Mathematik I & II für Wirtschaftswissenschaftler

8. Übung

Wintersemester 2009/10

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Fachgruppe Mathematik, Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation
Prof. Dr. M. Heilmann, Dipl. Math. J. Gorski, Dipl. Math. M. Wagner

Besprechung der Aufgaben: In den Übungen vom **14. Dezember 2009** bis **18. Dezember 2009**

Betrachten Sie die nächsten beiden Aufgaben bitte als "Gehirnjogging" zum Einüben der Differentiationsregeln auch bei komplizierteren Funktionen. Da nicht alle Teilaufgaben in den Tutorien besprochen werden können, werden wir eine Liste mit den **Ergebnissen** verteilen. Es ist wichtig, dass Sie **vorher** diese Ergebnisse **selbst** versuchen zu ermitteln.

Aufgabe 8.1
Differenzieren Sie die folgenden Funktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

a) $f(x) = 2x^4 - \frac{1}{8}x^5 + 5$ b) $f(t) = \sqrt[5]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ c) $f(s) = 8s^4 \cdot \mathrm{e}^{s}$

d) $f(z) = \left(\frac{1}{2}z^3 - \sqrt{z}\right)\ln z$ e) $f(x) = x^{-1}(x^2+1)\sqrt{x}$ f) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

g) $f(x) = (3x+1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$ h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ i) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

j) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ k) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x+7\right)^{100}$ l) $f(x) = \sqrt[7]{3x+1}$

m) $f(t) = 4\left(\frac{1}{2}t^2 + \sqrt{t}\right)^{70}$ n) $f(x) = \sqrt{\ln(2x+0.5)}$ o) $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{x^2-2x+1}$

p) $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) + 2$ q) $f(x) = \ln\ln(x^2-1)$ r) $f(t) = t^4 \cdot \mathrm{e}^{-3t}$

s) $f(p) = p \cdot \ln p$ t) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{3x+1}}$ u) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Aufgabe 8.2
Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen den Definitionsbereich und diejenigen Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend und diejenigen Intervalle, in denen die Funktion monoton fallend ist.

a) $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 6x^2)$ b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$ c) $f(x) = \frac{3x}{x^2+x-2}$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ e) $f(x) = \ln(x^2+2)$

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 (Abgabe in den Übungen möglich)

a) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $\vec{a}^{\top} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b}^{\top} = (3,4) \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, und stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Basisvektoren dar.

Aufgabe 8.4

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 8.5

Im folgenden betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^2, \\ \vec{x} & \mapsto A \cdot \vec{x}, \end{cases}$$

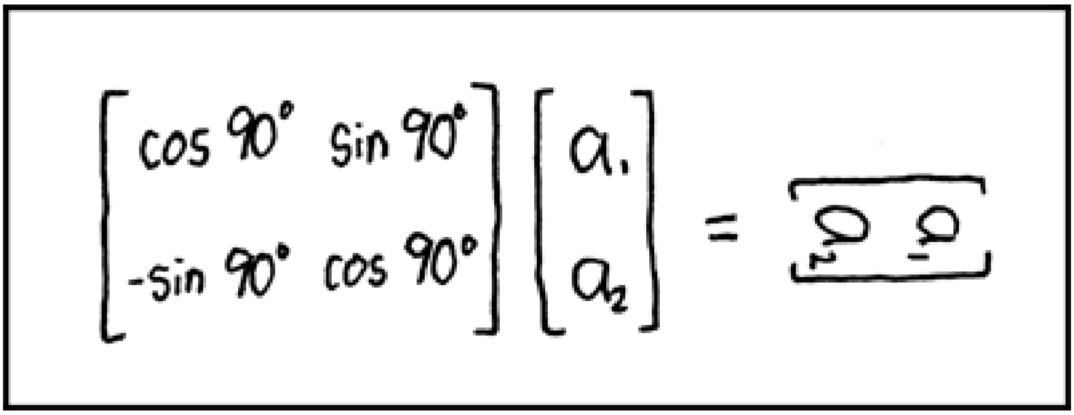
die jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ den Bildvektor $\varphi_A(x) \in \mathbb{R}^2$ zuordnet. Es sei

$$i) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad iii) \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$iv) \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad vi) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche Wirkung hat die Abbildung φ_A jeweils auf Punkte der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$?

Hinweis: Wählen Sie sich einige Punkte aus der reellen Zahlenebene und überlegen Sie sich, was mit ihnen unter der jeweiligen Abbildung φ_A passiert. Versuchen Sie dann, das Ergebnis für beliebiges $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ zu verallgemeinern.



Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zum Tutorium finden Sie im Internet unter:

http://www.math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi/index.html