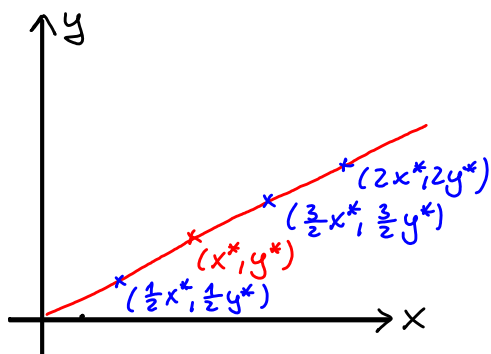
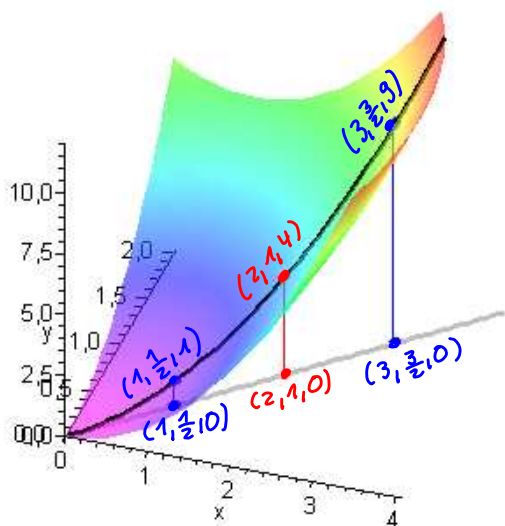




Die Gleichung für den Strahl ist $y = \frac{y^*}{x^*} \cdot x$, $x \geq 0$. Also lässt sich jeder Punkt auf diesem Strahl durch (tx^*, ty^*) mit einem geeigneten $t > 0$ beschreiben. Jeder Funktionswert $f(tx^*, ty^*)$ mit $(tx^*, ty^*) \in \mathbb{D}_f$ ergibt sich wegen der Homogenität von f direkt aus $f(x^*, y^*)$ zu $f(tx^*, ty^*) = t^k f(x^*, y^*)$. Die zu dem Strahl gehörenden Punkte des Funktionsgraphen haben also alle die Gestalt $(tx^*, ty^*, t^k f(x^*, y^*))$. Der Graph einer homogenen Funktion von zwei Variablen ist also vollständig bekannt, wenn ihr Wert in jeweils **einem Punkt** auf **jedem Ursprungsstrahl** bekannt ist.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$, die homogen vom Grad 2 ist. Für $x^* = 2$, $y^* = 1$ ist $f(x^*, y^*) = 4$.

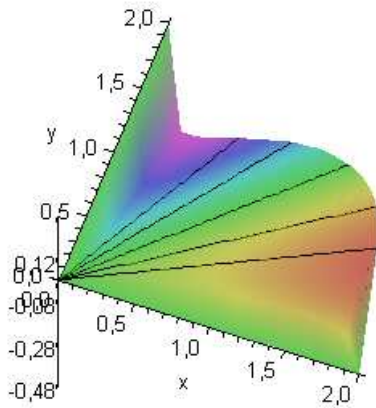


Alle Punkte des Funktionsgraphen, die zu einem Punkt auf dem Ursprungsstrahl durch $(x^*, y^*) = (2, 1)$ in der xy -Ebene gehören, haben also die Koordinaten $(tx^*, ty^*, t^2 f(x^*, y^*)) = (2t, t, 4t^2)$.

z. B. für $t = \frac{1}{2} : (1, \frac{1}{2}, 1)$
 $t = \frac{3}{2} : (3, \frac{3}{2}, 9)$

Ist insbesondere f homogen vom Grad 1, so ist jede Kurve auf dem Funktionsgraphen, die vertikal über einem Ursprungsstrahl in der xy -Ebene verläuft, ein Ursprungsstrahl im $\mathbb{R}^3$. Wir illustrieren dies an einem weiteren Beispiel.

Beispiel: Die Funktion $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$, $x, y \geq 0$, ist homogen vom Grad 1.

