

Beispiel: Wir betrachten noch einmal das Problem

$$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 + 2x_3^2 + x_2x_3 - x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 5$$

$$\text{so dass } g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4 = 0$$

Die zugehörige Lagrangefunktion lautet:

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 + 2x_3^2 + x_2x_3 - x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 5 \\ - \lambda_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1) - \lambda_2(2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4)$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -1 - \lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2 + x_3 + 4 + \lambda_1 + 4\lambda_2$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_3 + x_2 - 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$L_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2 + \lambda_1 - \lambda_2$$

$$L_{\lambda_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1)$$

$$L_{\lambda_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -(2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4)$$

In diesem Beispiel ergibt das Nullsetzen der partiellen Ableitungen ein lineares Gleichungssystem; in Matrix-Vektor-Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lässt sich z.B. mit dem Gauß-Algorithmus berechnen. Sie lautet:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \left(-\frac{2}{21}, -\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{34}{21}, 1, -1\right)$$

Außerdem gilt:

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = -\frac{2}{7}$$

Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = J(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*).$$

Offensichtlich ist $\text{Rg}(J(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)) = 2$, da z.B. der 1. und 4. Spaltenvektor linear unabhängig sind. Die Rangbedingung ist also erfüllt.

Ergänzung: Gauß-Algorithmus (schematisch) zur Lösung des Gleichungssystems

1	-1	1	-1	0	0	-1	①	Rückwärtsauflösen
-2	4	-2	-1	0	0	-4		aus ⑥: $-3\lambda_2 = 3 \Leftrightarrow \lambda_2 = -1$
0	2	1	0	1	4	-4		aus ⑤: $\lambda_1 = -1 - 2\lambda_2$
0	1	4	0	-1	-2	1		mit $\lambda_2 = -1$: $\lambda_1 = 1$
0	0	0	0	-1	-2	1		aus ④: $-\frac{21}{2}x_4 = -4 + 5\lambda_1 + 18\lambda_2$
0	0	0	0	1	-1	2		mit $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$: $x_4 = \frac{34}{21}$
2	0	-3	0	0		-6	②	aus ③: $x_3 = 2 - 3x_4 - \lambda_1 - 4\lambda_2$
2	1	0	1	4		-4		mit $\lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1, x_4 = \frac{34}{21}$:
1	4	0	-1	-2		1		$x_3 = \frac{1}{7}$
			-1	-2		1	⑤	aus ②: $2x_2 = -6 + 3x_4$
			-3			3	⑥	mit $x_4 = \frac{34}{21}$: $x_2 = -\frac{4}{7}$
1	3	1	4			2	③	aus ①: $x_1 = -1 + x_2 - x_3 + 4$
4	$\frac{3}{2}$	-1	-2			4		mit $x_2 = -\frac{4}{7}, x_3 = \frac{1}{7}, x_4 = \frac{34}{21}$:
								$x_1 = -\frac{2}{21}$
$-\frac{21}{2}$	-5	-18				-4	④	

Beispiel: Ein Verbraucher bestimmt seinen Nutzen mit Hilfe einer Cobb-

Douglas-Nutzenfunktion $U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3$ mit $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Er unterliegt der Budgetbeschränkung $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

Wie soll er x_1, x_2, x_3 wählen, damit sein Nutzen maximal wird?

Das zugehörige Optimierungsproblem lautet:

$$\max U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3$$

$$\text{so dass } g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$$

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda) = x_1^2 x_2^3 x_3 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 12)$$

Die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion lauten:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 2x_1 x_2^3 x_3 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 3x_1^2 x_2^2 x_3 - \lambda$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = x_1^2 x_2^3 - \lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = -(x_1 + x_2 + x_3 - 12)$$

Wir erhalten somit die Bedingungen:

$$1) 2x_1 x_2^3 x_3 = \lambda$$

$$2) 3x_1^2 x_2^2 x_3 = \lambda$$

$$3) x_1^2 x_2^3 = \lambda$$

$$4) x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

Wir können in diesem Beispiel ohne Einschränkung voraussetzen, dass x_1, x_2, x_3 alle von Null verschieden ist, da sonst der Nutzen gleich Null und somit sicher nicht maximal ist.

