

Implizites Differenzieren

Die Kettenregel lässt sich gut für die Untersuchung von Funktionen verwenden, die nicht in expliziter, sondern in impliziter Form gegeben sind. Um mit dem Thema vertraut zu werden, betrachten wir zunächst den Fall einer unabhängigen Variablen x . Explizit bedeutet, dass die abhängige Variable explizit in der Form $y = y(x)$ gegeben ist. Implizit bedeutet, dass der funktionale Zusammenhang von x und $y(x)$ in Form einer Gleichung angegeben ist, die sich möglicherweise gar nicht nach $y(x)$ auflösen lässt.

Das Folgende gilt auch, wenn die durch die Gleichung beschriebene Kurve kein Funktionsgraph ist.

Beispiel: $[y(x)]^3 + 3x^2 y(x) - 13 = 0$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach y auflösen.

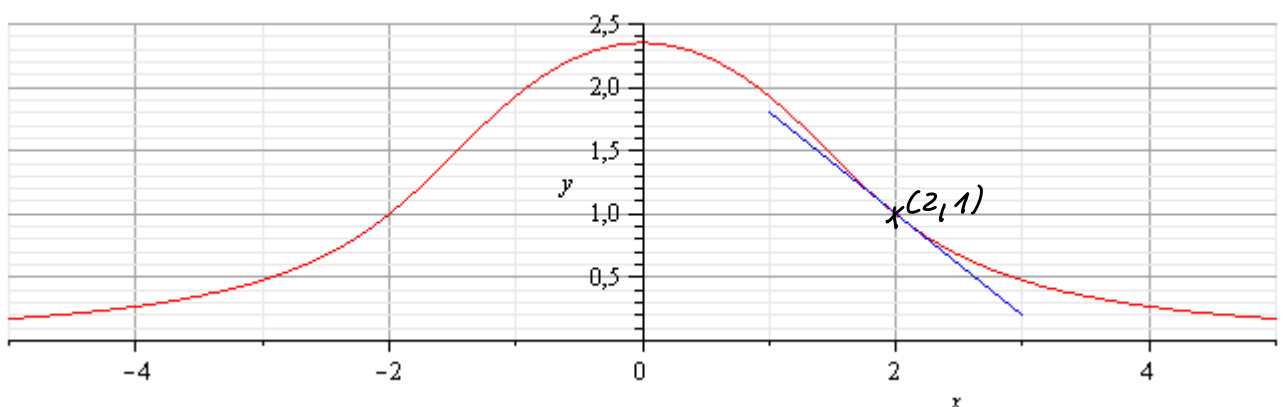
Trotzdem kann man Punkte ermitteln, die auf dem Graphen liegen.

Setzen wir z.B. $x=2$ in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$[y(2)]^3 + 12 y(2) - 13 = 0$$

Man sieht leicht ein, dass $y(2) = 1$ die Gleichung erfüllt, d.h. der Punkt $(2, 1)$ liegt auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve.

Tatsächlich beschreibt die Gleichung die in der unten stehenden Graphik eingezeichnete rote Kurve. Bilder von solchen implizit gegebenen Kurven lassen sich im Allgemeinen nur mit leistungsfähigen Programmen erstellen.



Wir möchten nun die Steigung der Tangenten an den Kurvenpunkt $(2,1)$ bestimmen. Dazu differenzieren wir die Gleichung unter Verwendung der Kettenregel auf beiden Seiten nach x und erhalten:

$$3[y(x)]^2 \cdot y'(x) + 6xy(x) + 3x^2 y'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(x) \{ 3[y(x)]^2 + 3x^2 \} = -6xy(x)$$

Für $[y(x)]^2 + x^2 \neq 0$ lässt sich dies nach $y'(x)$ auflösen:

$$y'(x) = -\frac{6xy(x)}{3(x^2 + [y(x)]^2)}$$

Für den Punkt $(2,1)$ ergibt sich somit $y'(2) = -\frac{4}{5}$ als Steigung der Tangenten durch den Kurvenpunkt $(2,1)$, die in der oben stehenden Graphik blau eingezeichnet ist.

