

IV Handwerkszeug der Differentialrechnung in mehreren Variablen

In diesem Kapitel werden wir wichtige Methoden für den praktischen Umgang mit Funktionen von mehreren Variablen im Zusammenhang mit der Differentialrechnung kennenlernen. Die Anwendungen und Interpretationen werden dabei, soweit möglich, an Hand ökonomischer Beispiele erläutert.

Bereits in der Analysis I haben wir gesehen, wie wichtig die Kettenregel für die Berechnung von Ableitungen ist. Wir werden uns daher auch für Funktionen von mehreren Variablen mit einer sehr allgemeinen Kettenregel beschäftigen, die im Spezialfall wieder die uns bereits bekannten Regeln liefert. Häufig gibt es Zusammenhänge, in denen eine Funktion nicht in expliziter Form, sondern implizit durch eine Gleichung gegeben ist. Mit Hilfe der impliziten Differentiation, bei der wiederum die Kettenregel eine wichtige Rolle spielt, können wir solche Funktionen weiter untersuchen. Eine für ökonomische Anwendungen sehr wichtige Klasse von Funktionen bilden die sogenannten homogenen Funktionen. Diese haben eine Reihe wichtiger und nützlicher Eigenschaften, die wir herleiten und auf einige ökonomische Beispiele anwenden werden.

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Einführung des totalen Differentials und der linearen Approximation von Funktionen mehrerer Variablen, die wir bereits im allgemeineren Zusammenhang mit der Taylor-Approximation für Funktionen einer Variablen in der Analysis I behandelt haben.

Die Kettenregel

In vielen ökonomischen Modellen werden verkettete Funktionen verwendet. Dabei handelt es sich um Funktionen von einer oder mehreren Variablen, in denen die Variablen selbst wieder Funktionen von einer oder

mehreren Variablen sind.

Im letzten Kapitel haben wir bereits einen Spezialfall behandelt, nämlich $f(x,y) = u(v(x,y))$ mit $u: \mathbb{D}_u \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \mathbb{D}_v \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. allgemein $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(v(x_1, x_2, \dots, x_n))$ mit $u: \mathbb{D}_u \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \mathbb{D}_v \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

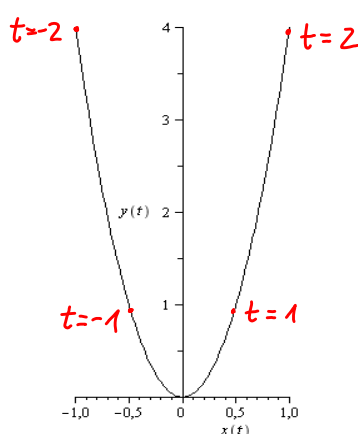
Ziel ist es, eine Regel für die Differentiation einer Funktion $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nach einer Variablen t_j , $j=1, 2, \dots, m$, anzugeben, wenn die Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ihrerseits von den Variablen $t_1, t_2, \dots, t_m$ abhängen.

Bevor wir eine solche allgemeine Regel angeben, beschäftigen wir uns zunächst mit wichtigen Spezialfällen.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x^2 y$, wobei die Variablen x und y von einer Variablen t gemäß $x = x(t) = \frac{1}{2}t$, $y = y(t) = t^2$ abhängen. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $(x(t), y(t))$ ein Punkt in der xy -Ebene und $(x(t), y(t), z(t))$ mit $z(t) = f(x(t), y(t))$ ein Punkt der durch die Funktion beschriebenen Fläche.

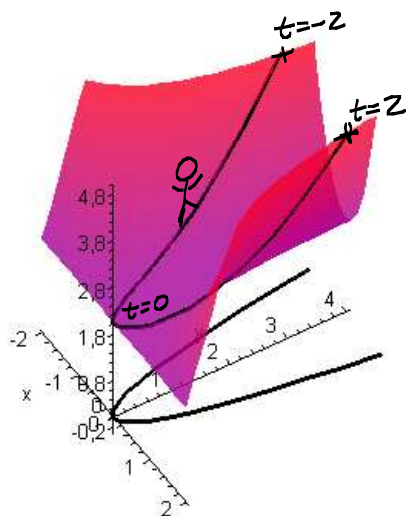
Wir gewinnen zunächst mit Hilfe einer Wertetabelle eine Vorstellung davon, welche Punkte in der xy -Ebene durch $(x(t), y(t))$ beschrieben werden.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$x(t)$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	...
$y(t)$	9	4	1	0	1	4	9	...