Gleichsetzen von 1) und 2) liefert: $2x_1 x_2^3 x_3 = 3x_1^2 x_2^2 x_3 \quad | : 2x_1 x_2^2 x_3 \neq 0$

$$\text{I) } x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

Gleichsetzen von 1) und 3) liefert: $2x_1 x_2^3 x_3 = x_1^2 x_2^3 \quad | : 2x_1 x_2^3 \neq 0$

$$\text{II) } x_3 = \frac{1}{2}x_1$$

Einsetzen von I) und II) in 4) liefert: $x_1 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_1 = 12 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 4}$

Einsetzen von $x_1 = 4$ in I) und II) liefert: $\underline{x_2 = 6}, \underline{x_3 = 2}$

Einsetzen von $x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 2$ in 1), 2) bzw. 3) liefert: $\underline{\lambda = 3456}$

Für die Jacobi-Matrix gilt: $J(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) = J(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, also ist die Rangbedingung $\text{Rg}(J(x_1^*, x_2^*, x_3^*)) = 1$ erfüllt.

Die einzige mögliche (lokale) Extremalstelle von f unter der Budgetbeschränkung ist somit $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (4, 6, 2)$.

Da der durch die Budgetbeschränkung beschriebene Bereich eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist, hat f dort ein absolutes Maximum. Für $(4, 6, 2)$ wird also der Nutzen unter der Budgetbeschränkung maximal mit $U(4, 6, 2) = 4^2 \cdot 6^3 \cdot 2 = 6912$.

Wir werden nun das letzte Beispiel etwas allgemeiner betrachten, um damit einige weitere Begriffe und Zusammenhänge erläutern zu können.

Beispiel: Die Aufgabenstellung sei wie im letzten Beispiel. Für die Budgetbeschränkung verwenden wir allerdings allgemeiner die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = m \text{ mit dem Einkommen } m > 0.$$

Das zugehörige Optimierungsproblem lautet dann

$$\max U(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3$$

$$\text{so dass } g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - m = 0$$

Es ist zu erwarten, dass die Optimallösung vom Einkommen m abhängig ist, was durch die folgende Rechnung bestätigt wird.

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda) = x_1^2 x_2^3 x_3 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - m)$$

Die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion sind:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 2x_1 x_2^3 x_3 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = 3x_1^2 x_2^2 x_3 - \lambda$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = x_1^2 x_2^3 - \lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2, x_3; \lambda) = -(x_1 + x_2 + x_3 - m)$$

Wir erhalten somit die Bedingungen: 1) $2x_1 x_2^3 x_3 = \lambda$

$$2) 3x_1^2 x_2^2 x_3 = \lambda$$

$$3) x_1^2 x_2^3 = \lambda$$

$$4) x_1 + x_2 + x_3 = m$$

Das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems geschieht völlig analog zum letzten Beispiel. Es ergibt sich die von m abhängige Lösung:

$$x_1^*(m) = \frac{1}{3}m, \quad x_2^*(m) = \frac{1}{2}m, \quad x_3^*(m) = \frac{1}{6}m, \quad \lambda^*(m) = \frac{1}{72}m^5$$

Setzt man dies nun in die Nutzenfunktion ein, so erhält man die von m abhängige Funktion

$$\tilde{U}(m) = \frac{1}{432} \cdot m^6 = U(x_1^*(m), x_2^*(m), x_3^*(m))$$

Die Funktion $\tilde{U}$ heißt Optimalwertfunktion des Problems. Es gilt:

$$\frac{d}{dm} \tilde{U}(m) = \frac{1}{72} m^5 = \lambda^*(m)$$

Damit gibt der Lagrange-Multiplikator $\lambda^*(m)$ die momentane Rate an, mit der sich der optimale Wert der Nutzenfunktion ändert, wenn sich das Einkommen m ändert.

Die lineare Approximation von $\tilde{U}$ an einer Stelle $\tilde{m}$ ist (vgl. Analysis I):

$$t_1(m) = \tilde{U}(\tilde{m}) + \frac{d}{dm} \tilde{U}(\tilde{m}) \cdot (m - \tilde{m})$$

$$= \tilde{U}(\tilde{m}) + \lambda^*(\tilde{m}) \cdot (m - \tilde{m}) \approx \tilde{U}(m),$$

wenn m nahe bei $\tilde{m}$ ist. Anders ausgedrückt ist dann

$$\tilde{U}(m) - \tilde{U}(\tilde{m}) \approx \lambda^*(\tilde{m}) \cdot (m - \tilde{m}).$$

Für $m = \tilde{m} + 1$ bedeutet dies speziell:

$$\tilde{U}(\tilde{m} + 1) - \tilde{U}(\tilde{m}) \approx \lambda^*(\tilde{m}).$$

$\lambda^*(\tilde{m})$ gibt also näherungsweise an, um wie viel sich der Nutzen ändert, wenn $\tilde{m}$ um 1 erhöht wird.