Beispiel: $x^2 [y(x)]^3 + [y(x) + 1]e^{-x} = x + 2$

Für $x=0$ ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung

$$y(0) + 1 = 2 \Leftrightarrow y(0) = 1$$

Der Punkt $(0,1)$ liegt also auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve. Um die Steigung der Tangenten an diesen Kurvenpunkt zu ermitteln, differenzieren wir wieder die Gleichung auf beiden Seiten nach x :

$$2x[y(x)]^3 + 3x^2[y(x)]^2 \cdot y'(x) + y'(x) \cdot e^{-x} - [y(x) + 1]e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow y'(x) \underbrace{\{ 3x^2[y(x)]^2 + e^{-x} \}}_{>0} = 1 - 2x[y(x)]^3 + [y(x) + 1]e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{1 - 2x[y(x)]^3 + [y(x) + 1]e^{-x}}{3x^2[y(x)]^2 + e^{-x}}$$

Einsetzen von $x=0, y(0)=1$ liefert: $y'(0) = 3$.

Die Tangente am Kurvenpunkt $(0,1)$ hat also die Steigung 3.

Prinzipiell kann man für Funktionen von mehreren Variablen analog vorgehen, was wir exemplarisch an einigen Beispielen zeigen.

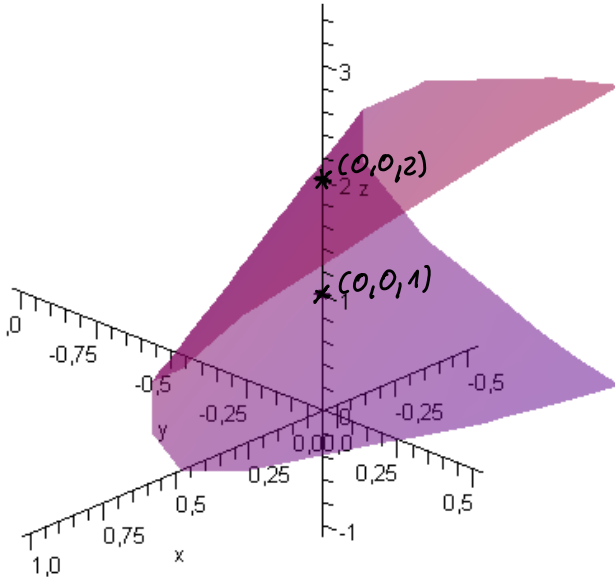
Beispiel: $z(x,y)$ sei implizit gegeben durch die Gleichung

$$x - 2y - 3z(x,y) + [z(x,y)]^2 = -2$$

Setzen wir z.B. $x=y=0$ ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$-3z(0,0) + [z(0,0)]^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow z(0,0) = 1 \vee z(0,0) = 2$$



Die beiden Punkte $(0,0,1)$ und $(0,0,2)$ liegen also auf der durch die Gleichung beschriebenen Fläche.

Damit ist auch klar, dass es sich bei $z(x,y)$ nicht um eine Funktion handelt.

Wir differenzieren die Gleichung auf beiden Seiten partiell nach x und erhalten:

$$1 - 3z_x(x,y) + 2z(x,y) \cdot z_x(x,y) = 0$$

Für $z(x,y) \neq \frac{3}{2}$ lässt sich dies nach $z_x(x,y)$ auflösen:

$$z_x(x,y) = \frac{1}{3 - 2z(x,y)}$$

Im Punkt $(0,0,1)$ ist somit $z_x = 1$, im Punkt $(0,0,2)$ dagegen $z_x = -1$.

Differentiation der Gleichung auf beiden Seiten nach y liefert:

$$-2 - 3z_y(x,y) + 2z(x,y) \cdot z_y(x,y) = 0$$

Für $z(x,y) \neq \frac{3}{2}$ lässt sich dies nach $z_y(x,y)$ auflösen:

$$z_y(x,y) = \frac{2}{2z(x,y) - 3}$$

Im Punkt $(0,0,1)$ ist somit $z_y = -2$, im Kurvenpunkt $(0,0,2)$ ist $z_y = -2$.

Bemerkung: Hier könnte man prinzipiell die Gleichung zunächst nach $z(x,y)$ auflösen; $z(x,y) = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x + 2y}$ und müsste dann beide Vorzeichen der Wurzel beachten.

Beispiel: Die sogenannte Nerlove-Ringstad Produktionsfunktion $Y(K, L)$ ist implizit durch die Gleichung

$$Y(K, L)^{1+c \ln(Y(K, L))} = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, \quad K, L > 0,$$

mit positiven Konstanten A, α, β definiert.

Wir bestimmen Ausdrücke für die Grenzproduktivitäten von $Y(K, L)$ bzgl. des Kapitals K und bzgl. des Arbeitseinsatzes L , d.h. Ausdrücke für $Y_K(K, L)$ und $Y_L(K, L)$.