Es handelt sich hier also um eine parabelförmige Kurve, bei der man zusätzlich noch Informationen notieren kann, welcher Variablenwert (man sagt auch Parameterwert) von t zu bestimmten Punkten gehört.

Jedem $(x(t), y(t))$ wird nun durch die Funktionsvorschrift ein Funktionswert (eine "Höhe") zugeordnet. Dies bedeutet, dass man Senkrechten zu der



xy -Ebene durch die Kurvenpunkte $(x(t), y(t))$ errichtet und diese mit der durch $f(x, y)$ beschriebenen Fläche schneidet. Dadurch wird aus der Fläche eine Kurve ausgeschnitten, die allerdings in der Regel keine ebene Kurve mehr ist, sondern im Allgemeinen eine Raumkurve.

Untersucht man nun die Funktion in Abhängigkeit vom Parameter t , so bedeutet dies anschaulich, dass man auf dieser Kurve ("einem bestimmten Pfad im Gebirge") entlangwandert. Die Steigung dieser Kurve ist also die Ableitung der Funktion nach t , d.h. die momentane Änderungsrate bzgl. t . Diese berechnen wir zunächst, indem wir in die Funktionsgleichung die Ausdrücke für x und y in Abhängigkeit von t einsetzen.

$$f(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2}t\right)^2 \cdot t^2 = \frac{1}{4}t^4 = \tilde{f}(t)$$

Da dies nur noch von t abhängt, können wir nun direkt nach t differenzieren, d.h.

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = t^3$$

Um nun den Zusammenhang mit Ableitungen von f genauer analysieren zu können, schreiben wir zunächst einige Ausdrücke getrennt auf.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = 2t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) = 2x(t)y(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) = (x(t))^2$$

Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 t^3 &= \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} t \cdot t^2}_{\substack{= \frac{dx}{dt}(t) \text{ ("Innere" Ableitung von } x \text{ nach } t)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{= \frac{dy}{dt}(t) \text{ ("Innere" Ableitung von } y \text{ nach } t)}} + \underbrace{\frac{1}{4} t^2}_{\substack{= (x(t))^2 = \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) \text{ ("Äußere" Ableitung von } f \text{ nach } y)}} \cdot \underbrace{2t}_{\substack{= 2x(t)y(t) = \frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) \text{ ("Äußere" Ableitung von } f \text{ nach } x)}} = \frac{df}{dt}(x(t), y(t)) \\
 &= 2x(t)y(t) = \frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) \text{ ("Äußere" Ableitung von } f \text{ nach } x)
 \end{aligned}$$

Statt die Ausdrücke für $x(t)$ und $y(t)$ einzusetzen und anschließend nach t zu differenzieren, hätten wir also auch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt}(x, y)$$

berechnen können.

Bevor wir eine allgemeine Regel formulieren, betrachten wir noch ein Beispiel mit etwas komplizierteren Funktionen.

Beispiel: Wir betrachten eine Nachfragefunktion

$$N(p, m) = p^{-1.5} \cdot m^2$$

in Abhängigkeit vom Preis p und Einkommen m .

Wir behandeln nun das Problem, dass sich Preis und Einkommen mit der Zeit t ändern, d.h. Funktionen $p(t), m(t)$ der Zeit t sind, z.B. $p(t) = 1.05^t$, $m(t) = 1.07^t$.