In der Ökonomie heißt λ^* auch Schattenpreis.

Wir betrachten die Zusammenhänge nun an einem allgemeinen Optimierungsproblem der Form:

$$\min (\max) f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{so dass } g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Für die Restriktionen g_i schreiben wir:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

mit Konstanten c_i .

Außerdem setzen wir voraus, dass alle Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind.

Lösungen der notwendigen Bedingungen, die sich aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion ergeben, werden nun im Allgemeinen von $c_1, c_2, \dots, c_m$ abhängen.

Ist $x_j^*(c_1, c_2, \dots, c_m)$, $j = 1, \dots, n$, $\lambda_i^*(c_1, c_2, \dots, c_m)$, $i = 1, \dots, m$, eine solche Lösung, so erhält man durch Einsetzen in die Zielfunktion f eine Funktion $\tilde{f}$, die von $c_1, c_2, \dots, c_m$ abhängt:

$$\tilde{f}(c_1, c_2, \dots, c_m) = f(x_1^*(c_1, c_2, \dots, c_m), \dots, x_n^*(c_1, c_2, \dots, c_m))$$

Die so entstehende Funktion heißt Optimalwertfunktion.

Der optimale Wert der Zielfunktion ändert sich in Abhängigkeit von der Wahl der Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_m$ in den Restriktionen.

Es gilt nun allgemein folgender Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial c_\ell} \tilde{f}(c_1, c_2, \dots, c_m) = \lambda_\ell^*(c_1, c_2, \dots, c_m)$$

Für interessierte Studierende wird dies im Folgenden nachgewiesen.

Für den Beweis benötigt man insbesondere die allgemeine Kettenregel!

Aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_i]$$

nach der Variablen x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, folgt zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \quad (*)$$

Für die partiellen Ableitungen von $f(x_1^*(c_1, \dots, c_m), \dots, x_n^*(c_1, \dots, c_m))$ nach c_ℓ gilt mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c_\ell} \tilde{f}(c_1, \dots, c_m) &= \frac{\partial}{\partial c_\ell} f(x_1^*(c_1, \dots, c_m), \dots, x_n^*(c_1, \dots, c_m)) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot \frac{\partial}{\partial c_\ell} x_j^*(c_1, \dots, c_m) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot \frac{\partial}{\partial c_\ell} x_j^*(c_1, \dots, c_m) \\
&\stackrel{\text{Einsetzen von } (*)}{=} \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot \frac{\partial}{\partial c_\ell} x_j^*(c_1, \dots, c_m) \quad (*)_2
\end{aligned}$$

Differenziert man die durch die Restriktionen gegebenen Gleichungen $h_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = c_i$ auf beiden Seiten partiell nach c_ℓ , so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c_\ell} h_i(x_1^*, \dots, x_n^*) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \cdot \frac{\partial}{\partial c_\ell} x_j^*(c_1, \dots, c_m) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } i = \ell \\ 0, & \text{falls } i \neq \ell \end{cases}
\end{aligned}$$

Setzt man dies nun in die Gleichung $(*)_2$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial c_\ell} \tilde{f}(c_1, \dots, c_m) = \lambda_\ell^*(c_1, \dots, c_m), \text{ d.h. die Behauptung.}$$

Die Formel $\frac{\partial}{\partial c_\ell} \tilde{f}(c_1, \dots, c_m) = \lambda_\ell^*(c_1, \dots, c_m)$ zeigt:

Der Lagrange-Multiplikator $\lambda_i^*(c_1, \dots, c_m)$ für die i -te Nebenbedingung ist die momentane Rate, mit der sich der Optimalwert der Zielfunktion ändert, wenn sich die Konstante c_i in der i -ten Restriktion ändert.