In diesem Beispiel ist die linke Seite ziemlich kompliziert. Wir verwenden daher einen Trick, der auch in vielen ähnlichen Situationen hilfreich sein kann. Da beide Seiten der Gleichung positiv sind, können wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus anwenden und erhalten daraus unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus:

$$[1+c \ln(Y(K, L))] \cdot \ln(Y(K, L)) = \ln(A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta)$$

Diese Gleichung differenzieren wir nun auf beiden Seiten partiell nach K :

$$c \cdot \frac{Y_K(K, L)}{Y(K, L)} \cdot \ln(Y(K, L)) + [1+c \ln(Y(K, L))] \cdot \frac{Y_K(K, L)}{Y(K, L)} = \frac{A \cdot \alpha K^{\alpha-1} L^\beta}{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y_K(K, L)}{Y(K, L)} \{1+2c \ln(Y(K, L))\} = \frac{\alpha}{K}$$

$$\Leftrightarrow Y_K(K, L) = \frac{\alpha Y(K, L)}{K \{1+2c \ln(Y(K, L))\}}$$

Entsprechend erhalten wir durch partielle Differentiation nach L :

$$Y_L(K, L) = \frac{\beta Y(K, L)}{L \{1+2c \ln(Y(K, L))\}}$$

Als zusätzliche Übung sollten Sie einmal versuchen, die Ausgangsgleichung ohne vorheriges Logarithmieren direkt partiell nach K bzw. L zu differenzieren, um auf die Ausdrücke für $Y_K(K, L)$ und $Y_L(K, L)$ zu kommen. Welchen Trick benötigt man, um die linke Seite zunächst geeignet umzuschreiben?

Grenzrate der Substitution

Die Methode des impliziten Differenzierens ist auch geeignet, die Niveaulinien einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genauer zu untersuchen, da diese auch häufig in impliziter Form vorkommen (vgl. Kapitel I).

Ist eine Niveaulinie durch die Gleichung $f(x, y) = c$ bestimmt, und betrachten wir y in Abhängigkeit von x , so haben wir

$$f(x, y(x)) = c.$$

Differentiation auf beiden Seiten nach x liefert:

$$f_x(x, y(x)) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + f_y(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

d.h. kurz $y' = -\frac{f_x}{f_y}$, falls $f_y \neq 0$.

Für das Negative dieses Ausdrucks haben Ökonomen einen speziellen Namen. Es ist

$$R_{yx} = \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \text{ die } \underline{\text{Grenzrate der Substitution von } y \text{ durch } x}.$$

Diese Begriffsbildung soll durch das folgende Beispiel motiviert werden.

Beispiel: Es sei $V(K, L) = K^2 \cdot L$ mit $K, L > 0$ eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion und $V(K, L) = 108$ die Gleichung der Isoquanten (Niveaulinie) zum Output 108, d.h.

$$K^2 \cdot L = 108 \Leftrightarrow L = \frac{108}{K^2}$$

Für die Grenzrate der Substitution von L für K gilt:

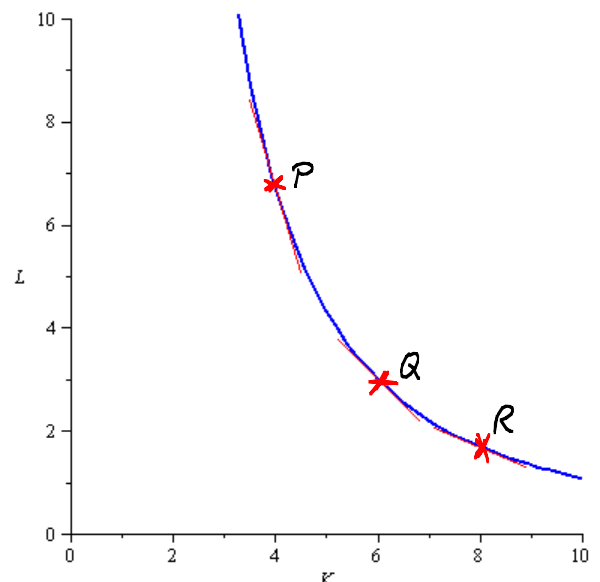
$$R_{LK} = \frac{V_K(K, L)}{V_L(K, L)} = \frac{2KL}{K^2} = \frac{2L}{K}$$

Daraus erhält man z.B. für

$$P(4, \frac{27}{4}): R_{LK} = \frac{27}{8} = 3.375$$

$$Q(6, 3): R_{LK} = 1$$

$$R(8, \frac{27}{16}): R_{LK} = \frac{27}{64} = 0.421875$$



In allen Punkten P, Q, R werden jeweils 108 Einheiten produziert.