Setzt man dies in den Funktionsausdruck für die Nachfrage ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 N(p(t), m(t)) &= (1.05^t)^{-1.5} \cdot (1.07^t)^2 \\
 &= 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} = \tilde{N}(t),
 \end{aligned}$$

d.h. eine Funktion, die nur von der Variablen (dem Parameter) t abhängt. Die Frage nach der momentanen Änderungsrate der Nach-

Frage mit der Zeit t lässt sich nun mit den Methoden des letzten Semesters beantworten, wenn wir beachten, dass gilt:

$$1.05^{-1.5t} = e^{-1.5t \cdot \ln(1.05)}, \quad 1.07^{2t} = e^{2t \cdot \ln(1.07)}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{N}}{dt}(t) &= -1.5 \cdot \ln(1.05) \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} + 1.05^{-1.5t} \cdot 2 \cdot \ln(1.07) \cdot 1.07^{2t} \\ &= \underbrace{(2 \cdot \ln(1.07) - 1.5 \cdot \ln(1.05))}_{\approx 0.06213...} \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} \end{aligned}$$

Die momentane Änderungsrate der Nachfrage in Abhängigkeit von der Zeit ist also in diesem Fall positiv, d.h. die Nachfrage ist bzgl. der Zeit t streng monoton wachsend.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie man direkt ohne Einsetzen von $p(t)$ und $m(t)$ die momentane Änderungsrate $\frac{dN}{dt}(p, m)$ bestimmen kann. Um den oben erhaltenen Ausdruck genauer analysieren zu können, schreiben wir uns zunächst einige Ableitungsausdrücke wieder explizit auf. Es gilt:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \ln(1.05) \cdot 1.05^t$$

$$\frac{dm}{dt}(t) = \ln(1.07) \cdot 1.07^t$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t), m(t)) &= -1.5 \cdot (p(t))^{-2.5} \cdot (m(t))^2 & \frac{dN}{dm(t)}(p(t), m(t)) &= 2 \cdot (p(t))^{-1.5} \cdot m(t) \\ &= -1.5 \cdot 1.05^{-2.5t} \cdot 1.07^{2t} & &= 2 \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^t \end{aligned}$$

Wir versuchen nun, diese Ableitungsausdrücke in dem oben für $\frac{d\tilde{N}}{dt}(t)$ ermittelten Ergebnis wiederzufinden.

$$\begin{aligned} &-1.5 \cdot \ln(1.05) \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} + 1.05^{-1.5t} \cdot 2 \cdot \ln(1.07) \cdot 1.07^{2t} \\ &= \underbrace{-1.5 \cdot 1.05^{-2.5t} \cdot 1.07^{2t}}_{= \frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t), m(t))} \cdot \underbrace{\ln(1.05) \cdot 1.05^t}_{= \frac{dp}{dt}(t)} \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{1.05^{-1.5t} \cdot 2 \cdot 1.07^t}_{= \frac{\partial N}{\partial m(t)}(p(t), m(t))} \cdot \underbrace{\ln(1.07) \cdot 1.07^t}_{= \frac{dm}{dt}(t)}$$

$$= \frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t), m(t)) \cdot \frac{dp}{dt}(t) + \frac{\partial N}{\partial m(t)}(p(t), m(t)) \cdot \frac{dm}{dt}(t)$$

↑
"Äußere" partielle
Ableitung von N
nach p
↑
"Innere" Ableitung
von p nach t
↑
"Äußere" partielle
Ableitung von N
nach m
↑
"Innere" Ableitung
von m nach t

Man sieht, dass dies formelmäßig genauso aufgebaut ist wie im ersten Beispiel.

Tatsächlich kann man folgende allgemeine Regel formulieren.

Spezielle Kettenregel: Sei $f(x, y)$ stetig partiell differenzierbar und $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$

Sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ stetig partiell differenzierbar und $x_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j=1, \dots, n$, differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_i}{dt}(t)$$

Wenn die Funktionen $x(t), y(t)$ bzw. $x_1(t), \dots, x_n(t)$ explizit gegeben sind, kann man prinzipiell immer erst die Ausdrücke in die Funktion einsetzen, was aber häufig unpraktisch ist. Mit der Kettenregel lassen sich zunächst allgemeine Darstellungen herleiten, in die man dann gegebenenfalls spezielle Funktionen einsetzen kann.