Wir betrachten wieder die lineare Approximation von $\tilde{f}$ um $(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m)$,

$$\begin{aligned}
\text{d.h. } t(c_1, \dots, c_m) &= \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) + \langle \text{grad } \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m), \begin{pmatrix} c_1 - \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ c_m - \tilde{c}_m \end{pmatrix} \rangle \\
&= \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial c_i} \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) \cdot (c_i - \tilde{c}_i) \\
&= \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^*(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) \cdot (c_i - \tilde{c}_i) \\
&\approx \tilde{f}(c_1, \dots, c_m),
\end{aligned}$$

wenn $(c_1, \dots, c_m)$ nahe bei $(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m)$ ist. Dann ist also

$$\tilde{f}(c_1, \dots, c_m) - \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i^*(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) \cdot (c_i - \tilde{c}_i)$$

Für $c_\ell = \tilde{c}_\ell + 1$, $c_i = \tilde{c}_i$ für $i \neq \ell$ ergibt sich daraus speziell:

$$\tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{\ell-1}, \tilde{c}_\ell + 1, \tilde{c}_{\ell+1}, \dots, \tilde{c}_m) - \tilde{f}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) \approx \lambda_\ell^*(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m) \quad (*)$$

$\lambda_\ell^*(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m)$ gibt also an, um wie viel sich der Optimalwert ungefähr ändert, wenn $\tilde{c}_\ell$ um 1 Einheit erhöht wird.

In der Ökonomie heißt λ_ℓ^* auch Schattenpreis, der einer Einheit der Ressource ℓ zugeschrieben wird.

Beispiel: Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{so dass } g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3 - c_1 = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 - c_2 = 0$$

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + 2x_2 + x_3 - c_1) - \lambda_2(2x_1 - x_2 - 3x_3 - c_2)$$

Partielle Ableitungen:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$L_{x_3}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_3 - \lambda_1 + 3\lambda_2$$

$$L_{\lambda_1}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = -(x_1 + 2x_2 + x_3 - c_1)$$

$$L_{\lambda_2}(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2) = -(2x_1 - x_2 - 3x_3 - c_2)$$

Nullsetzen der partiellen Ableitungen liefert:

$$1) 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$2) 2x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$3) 2x_3 - \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$4) x_1 + 2x_2 + x_3 = c_1$$

$$5) 2x_1 - x_2 - 3x_3 = c_2$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das sich z.B. mit dem Gauß-Algorithmus lösen lässt.

$$\rightarrow \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & c_2 \end{array} \left[\begin{array}{l} (-\frac{1}{2}) \\ (-1) \end{array} \right]$$

Rückwärtsauflösen liefert:

$$\lambda_2^* = \frac{2}{25} c_1 + \frac{4}{25} c_2$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & c_1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & c_2 & 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} (-1) \\ (\frac{1}{2}) \end{array} \right]$$

$$\lambda_1^* = \frac{28}{75} c_1 + \frac{2}{25} c_2$$

$$x_3^* = \frac{1}{15} c_1 - \frac{1}{5} c_2$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 3 & 0 & c_1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \frac{5}{2} & c_2 & 0 & 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} (-\frac{1}{2}) \\ (\frac{3}{2}) \end{array} \right]$$

$$x_2^* = \frac{1}{3} c_1$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccccc} 3 & -\frac{3}{2} & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 7 & c_2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left[\begin{array}{l} (\frac{1}{2}) \end{array} \right]$$

$$x_1^* = \frac{4}{15} c_1 + \frac{1}{5} c_2$$

$$\rightarrow \frac{25}{4} \quad \frac{1}{2} c_1 + c_2$$

Die Optimalwertfunktion ergibt sich durch Einsetzen von x_1^* , x_2^* , x_3^* in f zu:

$$\tilde{f}(c_1, c_2) = \frac{14}{75} c_1^2 + \frac{2}{25} c_1 c_2 + \frac{2}{25} c_2^2.$$

Man bestätigt leicht den oben allgemein aufgestellten Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \tilde{f}(c_1, c_2) = \frac{28}{75} c_1 + \frac{2}{25} c_2 = \lambda_1^*(c_1, c_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \tilde{f}(c_1, c_2) = \frac{2}{25} c_1 + \frac{4}{25} c_2 = \lambda_2^*(c_1, c_2)$$

Wählen wir z.B. $c_1 = 30$, $c_2 = 10$, so erhalten wir

$$\tilde{f}(30, 10) = 200, \quad \lambda_1^*(30, 10) = 12, \quad \lambda_2^*(30, 10) = 4.$$

Mit (*) auf S. 18 erhält man z.B.:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(31, 9) - \tilde{f}(30, 10) &\approx \lambda_1^*(30, 10) \cdot (31 - 30) + \lambda_2^*(30, 10) \cdot (9 - 10) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Zum Vergleich die exakten Werte:

$$\tilde{f}(31, 9) - \tilde{f}(30, 10) = \frac{15614}{75} - 200 = \frac{614}{75} = 8.18 \overline{6}$$