In P wird wenig Kapital und viel Arbeitseinsatz verwendet, um 108 Einheiten zu produzieren. Die Steigung der Isoquante in P ist $-\frac{27}{8}$, d.h. die GRS (Grenzrate der Substitution) beträgt $\frac{27}{8}$. Die Interpretation ist nun so, dass man näherungsweise durch Zufügung von 1 Einheit Kapital in etwa $\frac{27}{8}$ Einheiten Arbeitseinsatz weniger aufwenden muss, um das Niveau des Outputs zu halten; $\frac{27}{8}$ Einheiten Arbeitseinsatz können durch 1 Einheit Kapital substituiert werden. Dagegen kann man im Punkt Q in etwa 1 Einheit und im Punkt R nur $\frac{27}{64}$ Einheiten durch 1 Einheit Kapital substituieren.

Beispiel: Wir bestimmen die Grenzrate der Substitution für

$$f(x, y) = \ln(2x^2 + 5y^4 + 2).$$

$$R_{yx} = \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{\frac{4x}{2x^2 + 5y^4 + 2}}{\frac{20y^3}{2x^2 + 5y^4 + 2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y^3}$$

Homogene Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir eine für ökonomische Anwendungen sehr wichtige Klasse von Funktionen, die homogenen Funktionen, kennenlernen. Diese Funktionen haben eine Reihe wichtiger und nützlicher Eigenschaften, die wir herleiten und auf einige ökonomische Beispiele anwenden werden.

Bezeichnet z.B. $y(K, L)$ die Anzahl produzierter Einheiten bei Verwendung von K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeitseinsatz als Input, so liegt folgende Fragestellung nahe.

Wie ändert sich die produzierte Menge, wenn wir Kapital- und Arbeitseinsatz verdoppeln? Verdoppelt sich der Output oder ergibt sich mehr bzw. weniger als das Doppelte?

Im Zusammenhang mit solchen Fragestellungen spielen die homogenen Funktionen eine wichtige Rolle, die wir zunächst für den Fall von zwei Variablen definieren und untersuchen wollen.

Definition: Eine Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k , wenn für alle $(x, y) \in D_f$ gilt:

- 1) $(tx, ty) \in D_f$ für jedes $t > 0$
- 2) $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ für jedes $t > 0$.

Der Grad k der Homogenität kann dabei eine beliebige reelle Zahl sein. Die Multiplikation der beiden Variablen mit einem Faktor $t > 0$ ergibt also eine Multiplikation von $f(x, y)$ mit t^k .

Beispiel: Wir untersuchen, ob die Funktion $f(x, y) = 4xy^3 + x^2y^2 - x^4$ homogen ist und bestimmen gegebenenfalls den Grad.

Für $t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 4(tx) \cdot (ty)^3 + (tx)^2 (ty)^2 - (tx)^4 \\ &= t^4 \{ 4xy^3 + x^2y^2 - x^4 \} = t^4 f(x, y) \end{aligned}$$

Die Funktion ist also homogen vom Grad 4.

Es gilt z.B. $f(2x, 2y) = 2^4 f(x, y) = 16 f(x, y)$.

Eine Verdopplung von x und y führt zu einer Steigerung des Funktionswertes um den Faktor 16.

In dem Beispiel handelt es sich bei der Funktion um ein Polynom vierten Grades, bei dem speziell die Summe der Exponenten in jedem Summanden gleich vier ist.

Offenbar lässt sich dieser Sachverhalt verallgemeinern. Ein Polynom vom Grad k ist genau dann homogen vom Grad k , wenn die Summe der Exponenten in jedem Summanden mit k übereinstimmt.

Beispiel: Wir untersuchen die Cobb-Douglas Funktion $Y(K, L) = AK^a L^b$.

Für $t > 0$ gilt: $Y(tK, tL) = A(tK)^a (tL)^b = t^{a+b} Y(K, L)$.

Die Cobb-Douglas Funktion ist also homogen vom Grad $a+b$.