Beispiel: Wir betrachten wieder die landwirtschaftliche Produktionsfunktion $Y(K, L, T) = A \cdot K^a \cdot L^b \cdot T^c$,

wobei nun das Kapital K , der Arbeitseinsatz L und die Anbaufläche T Funktionen der Zeit t sein sollen mit $K, L, T > 0$.

Dann ist (in abgekürzter Schreibweise):

$$\begin{aligned}
Y_t &= Y_K \cdot K_t + Y_L \cdot L_t + Y_T \cdot T_t \\
&= A a K^{a-1} L^b T^c + A b K^a L^{b-1} T^c + A c K^a L^b T^{c-1} \\
&= A K^a L^b T^c \cdot \left\{ a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} + c \cdot \frac{T_t}{T} \right\} \\
&= Y \cdot \left\{ a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} + c \cdot \frac{T_t}{T} \right\}
\end{aligned}$$

Wenn wir für $Y \neq 0$ die Gleichung durch Y dividieren, erhalten wir:

$$\frac{Y_t}{Y} = a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} + c \cdot \frac{T_t}{T}.$$

Die relative Änderungsrate $\frac{Y_t}{Y}$ des Outputs bzgl. der Zeit ist also eine gewichtete Summe der Änderungsraten von Kapital, Arbeitseinsatz und Anbaufläche.

Beispiel: Sei $f(x, y, z) = x^2 y + \ln(y + z^2)$, wobei x, y, z differenzierbare Funktionen von $t \in \mathbb{R}$ bzw. einer geeigneten Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein sollen.

Dann gilt zunächst:

$$\frac{df}{dt}(x, y, z) = 2xy \cdot \frac{dx}{dt} + \left(x^2 + \frac{1}{y+z^2}\right) \frac{dy}{dt} + \frac{2z}{y+z^2} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Mit $x(t) = t^2$, $y(t) = e^{2t}$, $z(t) = e^t$ erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt}(x, y, z) &= 2 \cdot t^2 \cdot e^t \cdot 2t + \left(t^4 + \frac{1}{e^{2t} + (e^t)^2}\right) \cdot 2 \cdot e^{2t} + \frac{2e^t}{e^{2t} + (e^t)^2} \cdot e^t \\
&= 4t^3 e^t + 2t^4 e^{2t} + 2
\end{aligned}$$

Hat man dagegen $x(t) = e^{3t}$, $y(t) = e^{2t}$, $z(t) = e^t$, so erhält man aus der allgemeinen Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt}(x, y, z) &= 2 \cdot e^{3t} \cdot e^{2t} \cdot 3e^{3t} + \left(e^{6t} + \frac{1}{e^{2t} + e^{2t}}\right) \cdot 2e^{2t} + \frac{2e^t}{e^{2t} + e^{2t}} \cdot e^t \\
&= 8 \cdot e^{8t} + 2
\end{aligned}$$

Beispiel: $u(x, s)$ sei eine Funktion, die das gesamte Wohlbefinden einer Gesellschaft misst, wobei x ein Index für die in der Gesellschaft produzierten und konsumierten Güter und s ein Maß für den Verschmutzungs-

grad der Umwelt bezeichnet (vgl. auch Beispiel im letzten Kapitel).

u sei stetig partiell differenzierbar für $x, s > 0$ und für die partiellen Ableitungen gelte $u_x(x, s) > 0$, $u_s(x, s) < 0$.

Wir nehmen nun an, dass der Grad s der Umweltbelastung eine differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion von x ist, d. h.

$$s = s(x) \text{ mit } \frac{ds(x)}{dx} > 0.$$

In diesem Fall ist dann $u(x, s(x)) = \tilde{u}(x)$ eine Funktion, die nur von x abhängt. Wir bestimmen nun allgemein eine notwendige Bedingung dafür, dass $\tilde{u}(x)$ an einer Stelle $x^* > 0$ ein Maximum besitzt.

