

I Finanzmathematische Themen an Beispielen

An den Anfang der Vorlesung in diesem Semester stellen wir ein Kapitel, in dem einige grundlegende Themen der Finanzmathematik behandelt werden. Als zentrales mathematisches Mittel behandeln wir geometrische Summen und Reihen, die z.B. bei der Berechnung von Annuitätendarlehen, Barwerten, Hypothekenrückzahlungen benötigt werden.

Wir wiederholen zunächst stichwortartig einige Begriffe aus dem letzten Semester.

Wird ein Kapital K_0 mit einer nominellen Jahreszinsrate von $r = p\%$ mit m -maliger Verzinsung pro Jahr mit der relativen Zinsrate $\frac{r}{m}$ angelegt, so beträgt das Kapital nach t Jahren

$$K_m(t) = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot t}.$$

Für $m \rightarrow \infty$ erhält man die Formel für die stetige/kontinuierliche Verzinsung $K(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} K_m(t) = K_0 \cdot e^{rt}$.

Zum Vergleich verschiedener Angebote ist es sinnvoll, diese auf einheitliche, vergleichbare Größen umzurechnen.

Bei Kreditangeboten findet man neben der Angabe des nominellen Jahreszinses auch den sogenannten Effektivzins, bei dem neben den zu zahlenden Zinsen auch z.B. Gebühren und einmalige

Kosten berücksichtigt werden. In Deutschland ist die Berechnung des Effektivzinses in der Preisangabeverordnung geregelt.

Geometrische Summe und geometrische Reihe

Bei den Anwendungen, die hier behandelt werden, stößt man auf die Berechnung von geometrischen Summen bzw. Reihen.

Wir erinnern uns zunächst an den Begriff der geometrischen Folge.

Dies ist eine Folge der Form $\{a \cdot q^n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, \dots$

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & , -1 < q < 1 \\ 1 & , q = 1 \end{cases}$$

Für $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ ist die Folge $\{q^n\}$ divergent.

Summiert man nun die ersten n Folgenglieder von

$$\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = 1, q, q^2, q^3, \dots$$

auf, so erhält man

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j.$$

Die aus der geometrischen Folge gebildete Summe S_n heißt geometrische Summe.

Beispiel: Ein Unternehmen erwartet in diesem Jahr einen Umsatz von 10 Millionen Euro. Nach einer Prognose für die nächsten 9 Jahre sind Umsatzsteigerungen von 9% pro Jahr zu erwarten.

Welcher Gesamtumsatz wird in den betrachteten 10 Jahren insgesamt erwartet?

Der Gesamtumsatz in Millionen Euro beträgt:

$$\begin{aligned} & 10 + 10 \cdot (1 + 0.09) + 10 \cdot (1 + 0.09)^2 + \dots + 10 \cdot (1 + 0.09)^9 \\ &= 10 \cdot (1 + 1.09 + 1.09^2 + \dots + 1.09^9) \approx 10 \cdot 15.19 \dots, \\ &\text{d.h. ungefähr } 151.9 \text{ Millionen Euro.} \end{aligned}$$

Je mehr Summanden bei solchen Berechnungen vorkommen, desto mühseliger ist es, alle Summanden einzeln zu berechnen und anschließend zu addieren. Wir überlegen daher, wie man für geometrische Summen eine einfache allgemeine Berechnungsformel angeben kann. Wir machen uns das Prinzip zunächst an dem vorhergehenden Zahlenbeispiel klar. Es ist

$$\begin{aligned} S_{10} &= 1 + 1.09 + 1.09^2 + 1.09^3 + 1.09^4 + 1.09^5 + 1.09^6 + 1.09^7 + 1.09^8 + 1.09^9 \\ 1.09 \cdot S_{10} &= 1.09 + 1.09^2 + 1.09^3 + 1.09^4 + 1.09^5 + 1.09^6 + 1.09^7 + 1.09^8 + 1.09^9 + 1.09^{10} \end{aligned}$$

Subtrahiert man nun die beiden Gleichungen voneinander, so erhält man:

$$(1 - 1.09)S_{10} = 1 - 1.09^{10}, \text{ d.h. } S_{10} = \frac{1 - 1.09^{10}}{1 - 1.09} \approx 15.19 \dots$$

Für die nun folgenden allgemeinen Überlegungen betrachten wir zunächst den einfachen Fall $q = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{n-1} 1^j = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = n.$$

Für $q \neq 1$ berechnen wir analog zu obigem Spezialfall:

$$\left. \begin{array}{l} S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} \\ q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n \end{array} \right\} -$$

$$(1-q)S_n = 1 - q^n$$

Da $q \neq 1$, gilt nun: $(1-q)S_n = 1 - q^n \Leftrightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$

Zusammenfassend halten wir fest die

Formel für geometrische Summen

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & , q \neq 1 \\ n & , q = 1 \end{cases}$$

