a'}{a} = 0.25 \left(1 - \frac{a}{1000}\right), \quad a(0) = 1 \quad \text{lösen.}$$

Die allgemeine Lösung der DGL können wir aus dem vorigen Beispiel mit $r = 0.25$ und $K = 1000$ ablesen zu

$$a(t) = \frac{1000}{1 + A \cdot e^{-0.25t}}.$$

Die AB liefert $a(1) = \frac{1000}{1 + A \cdot e^0} = \frac{1000}{1 + A} = 1$, d.h. $A = 999$.

Somit löst

$$a(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-0.25t}} \quad \text{das AWP.}$$

Wir berechnen nun, wie lange es dauert, bis 250, 500, 750 Personen erkrankt sind.

Dazu müssen wir die Gleichung $\frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-0.25t}} = N$ nach t auflösen, wobei N die Anzahl erkrankter Personen bezeichnet.

$$\frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{-0.25t}} = N \Leftrightarrow e^{-0.25t} = \frac{1000 - N}{999N}$$

$$\Leftrightarrow -0.25t = \ln\left(\frac{1000 - N}{999N}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -4 \cdot \ln\left(\frac{1000 - N}{999N}\right)$$

Somit ergibt sich für

$$N = 250 : t = -4 \ln\left(\frac{750}{250 \cdot 999}\right) = 4 \cdot \ln(333), \text{ d.h. etwa 23 Tage}$$

$$N = 500 : t = -4 \ln\left(\frac{500}{500 \cdot 999}\right) = 4 \cdot \ln(999), \text{ d.h. etwa 28 Tage}$$

$$N = 750 : t = -4 \ln\left(\frac{250}{750 \cdot 999}\right) = 4 \cdot \ln(2997), \text{ d.h. etwa 32 Tage}$$

Beispiel: Wir bezeichnen mit $b(t) > 0$ das Brutto-sozialprodukt, mit $k(t) > 0$ den Kapitalbestand und mit $\ell(t) > 0$ die Arbeitskapazität in einem Land zur Zeit t .

Wir legen folgende Modellannahmen zugrunde:

Für das BSP soll eine Cobb-Douglas-Funktion gelten:

$$1) \quad b(t) = \overline{T} k(t)^{\frac{1}{3}} \cdot \overline{L} \ell(t)^{\frac{2}{3}}$$

Die Änderungsrate des Kapitals ist proportional zum BSP:

$$2) \quad k'(t) = 0.4 \cdot b(t)$$

Die Arbeitskapazität wächst exponentiell:

$$3) \quad \ell(t) = e^{0.04t}$$

Aus 1) und 2) ergibt sich zunächst: $k'(t) = 0.4 \cdot \overline{T} k(t)^{\frac{1}{3}} \cdot \overline{L} \ell(t)^{\frac{2}{3}}$

Einsetzen von 3 liefert die DGL:

$$k' = 0.4 \cdot \overline{T} k^{\frac{1}{3}} \cdot e^{0.02 \cdot t} \quad \text{bzw.}$$

$$k' \cdot \frac{1}{\overline{T} k^{\frac{1}{3}}} = 0.4 \cdot e^{0.02t}, \quad \text{d.h. eine DGL mit getrennten Variablen}$$

$$\text{mit } h(k) = \frac{1}{\overline{T} k^{\frac{1}{3}}}, \quad g(t) = 0.4 \cdot e^{0.02t}; \quad H(k) = 2\overline{T} k^{\frac{2}{3}}, \quad G(t) = 20 \cdot e^{0.02t}$$

$$\text{Somit gilt: } 2\overline{T} k^{\frac{2}{3}} = 20 \cdot e^{0.02t} + C.$$

Geben wir die AB $k(0) = 10000$ vor, dann ergibt sich daraus:

$$2 \cdot 100 = 20 + C \Leftrightarrow C = 180$$

d.h. $k(t) = 100(e^{0.02t} + 9)^2$ als Lösung des AWP.