Notwendige Bedingung für ein Maximum von $\tilde{u}$ an einer Stelle x^* ist (vgl. Analysis I): $\frac{d\tilde{u}}{dx}(x^*) = 0$

Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}(x^*) = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}(x^*, s(x^*)) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_x(x^*, s(x^*)) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}(x^*)}_{=1} + u_s(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{ds}{dx}(x^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_x(x^*, s(x^*)) + u_s(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{ds}{dx}(x^*) = 0$$

Als spezielles Beispiel betrachten wir die Funktion

$$u(x, s) = \ln(x^2 + s^2) - 2 \ln(s) \text{ mit } s = s(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 16}.$$

Für $x > 0$ ist auch $s > 0$ und es gilt:

$$u_x(x, s) = \frac{2x}{x^2 + s^2} > 0, \quad u_s(x, s) = \frac{2s}{x^2 + s^2} - \frac{2}{s} = \frac{-2x^2}{(x^2 + s^2) \cdot s} < 0$$

$$\frac{ds}{dx}(x) = \frac{1}{3} \cdot (3x^4 + 16)^{-2/3} \cdot 12x^3 = \frac{4x^3}{(\sqrt[3]{3x^4 + 16})^2} = \frac{4x^3}{(s(x))^2}$$

Die notwendige Bedingung ergibt in diesem Fall somit:

$$\frac{2x}{x^2 + [s(x)]^2} + \frac{-2x^2}{(x^2 + [s(x)]^2) \cdot s(x)} \cdot \frac{4x^3}{[s(x)]^2} = 0 \quad \left| : 2 \text{ und auf Hauptnenner bringen} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot [s(x)]^3 - 4x^5}{(x^2 + [s(x)]^2) \cdot [s(x)]^3} = 0 \quad \left| \cdot \text{Nenner} \neq 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow x \{ [s(x)]^3 - 4x^4 \} = 0$$

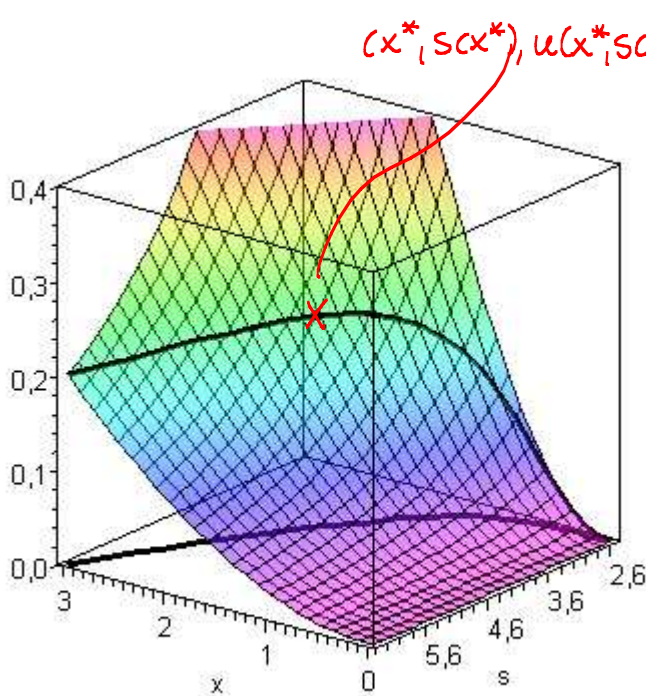
Da nach Voraussetzung $x > 0$, erhalten wir daraus nach Einsetzen von $[sc(x)]^3 = 3x^4 + 16$ die äquivalente notwendige Bedingung

$$16 - x^4 = 0$$

Wieder wegen $x > 0$ ist $x^* = 2$ die einzige Lösung dieser Gleichung. Nach den obigen Rechnungen ist

$$\frac{du}{dx}(x, sc(x)) = \frac{d\tilde{u}}{dx}(x) = \frac{x(16 - x^4)}{\underbrace{(x^2 + [sc(x)]^2)}_{> 0 \text{ für } x > 0} \cdot \underbrace{[sc(x)]^3}_{> 0 \text{ für } x < 2 \text{ und } < 0 \text{ für } x > 2}}$$

Somit ist $\tilde{u}(x)$ streng monoton wachsend für $x \in (0, 2)$ und streng monoton fallend für $x \in (2, \infty)$.



