Mathematik I & II für Wirtschaftswissenschaftler

7. Übung

Wintersemester 2009/10

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C, Fachgruppe Mathematik, Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation
Prof. Dr. M. Heilmann, Dipl. Math. J. Gorski, Dipl. Math. M. Wagner

Besprechung der Aufgaben: In den Übungen vom **7. Dezember 2009** bis **11. Dezember 2009**

Aufgabe 7.1
In einer Population von Taufliegen werden 20 Tiere gezählt. Am nächsten Tag sind es bereits 25 Tiere. Es wird geschätzt, dass die Population auf maximal 320 Fliegen anwachsen kann.
Ermitteln Sie ein Modell für die Anzahl f von Fliegen nach t Tagen, wenn logistisches Wachstum angenommen werden kann, d.h. wenn f eine Funktion der folgenden Form ist:

$$f(t) = \frac{A}{1 + B \cdot \mathrm{e}^{-kt}},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k > 0$ gilt.

Aufgabe 7.2
Ist die Funktion $f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D}_f = [-9, \infty)$ und

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{7} & \text{für x} = 0, \end{cases}$$

stetig im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$?

Aufgabe 7.3
In einem Beispiel in der Vorlesung waren die Abgaben für ein Einkommen x zwischen 4000 und 10000 Euro gegeben durch

$$s(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^2 + 5 \cdot 10^{-2} x\,.$$

Bestimmen Sie den Grenzsteuersatz $s'(x)$ und die Grenzsteuersätze, wenn die Abgaben nach den beiden, in der Vorlesung besprochenen, verschiedenen Modellen gesenkt werden und berechnen Sie Beispielwerte für ein Einkommen von 5000, 7000 bzw. 9000 Euro.

Aufgabe 7.4
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ seien die drei Vektoren $\vec{a}^{\top} = (3, 1) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{b}^{\top} = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{x}_\lambda = \lambda\vec{a} + (1-\lambda)\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinanten des Vektors $\vec{x}_\lambda$ für alle Werte $\lambda \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$, und markieren Sie die Zielpunkte der Ortsvektoren im x_1x_2- Koordinatensystem. Welche Punktmenge stellen die Zielpunkte von $\vec{x}_\lambda$ dar, wenn λ alle Werte im Intervall $[0, 1]$ bzw. alle reellen Zahlen durchläuft?

Aufgabe 7.5
Bestimmen Sie die Länge der der Vektoren $\vec{a}^{\top} = (2, -3, -6)$, $\vec{b}^{\top} = (-4, 1, 8)$ und $\vec{c}^{\top} = (9, -4, 5)$. Welche der drei gegebenen Vektoren sind zueinander orthogonal? Wie lauten ihre jeweiligen Einheitsvektoren?

Aufgabe 7.6
Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Vektoren $\vec{a}^{\top} = (2, 1, -2)$ und $\vec{b}^{\top} = (6, -1, -2)$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts alle Vektoren $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$, die gleichzeitig auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht stehen und Einheitslänge haben.

Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zum Tutorium finden Sie im Internet unter:

http://www.math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi/index.html