Mit 1) und 3) erhält man somit in diesem Fall für das BSP:

$$b(t) = 10(e^{0.02t} + 9) \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Typ: Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Dies ist eine DGL, die sich in der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

angeben lässt.

Lösungsmethode: Durch Substitution Zurückführung auf eine DGL mit getrennten Variablen

Allgemein funktioniert dies nun so:

Substitution: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ bzw. $y(x) = x \cdot z(x)$,

somit $y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)$, kurz: $y' = z + x \cdot z'$

Setzt man dies in die DGL ein, so erhält man

$$z + x \cdot z' = f(z)$$

Auflösen nach $\frac{1}{x}$ führt für $f(z) \neq z$ auf

$$z' \cdot \frac{1}{f(z) - z} = \frac{1}{x}, \text{ d.h. eine DGL vom Typ getrennte Variable}$$

mit $h(z) = \frac{1}{f(z) - z}$ und $g(x) = \frac{1}{x}$.

Da $G(x) = \ln|x|$ Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{x}$ ist, erhalten wir implizit als Lösung der aus der Substitution entstandenen DGL

$H(z) = \ln|x| + C$ mit H Stammfunktion von h .

Rücksubstitution: $z = \frac{y}{x}$ liefert dann die allgemeine Lösung

$H\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$ der Ähnlichkeits-DGL in impliziter Form.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösung des AWP $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$ mit $y(1) = \frac{1}{2}$.

1. Schritt: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der Ähnlichkeits-DGL

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3, x \neq 0. \text{ Hier ist } f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

Mit der Substitution $z = \frac{y}{x}$ bzw. $y = x \cdot z$, d.h. $y' = z + x z'$ folgt:

$$z + x z' = z + z^3, \text{ d.h. } f(z) = z + z^3.$$

Auflösen nach $\frac{1}{x}$ liefert für $z \neq 0$: $z' \cdot \frac{1}{z^3} = \frac{1}{x}$

Mit $H(z) = -\frac{1}{2z^2}$ Stammfunktion von $h(z) = \frac{1}{z^3}$ ergibt sich also:

$$-\frac{1}{2z^2} = \ln|x| + C$$

Rücksubstitution liefert: $-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y^2} = \ln|x| + C$

Auflösen nach y : $y^2 = \frac{x^2}{-2 \ln|x| - 2C}$

Somit ist $y = \pm \frac{x}{\sqrt{-2 \ln|x| - 2C}}$ mit $-2 \ln|x| - 2C > 0$

die allgemeine Lösung der DGL.

2. Schritt: Wir bestimmen die Lösung des AWP. Da nach der AB $y(1) = \frac{1}{2}$ sein soll, kommt nur $y = + \frac{x}{\sqrt{1-2\ln|x|-2C}}$ in Frage.

Es muss gelten: $y(1) = \frac{1}{\sqrt{1-2\ln 1 - 2C}} = \frac{1}{\sqrt{1-2C}} = \frac{1}{2}$, d.h. $C = -2$.

Also ist $y = \frac{x}{\sqrt{4-2\ln|x|}}$, $x \in (-e^2, e^2)$ Lösung des AWP.

Beispiel: Wir bestimmen alle Funktionen y , deren Elastizität $El y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} \cdot x$ konstant ist, d.h. wir lösen die DGL $\frac{y'}{y} \cdot x = a$ bzw. umgeformt $y' = a \cdot \frac{y}{x}$.

Im Prinzip handelt es sich wieder um eine Ähnlichkeits-DGL, die aber (wegen ihrer Einfachheit) sofort in eine DGL mit getrennten Variablen überführt werden kann, nämlich: $y' \cdot \frac{1}{y} = a \cdot \frac{1}{x}$, d.h.

$h(y) = \frac{1}{y}$, $g(x) = a \cdot \frac{1}{x}$; $H(y) = \ln|y|$, $G(x) = a \cdot \ln|x|$.

