



**Aufgabe 6.1** (Abgabe in den Übungen möglich)

Da Folgen Funktionen mit  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{N}$  sind, lassen sich die Begriffe Monotonie und Beschränktheit folgendermaßen übertragen. Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt streng monoton wachsend (monoton wachsend), wenn für alle  $n$  gilt  $a_n < a_{n+1}$  ( $a_n \leq a_{n+1}$ ). Sie heißt streng monoton fallend (monoton fallend), wenn für alle  $n$  gilt  $a_n > a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ). Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es eine Konstante  $C$  gibt mit  $a_n \leq C$  ( $a_n \geq C$ ) für jedes  $n$ . Gegeben seien die folgenden Folgen:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1 + 5n^2}{n^2 + 1} \right\}, \quad \{b_n\} = \left\{ \frac{4n^2 + 25}{4n + 1} \right\} \quad \text{und} \quad \{c_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n + 1}{n^3 + 6n + 1} \right\}.$$

- Skizzieren Sie die Graphen der drei gegebenen Folgen.
- Untersuchen Sie die Folgen auf Beschränktheit und zusätzlich die Folge  $\{a_n\}$  auf Monotonie.
- Berechnen Sie die Grenzwerte der drei Folgen, sofern sie existieren.

*Hinweis:* Zur Berechnung der Grenzwerte klammere man jeweils in Zähler und Nenner die höchste vorkommende Potenz von  $n$  aus und kürze im Anschluss.

**Aufgabe 6.2**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}.$$

**Aufgabe 6.3**

Berechnen Sie sämtliche Potenzen, d.h.  $M, M^2, M^3, \dots, M^n, n \in \mathbb{N}$ , für folgende Matrizen:

$$A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 12 \\ 21 & 15 & 21 \\ -27 & -18 & -26 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6.4**

Mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^\top = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Geben Sie an, welche der folgenden Produkte im Sinne eines Matrixprodukts wohldefiniert sind und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$AB, A^\top B, BA, B^\top A, CA, B^\top C, Ax, Bx, Cx, x^\top B.$$

*Bemerkung:* Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zum Tutorium finden Sie im Internet unter:

<http://www.math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi/index.html>