Beispiel: Für die sogenannte CES-Funktion (constant elasticity of substitution) $Y(K, L) = A(aK^{-s} + bL^{-s})^{-\frac{m}{s}}$

$$\begin{aligned} \text{gilt für } t > 0: Y(tK, tL) &= A(a(tK)^{-s} + b(tL)^{-s})^{-\frac{m}{s}} \\ &= (t^{-s})^{-\frac{m}{s}} \cdot A(aK^{-s} + bL^{-s})^{-\frac{m}{s}} \\ &= t^m Y(K, L) \end{aligned}$$

Die Funktion ist also homogen vom Grad m .

Wir kommen nun zu einigen wichtigen Eigenschaften homogener Funktionen.

Ist f homogen vom Grad k , so gilt definitionsgemäß

$$(*) \quad f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Differenzieren wir mit Hilfe der Kettenregel auf beiden Seiten nach t , so

erhalten wir: $f_x(tx, ty) \cdot x + f_y(tx, ty) \cdot y = k \cdot t^{k-1} f(x, y)$.

Für $t=1$ ergibt sich daraus speziell: $f_x(x, y) \cdot x + f_y(x, y) \cdot y = k f(x, y)$.

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung, was wir in dem folgenden Satz zusammenfassen.

Eulers Theorem: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist homogen vom Grad } k \Leftrightarrow x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) = k \cdot f(x, y)$$

Differenziert man $(*)$ auf beiden Seiten partiell nach x bzw. y , so erhält man:

$$t \cdot f_x(tx, ty) = t^k \cdot f_x(x, y) \Leftrightarrow f_x(tx, ty) = t^{k-1} f_x(x, y),$$

$$t \cdot f_y(tx, ty) = t^k f_y(x, y) \Leftrightarrow f_y(tx, ty) = t^{k-1} f_y(x, y),$$

d.h. die partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion vom Grad k sind homogene Funktionen vom Grad $k-1$.

Daraus und mit Eulers Theorem lässt sich nun eine weitere Eigenschaft

herleiten. Dazu wenden wir Eulers Theorem auf die partiellen Ableitungen f_x und f_y an, die homogen vom Grad $k-1$ sind. Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt:

$$x \cdot f_{xx}(x, y) + y \cdot f_{xy}(x, y) = (k-1) \cdot f_x(x, y) \quad (\text{Eulers Theorem für } f_x)$$

$$x \cdot f_{yx}(x, y) + y \cdot f_{yy}(x, y) = (k-1) \cdot f_y(x, y) \quad (\text{Eulers Theorem für } f_y)$$

Wir multiplizieren die 1. Gleichung mit x und die 2. mit y . Beachtet man, dass nach dem Satz von Schwarz $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} x^2 \cdot f_{xx}(x, y) + x y \cdot f_{xy}(x, y) &= (k-1) \cdot x \cdot f_x(x, y) \\ x y \cdot f_{xy}(x, y) + y^2 \cdot f_{yy}(x, y) &= (k-1) \cdot y \cdot f_y(x, y) \end{aligned} \right\} +$$

$$x^2 \cdot f_{xx}(x, y) + 2xy \cdot f_{xy}(x, y) + y^2 \cdot f_{yy}(x, y) = (k-1) \{ x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) \}$$

Nach Eulers Theorem ergibt sich für die geschweifte Klammer auf der rechten Seite $k \cdot f(x, y)$, d.h. wir erhalten:

$$\underline{x^2 \cdot f_{xx}(x, y) + 2xy \cdot f_{xy}(x, y) + y^2 \cdot f_{yy}(x, y) = k \cdot (k-1) \cdot f(x, y)}$$

Weiter setzen wir nun speziell $t = \frac{1}{x}$ bzw. $t = \frac{1}{y}$ für $x > 0$ bzw. $y > 0$ in (*) ein und erhalten:

$$f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{=1} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^k f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad f\left(\frac{1}{y} \cdot x, \underbrace{\frac{1}{y}}_{=1} \cdot y\right) = \left(\frac{1}{y}\right)^k f(x, y),$$

$$\text{d.h.} \quad \underline{f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = y^k f\left(\frac{x}{y}, 1\right)}.$$

Wir halten die hergeleiteten Eigenschaften noch einmal zusammengefasst fest.

Satz: Sei $f: \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grad k . Dann gilt unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen:

(1) f_x und f_y sind homogen vom Grad $k-1$.

$$(2) \quad x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = k(k-1) f(x, y)$$

$$(3) \quad f(x, y) = x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = y^k f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \quad \text{für } x > 0, y > 0$$

Beispiel: Wir verifizieren die Eigenschaften an der Funktion

$$f(x,y) = 2x^3y - x^2y^2.$$

Da $f(tx,ty) = t^4 f(x,y)$, ist f homogen vom Grad 4.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot f_x(x,y) + y \cdot f_y(x,y) &= x(6x^2y - 2xy^2) + y(2x^3 - 2x^2y) \\ &= 8x^3y - 4x^2y^2 \\ &= 4(2x^3y - x^2y^2) = 4 \cdot f(x,y) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Eulers Theorem.