Um besser mit der Anwendung dieser Formel vertraut zu werden, auch wenn die geometrische Summe "etwas versteckt" auftritt, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 \\ & = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} \\ & = \sum_{j=0}^{10} 2^j = \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2048}{-1} = 2047 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} \\ & = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \right) \\ & = \frac{1}{4} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \right) \\ & = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \frac{1}{128}}{\frac{3}{2}} = \frac{43}{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + 8 + 8\sqrt{2} \\
 & = (\sqrt{2})^0 + (\sqrt{2})^1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^5 + (\sqrt{2})^6 + (\sqrt{2})^7 \\
 & = \sum_{j=0}^7 (\sqrt{2})^j = \frac{1 - (\sqrt{2})^8}{1 - \sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2} - 1}
 \end{aligned}$$

In manchen Zusammenhängen ist es wichtig zu wissen, was passiert, wenn die Summation nicht bei einer festen Zahl aufhört, sondern beliebig fortgesetzt wird. Dies ist gleichbedeutend mit der Fragestellung, unter welchen Bedingungen der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

existiert und welchen Wert dieser gegebenenfalls hat.

Für $q=1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, d.h. die Folge $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist divergent.

Für $-1 < q < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, also ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \text{ d.h. die Folge } \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist konvergent mit dem Grenzwert } \frac{1}{1 - q}.$$

Für $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ ist $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ebenfalls divergent.

Statt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} q^j$ schreibt man $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$.

Für die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ gilt also $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1 - q}$, falls $-1 < q < 1$.

Beispiel: Eine Schätzung der Öl- und Gasreserven für ein Land im Jahr 1999 belaufe sich auf 12.5 Milliarden Tonnen. Die Förderung in 1999 betrage 250 Millionen Tonnen. Es wird beschlossen, die Fördermenge künftig jährlich um $p\%$ zu verringern. Wie groß muss p mindestens sein, wenn die Vorräte für einen beliebig langen Zeitraum ausreichen sollen?

Wir können davon ausgehen, dass $0 < p < 100$, d.h. $0 < 1 - \frac{p}{100} < 1$ gilt. Es soll also gelten:

$$\underbrace{250 \cdot 10^6}_{\text{Fördermenge 1999}} + \underbrace{250 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{p}{100}\right)}_{\text{Fördermenge 2000}} + \underbrace{250 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2}_{\text{Fördermenge 2001}} + \dots \leq 12.5 \cdot 10^9$$

$$\Leftrightarrow 250 \cdot 10^6 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^j}_{= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)} = \frac{100}{p}} \leq 12.5 \cdot 10^9$$

$$\Leftrightarrow \frac{250 \cdot 10^6}{12.5 \cdot 10^9} \cdot 100 \leq p$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq p$$

Die Fördermenge muss also jährlich um mindestens 2% gegenüber dem Vorjahr gedrosselt werden.

Barwerte und zukünftige Werte

Beispiel: Frau Antonia Nett möchte in 10 Jahren einen Betrag von 100 000 € zur Verfügung haben. Welchen Betrag B muss sie heute

dadfür anlegen, wenn die Bank ihr einen festen Zins von 5% pro Jahr garantiert?

Aus der Zinseszinsformel ermittelt man

$$100\,000 = B \cdot (1 + 0.05)^{10}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{100\,000}{1.05^{10}}$$

Bei dieser Art von "Rückrechnung" eines Wertes auf den "heutigen" Zeitpunkt spricht man auch von der Ermittlung des sogenannten Barwertes.

Allgemeiner betrachten wir folgenden Sachverhalt.

Wir gehen von einem jährlichen Zins von $p\%$, d.h. einer Zinsrate von $r = \frac{p}{100}$ aus und betrachten Zahlungen $a_1, a_2, \dots, a_n$, wobei die j -te Zahlung a_j jeweils zum Ende des j -ten Jahres stattfinden soll. Dann berechnet man den Gesamtbarwert B aller Zahlungen, d.h. den Wert, den die zukünftigen Zahlungen heute haben, zu

$$B = a_1 \cdot \frac{1}{1+r} + a_2 \cdot \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Häufig bestehen solche Zahlungen aus gleichbleibenden Beträgen a , sogenannten Annuitäten. Dann vereinfacht sich die Formel zu

$$B = a \cdot \left\{ \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} \right\}.$$