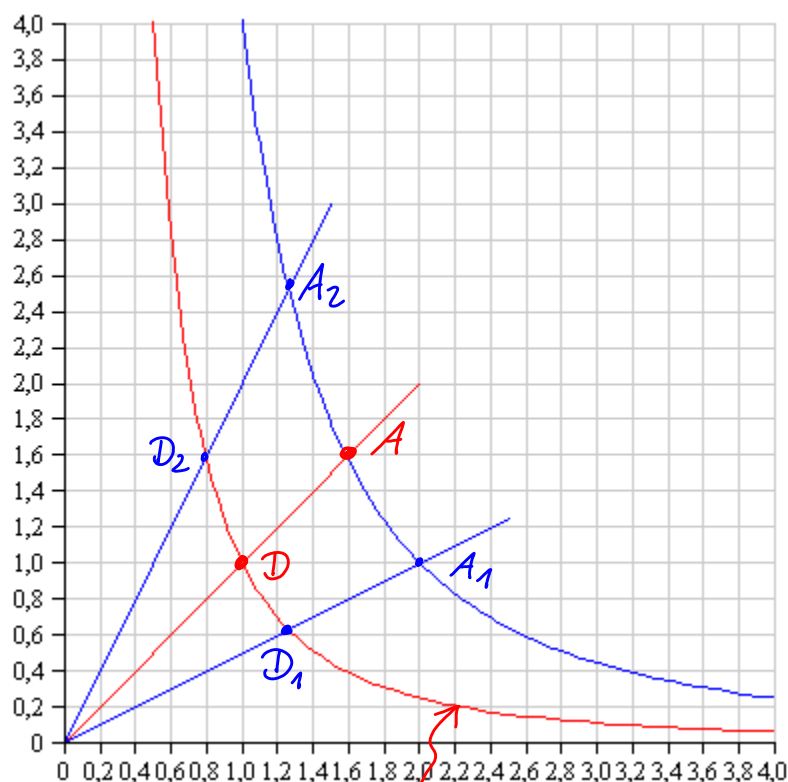


In der Graphik sieht man deutlich die Ursprungsstrahlen auf der durch die Funktionsvorschrift beschriebenen Fläche.

Insbesondere in Kapitel II haben wir gesehen, dass es oft nützlich ist, die Niveaulinien einer Funktion von zwei Variablen in der xy -Ebene zu skizzieren. Bei homogenen Funktionen kann man sich, wenn man eine Niveaulinie kennt, den Verlauf jeder anderen Niveaulinie erschliessen. Um zu sehen, wie das funktioniert, betrachten wir wieder eine homogene Funktion vom Grad k in zwei Variablen. Weiter sei $f(x,y) = c$ eine bekannte Niveaulinie und A ein Punkt, der nicht auf dieser Niveaulinie liegt. Wir konstruieren nun eine Niveaulinie zu f durch den Punkt A .

Vorgehensweise: Strahl durch den Ursprung und A zeichnen. Der Strahl schneidet die bekannte Niveaulinie im Punkt $D(x^*, y^*)$. A hat dann die Koordinaten (tx^*, ty^*) . t aus der Zeichnung (näherungsweise) ermitteln. Um weitere Punkte der Niveaulinie, auf der A liegt, zu ermitteln, weitere Ursprungsstrahlen zeichnen; Schnittpunkte mit der bekannten Niveaulinie ermitteln; mit dem vorher gefundenen t die Koordinaten der Punkte der Niveaulinie durch A bestimmen.

Beispiel: Wir erläutern die Vorgehensweise an der unten stehenden Graphik.



Die rot eingezeichnete Niveaulinie sei bekannt. Wir zeichnen den roten Ursprungsstrahl durch den Punkt A. Wir ermitteln die Koordinaten des Schnittpunktes D des Ursprungsstrahls mit der roten Niveaulinie: $(x^*, y^*) = (1, 1)$. Dann hat A die Koordinaten $(tx^*, ty^*) \approx (1.6, 1.6)$, t aus der Zeichnung ermittelt.

$$\text{bekannte Niveaulinie} \quad (|\overline{OD}| = |\overline{t\vec{z}}|, |\overline{OA}| = 1.6 \cdot |\overline{t\vec{z}}|)$$

Wir zeichnen zwei weitere Ursprungsstrahlen (blau) und ermitteln die Koordinaten der Schnittpunkte D_1, D_2 . Es ist ungefähr $D_1(1.25, 0.62)$, $D_2(0.8, 1.6)$. Mit dem vorher ermittelten $t \approx 1.6$ ermitteln wir nun die Koordinaten von A_1 und A_2 , die auf derselben Höhenlinie wie A liegen. Es ist ungefähr $A_1(2, 1)$, $A_2(1.28, 2.56)$.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Definition und wichtige Eigenschaften homogener Funktionen von n Variablen an.

