V Eigenwerte und quadratische Formen

Eigenwerte und Eigenvektoren

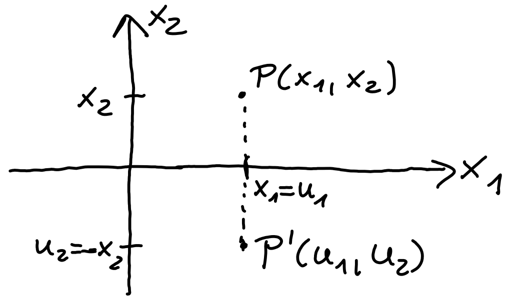
In vielen Anwendungen der Mathematik spielen Eigenwerte und Eigenvektoren eine wichtige Rolle. In diesem Zusammenhang geht es darum, die Gleichung $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ mit einer quadratischen $(n \times n)$-Matrix A, $\vec{x} = (x_1, ---, x_n)^T$, λ skalare Größe, zu lösen.

Natürlich ist $\vec{x} = \vec{0}$ immer Lösung dieser Gleichung, sie ist die sogenannte triviale Lösung. Interessant sind Lösungen $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Geometrisch gesehen ist ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ erfüllt, ein Vektor, der bei Multiplikation mit der Matrix A einen Vektor gleicher Richtung ($\lambda > 0$) oder entgegengesetzter Richtung ergibt ($\lambda < 0$).

Beispiel: Wir betrachten die Spiegelung eines Punktes $P(x_1, x_2)$ in der x_1x_2-Ebene an der x_1-Achse. Die Spiegelung liefert einen Bildpunkt $P'(u_1, u_2)$ mit $u_1 = x_1$ und $u_2 = -x_2$ bzw.

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = u_1$$
$$0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = u_2$$



In Matrix-Vektor-Schreibweise bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Die Fragestellung ist nun folgende: Welche vom Nullvektor verschiedenen Vektoren gehen bei der Spiegelung, d.h. der Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in einen Vektor gleicher oder entgegengesetzter Richtung über? Anders ausgedrückt: Wann gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \;?$$

Wir formen diese Gleichung zunächst geeignet um.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff A\vec{x} = \lambda \cdot E\vec{x}$$
$$\iff (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

Es handelt sich also um ein homogenes lineares Gleichungssystem. Es besitzt genau dann vom Nullvektor verschiedene Lösungen, wenn $\det(A-\lambda E)=0$ gilt, d.h. in unserem Beispiel, wenn

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda)=0$$
$$\iff \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = -1$$

Diese Lösungen heißen Eigenwerte der Matrix A. Zu diesen bestimmt man nun jeweils die sogenannten Eigenvektoren, d.h. Vektoren, die die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ bzw. äquivalent dazu die Gleichung $(A - \lambda\vec{x}) = \vec{0}$ für das jeweilige λ erfüllen.

$\lambda_1 = 1$: Dann gilt

$$(A - 1 \cdot E)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x_1 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \wedge x_2 = 0$$

Somit ist $\vec{x}_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^*$, Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Dieser ist nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nach Normierung auf den Betrag (die Länge) 1 erhält man den normierten Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_2 = -1$: Dann gilt

$$(A - (-1) \cdot E)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff x_1 = 0 \wedge x_2 = \beta, \beta \in \mathbb{R}$$

Somit ist $\vec{x}_2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}^*$, Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Dieser ist nur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nach Normierung auf den Betrag (die Länge) 1 erhält man den normierten Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

Geometrisch bedeuten die Ergebnisse, dass Ortsvektoren mit Zielpunkt auf der x_1-Achse auf sich selbst abgebildet werden, und Ortsvektoren mit Zielpunkt auf der x_2-Achse auf ihren Gegenvektoren (Vektor gleicher Länge aber entgegengesetzter Richtung) abgebildet werden.

Bevor wir die mathematische Behandlung der Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ allgemeiner betrachten und vertiefen, sollen einige Beispiele für Anwendungen aufgezeigt werden, die im Rahmen dieser Vorlesung allerdings nicht vertiefend behandelt werden können.

- Die sogenannte Faktorenanalyse zählt zu den klassischen Verfahren der multivariaten Statistik. Das Ziel ist die Strukturierung umfangreicher Datenmengen. Dabei dient die Größe von Eigenwerten als Kriterium für die Entscheidung, ob bestimmte Faktoren im faktoranalytischen Modell beibehalten oder vernachlässigt werden sollen.
- Sogenannte Definitheitseigenschaften von Matrizen, die sich über die Eigenwerte untersuchen lassen, spielen eine wichtige Rolle bei der Bestimmung lokaler Extremalstellen für Funktionen mehrerer Variablen, die geeignete Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen. (vgl. Analysis II)
- Suchmaschinen wie Google nutzen Eigenwertmethoden, um Internetseiten schnell und effizient in eine entsprechende Reihenfolge zu bringen. (vgl. z.B. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/ems63-pablo-fernandez_final.pdf)

Wir betrachten nun die Aufgabenstellung von einem allgemeineren Blickwinkel.