Mit der Formel für die geometrische Summe erhält man

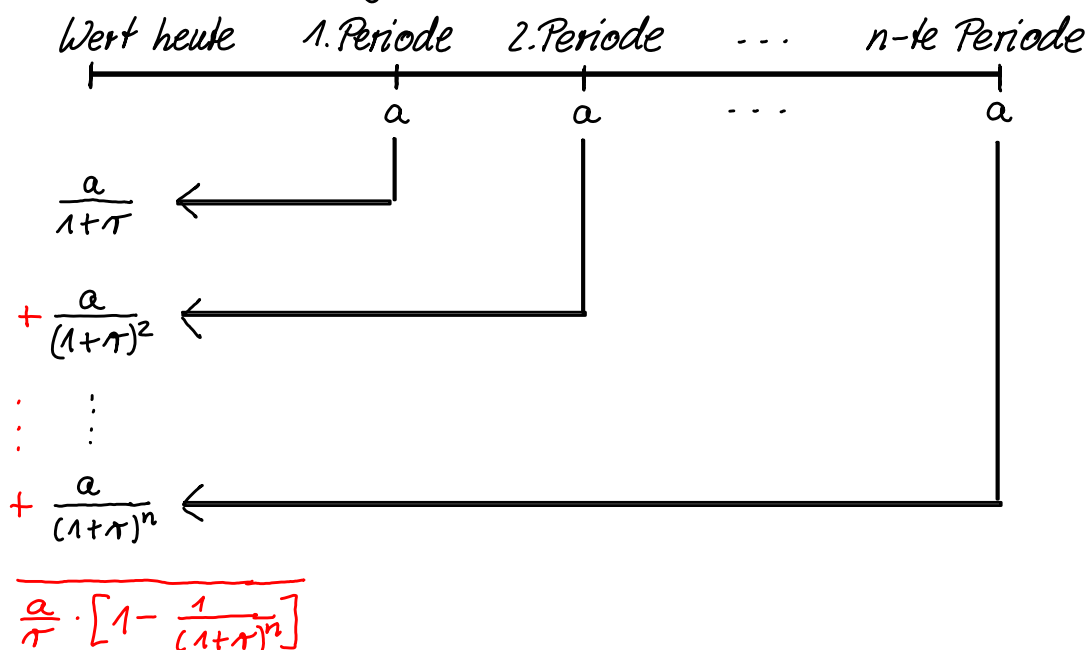
$$\begin{aligned}
 B &= \frac{a}{1+r} \left\{ 1 + \frac{1}{1+r} + \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1} \right\} \\
 &= \frac{a}{1+r} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \frac{a}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}} \\
 &= \frac{a}{1+r} \cdot \frac{\frac{(1+r)^n - 1}{1+r}}{\frac{1+r-1}{1+r}} = \frac{a}{\cancel{1+r}} \cdot \frac{[(1+r)^n - 1]}{(1+r)^n} \cdot \frac{\cancel{1+r}}{r} \\
 &= \frac{a}{r} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also folgende Formel für den Barwert einer Annuität.

Der Barwert einer Annuität über n Perioden mit Zahlungsbetrag a pro Periode bei einer Zinsrate r pro Periode beträgt

$$B_n = \frac{a}{r} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right].$$

Veranschaulichung Barwert einer Annuität:

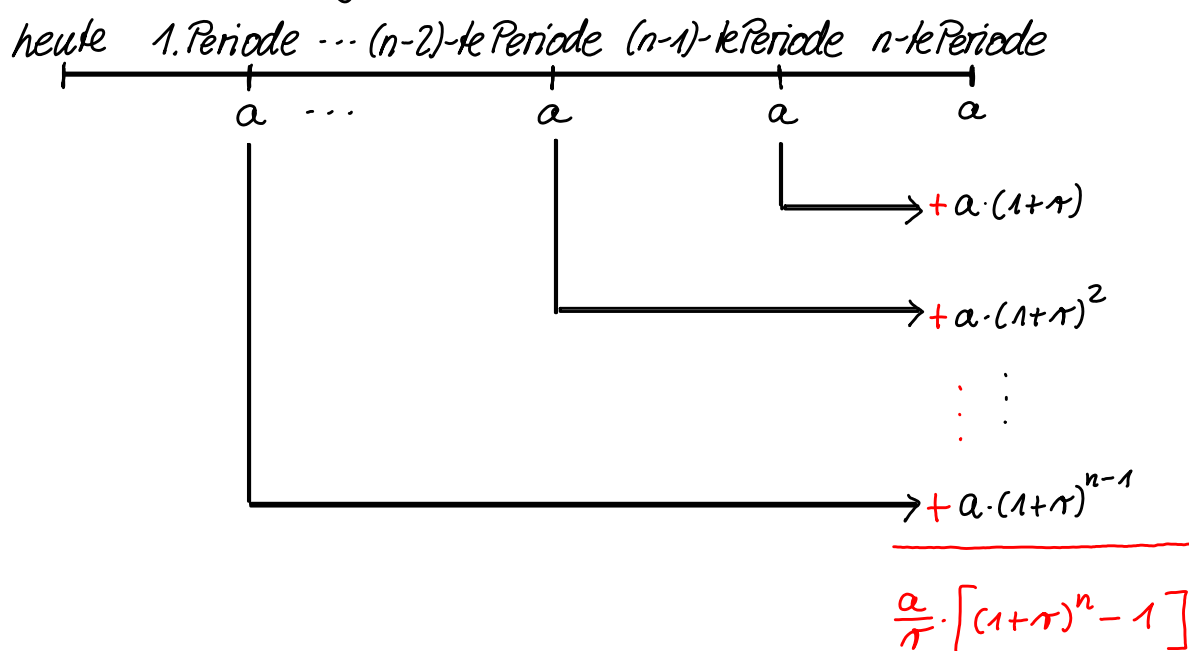


Sozusagen umgekehrt kann man auch nach dem zukünftigen Wert F_n einer Annuität fragen. Dies kann man ebenfalls mit Hilfe der geometrischen Summenformel ermitteln oder einfacher direkt aus der Formel für den Barwert herleiten. Danach ist

$$F_n = a \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (1+r)^j = a \cdot \frac{1 - (1+r)^n}{1 - (1+r)}$$

$$= \frac{a}{r} \cdot [(1+r)^n - 1] = B_n \cdot (1+r)^n$$

Veranschaulichung zukünftiger Wert



Beispiel: Jeweils am Jahresende werden über einen Zeitraum von 8 Jahren 1000 € bei 6% Zinsen pro Jahr eingezahlt.

$$a = 1000, r = 0.06, n = 8$$

$$\text{Barwert: } B_8 = \frac{1000}{0.06} \left[1 - \frac{1}{1.06^8} \right] \approx 6209.79$$

Wert nach Ablauf der 8 Jahre:

$$F_8 = \frac{1000}{0.06} \cdot [1.06^8 - 1] \approx 9897.47$$

$$\text{bzw. } F_8 = B_8 \cdot 1.06^8 \approx 9897.47$$

Hypothekenrückzahlungen

Beispiel: Eine Familie möchte ein Haus kaufen. Dazu nimmt sie bei einer Bank ein Darlehen K von 300 000 € auf. Die Hypothek soll nach 30 Jahren vollständig getilgt sein. Die Bank verlangt 5% Zinsen pro Jahr. Die Rückzahlung soll mit jährlich gleichbleibenden Zahlungen für Zins und Tilgung erfolgen (Annuitätendarlehen). Wie hoch müssen die jährlichen Annuitäten sein?

Der Barwert der insgesamt zu leistenden Zahlungen muss mit der Darlehenssumme von 300 000 € übereinstimmen. Es muss also gelten:

$$\underbrace{\frac{a}{0.05} \cdot \left[1 - \frac{1}{1.05^{30}}\right]}_{= B_{30}} = \underbrace{300\,000}_{= K}$$

$$\Leftrightarrow a = 0.05 \cdot 300\,000 \cdot \frac{1}{1 - 1.05^{-30}}$$

Die Familie muss somit in den nächsten 30 Jahren pro Jahr circa 19 515 € zahlen.

Allgemein gilt die Formel: $a = \frac{r \cdot K}{1 + (1+r)^{-n}}$

mit $r = \frac{p}{100}$, K -Darlehensbetrag, n -Laufzeit

Beispiel: Xaver Fidelius möchte eine größere Anschaffung von 20000 € machen. Dazu nimmt er einen Kredit mit 8% Jahreszins auf, den er in gleichbleibenden Raten von 5000 € pro Jahr abbezahlen will. Mit welcher Laufzeit muss er rechnen? Es muss gelten:

$$20\,000 = \frac{5000}{0.08} \cdot \left[1 - \frac{1}{1.08^n} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{20\,000 \cdot 0.08}{5000} = 1 - 1.08^{-n}$$

$$\Leftrightarrow 1.08^{-n} = \frac{5000 - 20\,000 \cdot 0.08}{5000}$$

$$\Leftrightarrow 1.08^n = \frac{5000}{5000 - 20\,000 \cdot 0.08} \quad \left| \text{Anwenden Logarithmus} \right.$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln 1.08 = \ln 5000 - \ln(5000 - 20\,000 \cdot 0.08)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 5000 - \ln(5000 - 20\,000 \cdot 0.08)}{\ln 1.08}$$

Er muss mit etwas mehr als 5 Jahren rechnen. Damit er den Überblick behält, erstellt er für 5 Jahre einen Tilgungsplan.

Jahr	Zahlung	Zins	Tilgung	Restschuld
1	5000	1600	3400	16600
2	5000	1328	3672	12928
3	5000	1034.24	3965.76	8962.24
4	5000	716.98	4283.02	4679.22
5	5000	374.34	4625.66	53.56

Allgemein gilt für die Laufzeit: $n = \frac{\ln a - \ln(a - r \cdot K)}{\ln(1+r)}$