Auf der eingezeichneten Linie geht es also bis zur Stelle $(x^*, sc(x^*)) = (2, 4)$ aufwärts und danach abwärts.

Bemerkung: Als zusätzliche Übung können Sie zum Vergleich auch erst $sc(x)$ in $u(x, s)$ einsetzen und das Maximum bestimmen.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, dass die Variablen von f von einer Variablen (einem Parameter) abhängen. Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu, d.h. behandeln Funktionen von n Variablen, wobei diese von m Parametern (Variablen) abhängen.

Wir geben zunächst die Kettenregel in ihrer allgemeinen Form an.

Allgemeine Kettenregel: Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, stetig partiell differenzierbar. Weiter seien $x_i, i=1, 2, \dots, m$, Funktionen $x_i: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, (t_1, t_2, \dots, t_m) \mapsto x_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$, mit einem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathbb{D}$, die ebenfalls stetig partiell differenzierbar sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \end{aligned}$$

wobei hier zur besseren Übersichtlichkeit die Argumente der Funktionen weggelassen wurden.

Diese allgemeine Kettenregel beinhaltet die bereits behandelten Spezialfälle. Für $n=1, m=1$ ergibt sich die Kettenregel aus der Analysis I.

Für $n=1, m$ beliebig ergibt sich die einfache Kettenregel aus Kapitel III.

Für n beliebig, $m=1$ ergibt sich die in diesem Kapitel zuerst behandelte spezielle Kettenregel.

Beispiel: Wir schreiben die Kettenregel explizit für den Fall $n=m=2$ auf, d.h. $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$,

$x: \mathbb{D}_x \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \mapsto x(t, s), y: \mathbb{D}_y \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \mapsto y(t, s)$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Beispiel: Sei $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ mit $x = t^2 - s, y = t + 2s^3$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \frac{\partial f}{\partial t} &= 4x \cdot 2t + 6y \cdot 1 = 4(t^2 - s) \cdot 2t + 6(t + 2s^3) \\ &= 8t^3 - 8st + 6t + 12s^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= 4x \cdot (-1) + 6y \cdot 6s^2 = 4(t^2 - s) \cdot (-1) + 6(t + 2s^3) \cdot 6s^2 \\ &= -4t^2 + 4s + 36ts^2 + 72s^5 \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $f(v, w) = \frac{v-w}{v+w}$ mit $v = e^{t+s}$, $w = e^{ts}$

$$\begin{aligned}\text{Es gilt: } \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \\&= \frac{(v+w) - (v-w)}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} + \frac{-(v+w) - (v-w)}{(v+w)^2} \cdot s \cdot e^{ts} \\&= \frac{2w}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} - \frac{2v}{(v+w)^2} \cdot s \cdot e^{ts} \\&= 2 \cdot \frac{e^{ts} \cdot e^{t+s} - e^{t+s} \cdot s \cdot e^{ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2} \\&= 2 \cdot (1-s) \cdot \frac{e^{t+s+ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \\&= \frac{2w}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} - \frac{2v}{(v+w)^2} \cdot t \cdot e^{ts} \\&= 2 \cdot (1-t) \cdot \frac{e^{t+s+ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}\end{aligned}$$

In ökonomischen Problemstellungen kommt es häufiger vor, dass nicht alle Funktionen explizit angegeben sind. Hier ist das Beherrschen der Kettenregel besonders wichtig.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ stetig partiell differenzierbar und $x = x(t, s)$ stetig partiell differenzierbar für $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $y = t^2 \cdot h(s)$, h differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $z = s^3$.

$$\begin{aligned}\text{Dann gilt: } \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\&= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2t \cdot h(s) \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \\&= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot t^2 \cdot \frac{dh}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 3s^2\end{aligned}$$