Definition: Eine Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k, wenn für alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$ gilt:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ für alle } t > 0.$$

Der Grad k der Homogenität kann eine beliebige reelle Zahl sein.

Eulers Theorem: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ homogen vom Grad } k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = k \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Satz: Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grad k . Dann gilt unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen:

(1) $f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist homogen vom Grad $k-1$ für jedes $i=1, 2, \dots, n$

$$(2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f_{x_i x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = k(k-1) f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(3) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j^k f\left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right), x_j \neq 0, j=1, 2, \dots, n$$

Als Folgerung aus Eulers Theorem erhält man für $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^n \text{El}_{x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k.$$

Formel (2) ist für Funktionen von n Variablen in dieser Form recht unübersichtlich. Mit der Abkürzung $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ und der Bezeichnung $H_f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ für die Hesse-Matrix von f , lässt sich (2) viel kompakter in der leichter zu merkenden Form

$$(\tilde{2}) \quad \vec{x}^T H_f(\vec{x}) \vec{x} = k(k-1) f(\vec{x}) \text{ angeben.}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch einige Beispiele ökonomischer Anwendungen.

Beispiel: Es sei $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die den Output eines Produktionsprozesses in Abhängigkeit von n Inputgrößen $v_1, v_2, \dots, v_n$ beschreibt. Häufig trifft man die Annahme, dass z.B. eine Verdopplung der Inputgrößen zu einer Verdopplung des Outputs führt bzw. allgemein, dass eine Multiplikation aller Inputgrößen mit einem Faktor $t > 0$ zu einem t -fachen Output führt. Man trifft also die Annahme

$$Y(tv_1, tv_2, \dots, tv_n) = t Y(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ für alle } t > 0.$$

Anders ausgedrückt, setzt man Y als homogen vom Grad 1 voraus.

Beispiel: Auf dem Markt seien drei Güter mit Preisen p, q, r und Mengen x, y, z . Die Nachfrage nach einem dieser Güter durch einen Verbraucher sei $N(p, q, r, m)$, wobei m das Einkommen bezeichnet.

Die Budgetmenge des Verbrauchers sei:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : px + qy + rz \leq m, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Ändern sich nun alle Preise um einen Faktor $t > 0$ und gleichzeitig das Einkommen um denselben Faktor, dann wird die Budgetbeschränkung zu $tpx + tqy + trz \leq tm$, was aber äquivalent zu der vorigen Budgetbeschränkung. Man kann in dieser Situation daher annehmen, dass $N(tp, tq, tr, tm) = N(p, q, r, m)$ ist, d.h. dass die Nachfragefunktion N homogen vom Grad 0 ist.

Wenn alle Preise und gleichzeitig das Einkommen um 10% steigen, ändert sich die Nachfrage nicht.

Als Beispiel für eine solche Funktion betrachten wir

$$N(p, q, r, m) = \frac{m \cdot p^b}{p^{b+1} + q^{b+1} + r^{b+1}}, \quad b \text{ konstant.}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } N(tp, tq, tr, tm) &= \frac{tm (tp)^b}{(tp)^{b+1} + (tq)^{b+1} + (tr)^{b+1}} \\ &= \frac{\cancel{t^{b+1}} m p^b}{\cancel{t^{b+1}} (p^{b+1} + q^{b+1} + r^{b+1})} = N(p, q, r, m) \end{aligned}$$

Lineare Approximation

Bereits im letzten Semester hatten wir gesehen, wie man unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen eine Funktion von einer Variablen lokal, d.h. in der Nähe einer festen Stelle x_0 durch ein Polynom, das Taylorpolynom, annähern kann. Der einfachste Fall war dabei die lineare Approximation, d.h. die Näherung durch eine Funktion der Form $t_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ für eine Funktion $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die an einer festen Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ differenzierbar ist. Aus den Bedingungen, dass t_1 an der Stelle x_0 mit f im Funktionswert und der 1. Ableitung übereinstimmen soll, hatten wir die Darstellung

$$t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

hergeleitet. Dies ist gerade die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Wir werden dies nun zunächst für Funktionen von zwei Variablen verallgemeinern. Dazu betrachten wir eine Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die an einer festen Stelle $(x^*, y^*) \in D_f$ stetig partiell differenzierbar ist. In der Nähe von (x^*, y^*) soll f nun durch eine lineare Funktion, d.h. durch eine Funktion der Form $t(x, y) = a_0 + a_1(x - x^*) + a_2(y - y^*)$ approximiert werden. Dabei soll $t(x, y)$ an der Stelle (x^*, y^*) mit dem Funktionswert und den beiden partiellen Ableitungen übereinstimmen, es soll also gelten:

$$1) \quad t(x^*, y^*) = f(x^*, y^*) \Leftrightarrow a_0 = f(x^*, y^*)$$

$$2) \quad t_x(x^*, y^*) = f_x(x^*, y^*) \Leftrightarrow a_1 = f_x(x^*, y^*)$$

$$3) \quad t_y(x^*, y^*) = f_y(x^*, y^*) \Leftrightarrow a_2 = f_y(x^*, y^*)$$

Setzt man nun die erhaltenen Ausdrücke für a_0, a_1, a_2 in die oben angegebene allgemeine Form ein, so erhält man:

$$t(x, y) = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$= f(x^*, y^*) + \langle \text{grad } f(x^*, y^*), \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} \rangle$$

Geometrisch ist dies die Gleichung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$. Um eine konkretere Vorstellung von dieser Ebene zu gewinnen, halten wir noch einmal fest, dass t mit f an der Stelle (x^*, y^*) sowohl im Funktionswert, als auch im Anstieg in x - bzw. y -Richtung übereinstimmt. Wir untersuchen nun, wie die Situation bzgl. des Anstiegs in andere Richtungen aussieht. Unter den gegebenen Voraussetzungen wissen wir, dass für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{v}| = 1$ gilt:

$$\partial_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \vec{v}, \text{grad } f(x, y) \rangle$$

$$\partial_{\vec{v}} t(x, y) = \langle \vec{v}, \text{grad } t(x, y) \rangle$$

Da sich aus der Gleichung für $t(x,y)$ unmittelbar ergibt, dass

$$\text{grad } t(x,y) = \text{grad } f(x^*, y^*),$$

folgt:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(x^*, y^*) &= \langle \vec{v}, \text{grad } f(x^*, y^*) \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \text{grad } t(x^*, y^*) \rangle = \partial_{\vec{v}} t(x^*, y^*) \end{aligned}$$

t und f stimmen an der Stelle (x^*, y^*) also auch in allen Richtungsableitungen überein. Die durch t beschriebene Ebene verläuft tangential an den Graphen von $f(x,y)$. Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Lineare Approximation

Ist $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in $(x^*, y^*) \in \mathbb{D}_f$ stetig partiell differenzierbar, so ist die lineare Approximation gegeben durch

$$t(x,y) = f(x^*, y^*) + \langle \text{grad } f(x^*, y^*), \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} \rangle.$$

In der Nähe von (x^*, y^*) gilt $f(x,y) \approx t(x,y)$.

Die durch t beschriebene Ebene ist die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x^*, y^*, f(x^*, y^*))$.

Beispiel: Wir bestimmen die lineare Approximation von

$$f(x,y) = e^{x+y}(xy-1) \text{ um } (x^*, y^*) = (0,0).$$

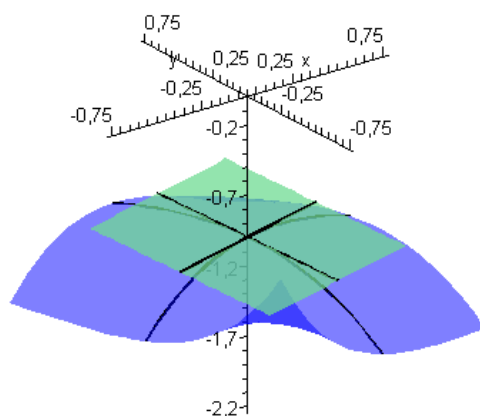
Es gilt:

$$f(0,0) = -1, \quad \text{grad } f(x,y) = e^{x+y} \begin{pmatrix} xy-1+y \\ xy-1+x \end{pmatrix}, \quad \text{grad } f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die lineare Approximation von f

um $(x^*, y^*) = (0,0)$ ist somit

$$\begin{aligned} t(x,y) &= -1 + \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle \\ &= -1 - x - y \end{aligned}$$



Beispiel: Wir bestimmen die lineare Approximation von

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} \text{ um } (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}\right).$$

Es ist $\mathbb{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, der Graph von f ist die obere Halbkugel um $(0,0,0)$ mit Radius 2.

$$\text{Es gilt: } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{grad } f(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

