

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir nun wichtige Definitionen und Ergebnisse auf Funktionen von n Variablen erweitern.

Zunächst verallgemeinern wir die Begriffe offene, abgeschlossene, beschränkte und unbeschränkte Mengen, innere Punkte und Randpunkte.

Definition: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- 1) $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in S$ heißt innerer Punkt von S , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass alle Punkte von $U_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2\}^{1/2} < \varepsilon\}$ in S liegen.
- 2) S heißt offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.
- 3) $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von S , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ sowohl Punkte, die zu S gehören, als auch Punkte, die nicht zu S gehören, enthält.
- 4) S heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus S$ offen ist.
- 5) S heißt beschränkt, wenn es eine hinreichend große Kugel gibt, die S enthält.

Auch die Definition globaler und lokaler Extrema ist analog zum Fall von Funktionen von zwei Variablen.

Definition: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D_f$.

1) Globale Extrema

- a) f hat an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ein globales Minimum $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$.
- b) f hat an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ein globales Maximum $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$.

2) Lokale Extrema

- a) f hat an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ein lokales Minimum $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \cap D_f$.

b) f hat an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ein lokales Maximum $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U_\varepsilon(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \cap D_f$.

Die Verallgemeinerung des hinreichenden Kriteriums für die Existenz globaler Extrema lautet:

Satz: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D_f , wobei $D_f \neq \emptyset$, D_f abgeschlossen und beschränkt sein soll. Dann existiert (mindestens) ein $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D_f$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in D_f$, in dem f ein Maximum besitzt, d. h. für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$ gilt $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$.

Wie auch bei Funktionen von zwei Variablen ist es im allgemeinen Fall wichtig, notwendige und hinreichende Kriterien für lokale Extrema unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zur Verfügung zu haben. Wir befassen uns zunächst wieder mit notwendigen Bedingungen.

Notwendige Bedingung für relative Extrema

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell stetig differenzierbar. Weiter besitze f an einer Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ im Inneren von D_f ein relatives Extremum.

Dann gilt: $\text{grad } f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \vec{0}$

Stellen $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, für die die notwendige Bedingung erfüllt ist, heißen stationäre Punkte.

Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3) = 25 - 4x_1^2 - 8x_1x_3 - (1-x_2)^2 - x_3^4$.

Wir bestimmen die stationären Punkte.

Es gilt $\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -8(x_1 + x_3) \\ 2(1 - x_2) \\ -4(2x_1 + x_3^3) \end{pmatrix}$

Die notwendige Bedingung $\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}$ liefert also das nicht-lineare Gleichungssystem

$$1) \ x_1 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_3$$

$$2) \ 1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1$$

$$3) \ 2x_1 + x_3^3 = 0$$

x_1 ist durch 2) eindeutig festgelegt: $x_2 = 1$

Einsetzen von $x_1 = -x_3$ aus 1) in 3) liefert

$$3)' \ -2x_3 + x_3^3 = 0 \Leftrightarrow x_3(-2 + x_3^2) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \vee x_3 = -\sqrt{2} \vee x_3 = \sqrt{2}$$

Die zugehörigen x_1 -Werte erhält man nun durch Einsetzen der verschiedenen x_3 in 1).

Insgesamt besitzt also f die drei stationären Punkte

$$P_1(0, 1, 0), \ P_2(\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}), \ P_3(-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$$

Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3) = 3 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2 + 4x_3$.

Wir bestimmen die stationären Punkte von f .

Es gilt:

$$\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2(x_1 + x_2 + x_3) \\ -2(x_1 + 2x_2 - 2) \\ -2(x_1 + 3x_3 - 2) \end{pmatrix}$$

Die notwendige Bedingung $\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \vec{0}$ liefert also das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1 + 3x_3 = 2$$

Da f eine quadratische Funktion ist, erhält man hier ein **lineares** Gleichungssystem, das sich einfach z.B. mit der Cramerschen Regel lösen lässt. Die eindeutig bestimmte Lösung ist $x_1 = -10$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$.

$P(-10, 6, 4)$ ist somit einziger stationärer Punkt.

Analog zum Fall der Funktionen von zwei Variablen gilt nun folgendes Kriterium, das eine hinreichende Bedingung dafür liefert, dass an einem stationären Punkt ein lokales Extremum vorliegt.

Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ aus dem Inneren von D_f ein stationärer Punkt von f . Dann gilt:

- Ist $H_f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ positiv definit, dann besitzt f an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ein (strikt) lokales Minimum.
- Ist $H_f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ negativ definit, dann besitzt f an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ein (strikt) lokales Maximum.

Zur Überprüfung der Definitheitseigenschaften der Hesse-Matrix lässt sich gut das Hurwitz-Kriterium (vgl. Lineare Algebra) verwenden.

Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3) = 3 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2 + 4x_3$.

Wie wir bereits im letzten Beispiel gesehen haben, ist der Gradient

$$\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2(x_1 + x_2 + x_3) \\ -2(x_1 + 2x_2 - 2) \\ -2(x_1 + 3x_3 - 2) \end{pmatrix} \text{ und } P(-10, 6, 4) \text{ stationärer Punkt.}$$

Die Hesse-Matrix ist

$$H_f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} = H_f(-10, 6, 4).$$

Es gilt:

$$-2 < 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Somit ist $H_f(-10, 6, 4)$ nach dem Hurwitz-Kriterium negativ definit. Also besitzt f an der Stelle $(-10, 6, 4)$ ein lokales Maximum.

Auch für Funktionen von mehreren Variablen ist die Untersuchung konvexer Funktionen auf konvexen Mengen insbesondere auch im Zusammenhang mit vielen Optimierungsproblemen interessant. Dies wird im Rahmen dieser Vorlesung allerdings nicht weiter behandelt.