Für die partiellen Ableitungen $f_x(x,y) = 6x^2y - 2xy^2$, $f_y(x,y) = 2x^3 - 2x^2y$ gilt:

$$f_x(tx,ty) = t^3(6x^2y - 2xy^2) = t^3 f_x(x,y), \quad f_y(tx,ty) = t^3(2x^3 - 2x^2y) = t^3 f_y(x,y),$$

die partiellen Ableitungen sind also homogen vom Grad 3.

Wir berechnen nun (vgl. (2) in obigem Satz):

$$\begin{aligned} &x^2 f_{xx}(x,y) + 2xy f_{xy}(x,y) + y^2 f_{yy}(x,y) \\ &= x^2(12xy - 2y^2) + 2xy(6x^2 - 4xy) + y^2(-2x^2) \\ &= 12x^3y - 2x^2y^2 + 12x^3y - 8x^2y^2 - 2x^2y^2 \\ &= 24x^3y - 12x^2y^2 \\ &= 4 \cdot 3 \cdot (2x^3y - x^2y^2) = 4 \cdot 3 \cdot f(x,y) \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$x^4 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^4 \left\{ 2 \cdot 1^3 \cdot \frac{y}{x} - 1^2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right\} = 2x^3y - x^2y^2 = f(x,y),$$

$$y^4 f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^4 \left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^3 \cdot 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot 1^2 \right\} = 2x^3y - x^2y^2 = f(x,y),$$

in Übereinstimmung mit (3) aus obigem Satz.

Beispiel: Die Produktionsfunktion $Y(K,L)$ sei homogen vom Grad $k=1$.

Dann gilt mit (3) aus obigem Satz:

$$Y(K,L) = K \cdot Y\left(1, \frac{L}{K}\right) \quad \text{und} \quad Y(K,L) = L \cdot Y\left(\frac{K}{L}, 1\right),$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{Y(K,L)}{K} = Y\left(1, \frac{L}{K}\right) \quad \text{und} \quad \frac{Y(K,L)}{L} = Y\left(\frac{K}{L}, 1\right).$$

Das Output-Kapital-Verhältnis $\frac{Y(K,L)}{K}$ lässt sich also durch eine Funktion des Verhältnisses von Arbeit zu Kapital ausdrücken. Ebenso lässt sich das Output-Arbeits-Verhältniss $\frac{Y(K,L)}{L}$ als Funktion des Verhältnisses von Kapital zu Arbeit beschreiben.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Cobb-Douglas Funktion

$$Y(K,L) = A \cdot K^a \cdot L^{1-a}, \text{ die homogen vom Grad 1 ist.}$$

$$\text{Es gilt: } \frac{Y(K,L)}{K} = A \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1-a}, \quad \frac{Y(K,L)}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^a$$

Eine weitere Anwendung von Eulers Theorem ergibt sich, wenn man die Gleichung $x \cdot f_x(x,y) + y \cdot f_y(x,y) = k \cdot f(x,y)$ im Fall $f(x,y) \neq 0$ durch $f(x,y)$ dividiert, d.h.

$$x \cdot \frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} + y \cdot \frac{f_y(x,y)}{f(x,y)} = k$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht aber gerade die Summe der partiellen Elastizitäten, d.h.

$$\underline{El_x f(x,y) + El_y f(x,y) = k.}$$

Die Summe der partiellen Elastizitäten einer homogenen Funktion stimmt mit ihrem Homogenitätsgrad überein.

Beispiel: $Y(K,L) = A \cdot K^a \cdot L^b$ ist homogen vom Grad $a+b$.

$$\text{Also gilt: } El_K Y(K,L) + El_L Y(K,L) = a+b$$

Im Folgenden werden wir uns nun mit einigen geometrischen Eigenschaften homogener Funktionen von zwei Variablen beschäftigen, da diese einige sehr anschauliche Eigenschaften besitzen.

Sei wieder $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ homogen vom Grad k .

Wir betrachten einen Strahl in der xy -Ebene, der durch den Ursprung und einen weiteren festen Punkt $(x^*, y^*) \in \mathbb{D}_f$ verläuft.