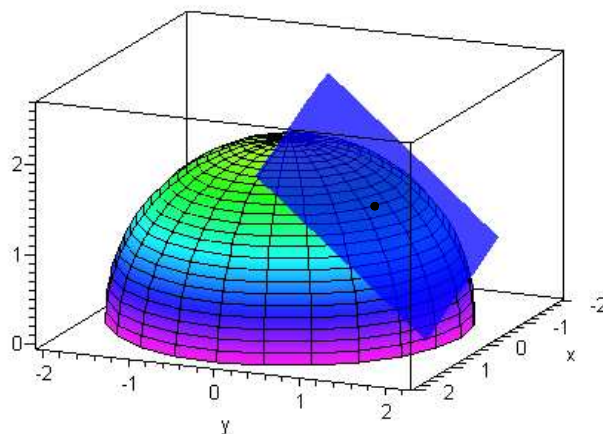
Die lineare Approximation

an f um $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$ ist also

$$t(x,y) = \frac{3}{2} + \left\langle -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}\left(y - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{\sqrt{6}}{3}y$$



Beispiel: Sei $f(x,y) = xy^3 - 2x^3$. Dann gilt $f(1,2) = 6$. Wir bestimmen mit Hilfe der linearen Approximation von f um $(1,2)$ Näherungswerte für $f(1.01, 2.01)$ und $f(0.99, 1.99)$.

$$\text{Es gilt: } \text{grad } f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 - 6x^2 \\ 3xy^2 \end{pmatrix}, \text{ grad } f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also ist } t(x,y) = 6 + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 + 2(x-1) + 12(y-2) = -20 + 2x + 12y.$$

Daraus ermittelt man:

$$t(1.01, 2.01) = -20 + 2 \cdot 0.01 + 12 \cdot 0.01 = 6.14 \approx f(1.01, 2.01) = 6.14120501$$

$$t(0.99, 1.99) = -20 + 2 \cdot (-0.01) + 12 \cdot (-0.01) = 5.86 \approx f(0.99, 1.99) = 5.86119501$$

Wir betrachten nun allgemein die lineare Approximation einer Funktion von n Variablen. Dazu sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar an einer festen Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{D}_f$. Die lineare Approximation der Form

$$t(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1(x_1 - x_1^*) + a_2(x_2 - x_2^*) + \dots + a_n(x_n - x_n^*)$$

soll mit f im Funktionswert, sowie allen partiellen Ableitungen an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ übereinstimmen, d.h. es soll gelten:

$$t(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \Leftrightarrow a_0 = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

$$t_{x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f_{x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), i=1, 2, \dots, n \Leftrightarrow a_i = f_{x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), i=1, 2, \dots, n$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} t(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + f_{x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)(x_1 - x_1^*) + f_{x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)(x_2 - x_2^*) \\ &\quad + \dots + f_{x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)(x_n - x_n^*) \\ &= f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)(x_i - x_i^*) \\ &= f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \langle \text{grad } f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

Auch hier kann man (analog zum Fall von zwei Variablen) wieder zeigen, dass t mit f an der Stelle $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ auch in jeder Richtungsableitung übereinstimmt. Wir fassen noch einmal zusammen.

Lineare Approximation

Ist $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ stetig partiell differenzierbar, so ist die lineare Approximation gegeben durch

$$t(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \langle \text{grad } f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \rangle$$

Für $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in der Nähe von $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ist $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx t(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Beispiel: Wir bestimmen die lineare Approximation von

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 x_4 - 2x_2 x_4^2 + x_3^3 x_4 - x_3^2 \quad \text{um } (2, 3, 1, 2).$$

$$\text{Es gilt: } f(2, 3, 1, 2) = -15,$$

$$\text{grad } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_4 \\ -2x_4^2 \\ 3x_3^2 x_4 - 2x_3 \\ x_1^2 - 4x_2 x_4 + x_3^3 \end{pmatrix}, \quad \text{grad } f(2, 3, 1, 2) = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit ist } t(x_1, x_2, x_3, x_4) = -15 + \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \\ -19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \\ x_3 - 1 \\ x_4 - 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -15 + 8(x_1 - 2) - 8(x_2 - 3) + 4(x_3 - 1) - 19(x_4 - 2) = 27 + 8x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 19x_4$$

Daraus bestimmen wir Näherungen für $f(2.1, 2.9, 0.9, 2.1)$, $f(1.95, 3.05, 0.95, 2.05)$.

$$t(2.1, 2.9, 0.9, 2.1) = -15.7 \approx f(2.1, 2.9, 0.9, 2.1) = -15.5361$$

$$t(1.95, 3.05, 0.95, 2.05) = -16.95 \approx f(1.95, 3.05, 0.95, 2.05) = -16.98500625$$

Totales (vollständiges) Differential

In engem Zusammenhang mit der linearen Approximation steht der Begriff des totalen (vollständigen) Differentials einer Funktion.