Somit ist $\ln|y| = a \cdot \ln|x| + C$.

Auflösen nach y : $|y| = |x|^a \cdot e^C$

d.h. für $x > 0$: $y = C^* \cdot x^a$

Dies ist eine Funktion vom Cobb-Douglas Typ von einer Variablen.

Typ: Lineare DGL 1. Ordnung

Dies ist eine DGL der Form

$$y' + p(x)y = r(x),$$

wobei p und r in einem Intervall stetige Funktionen in der unabhängigen Variablen x sind.

Ist $r(x) = 0$, dann heißt die lineare DGL **homogen**, sonst **inhomogen**.

Lösungsmethode: Wir bezeichnen mit $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ und multiplizieren die DGL auf beiden Seiten mit $e^{P(x)} \neq 0$. Dies liefert zunächst:

$$e^{P(x)} \cdot y' + p(x) \cdot e^{P(x)} y = r(x) \cdot e^{P(x)}$$

Nach der Kettenregel steht nun auf der linken Seite gerade $\frac{d}{dx}(e^{P(x)} \cdot y(x))$, d.h.

$$\frac{d}{dx}(e^{P(x)} \cdot y(x)) = r(x) \cdot e^{P(x)}$$

Integration der DGL liefert:

$$e^{P(x)} \cdot y(x) = \int r(x) \cdot e^{P(x)} dx$$

Dividiert man nun noch die Gleichung durch $e^{P(x)}$, so erhält man die allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-P(x)} \int r(x) \cdot e^{P(x)} dx \text{ mit } P \text{ Stammfunktion von } p.$$

$$\text{Spezialfall: } r(x) = 0 \text{ (homogener Fall)} \quad y(x) = C \cdot e^{-P(x)}$$

Beispiel: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + x y = x, \text{ d.h. } p(x) = x, r(x) = x$$

Mit $P(x) = \frac{1}{2} x^2$ gilt:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \int x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \int e^u du$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} (e^u + C)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} (e^{\frac{1}{2}x^2} + C)$$

$$= 1 + C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{Substitution: } u = \frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{du}{dx} = x, \text{ d.h. } x \cdot dx = du$$

Beispiel: Wir suchen die Lösung des AWP

$$y' + \frac{1}{t} y = \frac{1}{t^3}, \quad y(2) = \frac{3}{4}.$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der DGL

$$y' + \frac{1}{t} y = \frac{1}{t^3}, \text{ d.h. } p(t) = \frac{1}{t}, r(t) = \frac{1}{t^3}$$

Mit $P(t) = \ln|t|$ gilt:

$$y(t) = e^{-\ln|t|} \int \frac{1}{t^3} e^{\ln|t|} dt$$

$$= \frac{1}{|t|} \int \frac{|t|}{t^3} dt$$

1. Fall: $t > 0$. Dann ist

$$y(t) = \frac{1}{t} \int \frac{t}{t^3} dt = \frac{1}{t} \int t^{-2} dt = \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{t} + C \right) = -\frac{1}{t^2} + \frac{C}{t}$$

2. Fall: $t < 0$. Dann ist

$$y(t) = -\frac{1}{t} \int \frac{-t}{t^3} dt = \frac{1}{t} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t^2} + \frac{C}{t}$$

Somit ist $y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{C}{t}$, $t \neq 0$, die allgemeine Lösung der DGL.

Einsetzen der AB:

$$y(2) = -\frac{1}{4} + \frac{C}{2} = \frac{3}{4}, \text{ also } C = 2.$$

Somit löst $y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}$ das AWP.