Wir betrachten zunächst eine Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen, die an einer Stelle (x^*, y^*) stetig partiell differenzierbar sei.

$P(x^*, y^*, z^*)$ mit $z^* = f(x^*, y^*)$ sei ein Punkt auf dem Graphen von f und T die in P errichtete Tangentialebene. Wir betrachten folgende

Fragestellung: Welche Änderung erfährt der Funktionswert, d.h. die "Höhen"koordinate z des Flächenpunktes P bei Verschiebung dieses Punktes auf der Fläche selbst und auf der zugehörigen Tangentialebene?

Verschiebungen auf der Fläche:

Die bei der Verschiebung auf der durch f beschriebenen Fläche stattfindenden Koordinatenänderungen, bezogen auf den Berührungspunkt P , bezeichnen wir mit Δx , Δy , Δz . P wird nun so auf der Fläche verschoben, dass sich die unabhängigen Koordinaten x und y um Δx bzw. Δy ändern. Dabei ändert sich der Funktionswert um

$$\Delta z = f(x^* + \Delta x, y^* + \Delta y) - f(x^*, y^*).$$

Δz beschreibt also den Zuwachs der Höhenkoordinate und damit des Funktionswertes bei einer Verschiebung auf der Fläche. Der Punkt P ist dabei in den Punkt Q verschoben worden.

Verschiebungen auf der Tangentialebene:

Die bei einer Verschiebung auf der Tangentialebene eintretenden Koordinatenänderungen bezeichnen wir nun mit dx , dy , dz . Dabei soll der Punkt P so auf der Tangentialebene verschoben werden, dass sich die unab-

hängigen Koordinaten wieder um $\Delta x, \Delta y$ ändern, d.h. $dx = \Delta x$ und $dy = \Delta y$. Die Änderung dz lässt sich leicht aus der Gleichung der Tangentialebene

$$t(x, y) = f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*) \cdot \underset{dx}{(x - x^*)} + f_y(x^*, y^*) \cdot \underset{dy}{(y - y^*)}$$

ermitteln zu

$$dz = f_x(x^*, y^*) dx + f_y(x^*, y^*) dy.$$

Diese Größe beschreibt den Zuwachs der Höhenkoordinate z bei Verschiebung auf der Tangentialebene. Der Punkt P ist dabei in den Punkt Q' auf der Tangentialebene verschoben worden. Q' liegt i. A. nicht mehr auf der durch f beschriebenen Fläche, d.h. i. A. $dz \neq \Delta z$.

Bei geringen Verschiebungen, d.h. für kleine Werte von $dx = \Delta x$ und $dy = \Delta y$ gilt näherungsweise

$$\Delta z \approx dz = f_x(x^*, y^*) dx + f_y(x^*, y^*) dy$$

(vgl. auch den Abschnitt über die lineare Approximation)

Für die Änderung dz der Höhenkoordinate auf der Tangentialebene führen wir folgende Bezeichnung ein.

Definition. Das totale (vollständige) Differential einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen ist definiert als

$$df = dz = f_x dx + f_y dy.$$

Entsprechend definiert man das totale (vollständige) Differential einer Funktion f von n Veränderlichen durch

$$df = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i$$

Beispiel: Sei $Y(K, L, T)$ eine Produktionsfunktion mit den Grenzprodukten Y_K, Y_L, Y_T des Kapitals, der Arbeit und der Anbaufläche. Dann ist das totale Differential von Y :

$$dY = Y_K dK + Y_L dL + Y_T dT$$

Die Änderung $\Delta Y = Y(K + \Delta K, L + \Delta L, T + \Delta T) - Y(K, L, T)$ kann durch dY approximiert werden, wenn dK , dL und dT betragsmäßig klein sind.

Beispiel:

$$a) f(x, y) = 7x^2 - 2y^3 \quad ; \quad df = 14x dx - 6y^2 dy$$

$$b) f(x, y) = \ln(x^2 + y) \quad ; \quad df = \frac{2x}{x^2 + y} dx + \frac{1}{x^2 + y} dy$$

$$c) f(x, y) = e^{\sqrt{x} \cdot y^2} \quad ; \quad df = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x} \cdot y^2} dx + 2y e^{\sqrt{x} \cdot y^2} dy$$