Beispiel: Sei $N(p) = a - bp$ die Nachfrage- und $A(p) = \alpha + \beta p$ die Angebotsfunktion für ein Gut in Abhängigkeit vom Preis p ; a, b, α, β positive Konstanten. Der Preis p variere mit der Zeit t und die momentane Änderungsrate von $p(t)$ sei proportional zum Nachfrageüberschuss $N(p) - A(p)$, d.h. $\frac{d}{dt} p(t) = \lambda (N(p) - A(p))$, λ positive Konstante. Mit den Gleichungen für $N(p)$ und $A(p)$ erhalten wir daraus die lineare DGL 1. Ordnung

$$p' = \lambda(a - bp - \alpha - \beta p) \Leftrightarrow p' + \lambda(b + \beta)p = \lambda(a - \alpha)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} p(t) &= e^{-\lambda(b+\beta)t} \int \lambda(a-\alpha) \cdot e^{\lambda(b+\beta)t} dt \\ &= e^{-\lambda(b+\beta)t} \cdot \lambda(a-\alpha) \cdot \frac{1}{\lambda(b+\beta)} (e^{\lambda(b+\beta)t} + C) \\ &= \frac{a-\alpha}{b+\beta} (1 + C \cdot e^{-\lambda(b+\beta)t}) \end{aligned}$$

Da $\lambda(b+\beta) > 0$ nach Voraussetzung, gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Dies ist gerade der Gleichgewichtspreis, d.h. der Preis, bei dem Angebot und Nachfrage übereinstimmen: $N(p) = A(p) \Leftrightarrow p = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Beispiel: Modell für volkswirtschaftliches Wachstum

$x(t)$ sei das Gesamt-Bruttoinlandsprodukt pro Jahr, $k(t)$ der Kapitalbestand, $h(t)$ der Netto-Zustrom ausländischer Investitionen pro Jahr und $n(t)$ die Größe der Bevölkerung. Alle Größen sind abhängig von der Zeit t .

Wir treffen folgende Annahmen

1) $x(t) = 0.2 \cdot k(t)$ (BIP proportional zum Kapitalbestand)
 (durchschnittliche Produktivität des Kapitals)

2) $k'(t) = 0.1 x(t) + h(t)$ (Kapitalwachstum: Summe Anteile aus BIP und Netto-Auslandsinvestitionen)
 (Sparquote)

3) $n(t) = 50 \cdot e^{0.03t}$ (Konstantes relatives Bevölkerungswachstum $\frac{n'(t)}{n(t)}$)

4) $h(t) = 10 \cdot e^{0.04t}$ (Konstantes relatives Wachstum des Netto-Zustroms ausländischer Investitionen)

Aufgabe: a) Herleitung einer DGL für $k(t)$

b) Lösen der DGL mit der AB $k(0) = 200$

c) Berechnen des BIP pro Kopf, d.h. $\frac{x(t)}{n(t)}$.

a) Mit 1) 2) und 4) erhalten wir die DGL

$$k'(t) = 0.1 \cdot 0.2 k(t) + 10 \cdot e^{0.04t} \Leftrightarrow k'(t) - 0.02 k(t) = 10 \cdot e^{0.04t}$$

b) Für die allgemeine Lösung der DGL erhalten wir mit der Stammfunktion

$$-0.02t \text{ von } -0.02 : k(t) = e^{0.02t} \int 10 \cdot e^{0.04t} \cdot e^{-0.02t} dt$$

$$= 10 e^{0.02t} \int e^{0.02t} dt$$

$$= 10 e^{0.02t} \left(\frac{1}{0.02} e^{0.02t} + C \right) = 500 e^{0.04t} + 10C e^{0.02t}$$

Mit der AB folgt: $k(0) = 500 + 10C = 200$, d.h. $C = -30$

Somit löst $k(t) = 500 \cdot e^{0.04t} - 300 e^{0.02t}$ das AWP.

c) Für das Bruttoinlandsprodukt pro Kopf berechnet man:

$$\frac{x(t)}{n(t)} = \frac{0.2 \cdot k(t)}{50 \cdot e^{0.03t}} = 2 \cdot e^{0.01t} - 1.2 \cdot e^{-0.01t}$$

Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bei den DGL betrachten wir nur den speziellen

Typ: Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dies ist eine DGL der Form

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x), \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

Ist $r(x) = 0$, so heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.