Wir betrachten für eine (nxn)-Matrix die Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

Ein $\vec{x} \neq \vec{0}$ kann nur Lösung dieser Gleichung sein, wenn die Koeffizientenmatrix dieses homogenen linearen Gleichungssystems nicht vollen Rang hat, d.h. wenn $Rg(A-\lambda E) < n$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Eigenwertgleichung

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Die Determinante in dieser Gleichung ist ein Polynom n-ten Grades in λ und heißt charakteristisches Polynom der Matrix A.

Das Lösen der Eigenwertgleichung ist somit äquivalent zur Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Diese Nullstellen heißen Eigenwerte der Matrix A.

Wir (sollten) wissen, dass sich ein Polynom n-ten Grades in der Form $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_m)(\lambda^2+\lambda p_1+q_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda^2+\lambda p_\ell+q_\ell)$ faktorisieren lässt. Dabei bezeichnen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Die Terme der Form $\lambda^2+p_r\lambda+q_r$ sind sogenannte "in $\mathbb{R}$ irreduzible" quadratische Faktoren. Das bedeutet, dass $\left(\frac{p_r}{2}\right)^2 - q_r < 0$ ist, solche Terme somit keine reellen Nullstellen besitzten. Sie lassen sich im Reellen nicht weiter in Linearfaktoren zerlegen.

An dieser Stelle sei der Hinweis erlaubt, dass die Mathematik als Erweiterung der reellen Zahlen die sogenannten komplexen Zahlen kennt, mit deren Hilfe man diese quadratischen Terme "eben im Komplexen" in Linearfaktoren zerlegen kann. Für eine vollständige Behandlung von Eigenwertproblemen ist die Kenntniss komplexer Zahlen nötig. Wir werden das Thema hier allerdings so eingeschränkt betrachten, dass wir ohne komplexe Zahlen auskommen (Wir bleiben also ganz reell ☺). Es kommen also nur Beispiele mit reellen Eigenwerten in Betracht.

Allgemein gilt nun: Ist λ_i eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so heißt ein Vektor $\vec{x}_i \neq \vec{0}$, der die Gleichung

$$(A - \lambda_i E)\vec{x}_i = \vec{0}$$

erfüllt, ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_i. Mit $\vec{x}_i$ ist auch jeder Vektor $\alpha \cdot \vec{x}_i$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i. Wählt man α so, dass $|\alpha \cdot \vec{x}_i| = 1$ ist, d.h. $\alpha = \frac{1}{|\vec{x}_i|}$, so erhält man mit $\vec{v}_i = \frac{1}{|\vec{x}_i|} \cdot \vec{x}_i$ den zugehörigen normierten Eigenvektor.

Aus dem vorangestellten Beispiel und den anschließenden Erläuterungen lässt sich nun unmittelbar die folgende Berechnungsstrategie für Eigenwerte und Eigenvektoren ablesen.

1. Schritt: Berechne – als Funktion von λ – das charakteristische Polynom p der Matrix A gemäß $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

2. Schritt: Berechne alle (unter Umständen auch mehrfach vorkommende) Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms. Dies sind die Eigenwerte von A.

3. Schritt: Berechne für jedes λ_i eine vom Nullvektor verschiedene Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i E)\vec{x}_i = \vec{0}.$$

Dann ist $\vec{x}_i$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_i und $\vec{v}_i = \frac{1}{|\vec{x}_i|} \cdot \vec{x}_i$ der zugehörige normierte Eigenvektor.

Bevor wir das Vorgehen an Beispielen nachvollziehen, geben wir noch eine Eigenschaft für zwei der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms und Beziehungen zwischen den Eigenwerten und aus der Matrix A gebildeten Werten an, die insbesondere bei den entsprechenden Rechnungen für (2×2) Matrizen nützlich sind, aber auch bei größeren Matrizen zur Überprüfung von Berechnungen verwendet werden können.

Dazu definieren wir zunächst die Spur einer quadratischen Matrix A als Summe ihrer Diagonalelemente, d.h.

$$Sp(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ einer $(n\times n)$-Matrix A hat stets die Form

$$p(\lambda) = (-\lambda)^n + c_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + c_{n-2}(-\lambda)^{n-2} + \dots + c_1(-\lambda) + c_0 .$$

Es gelten folgende Zusammenhänge, wobei mehrfach vorkommende Eigenwerte entsprechend oft berücksichtigt werden.

1) Die Spur der Matrix $Sp(A)$ ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte und stimmt mit dem Koeffizienten c_{n-1} des charakteristischen Polynoms überein.
2) Die Determinante der Matrix $\det(A)$ ist gleich dem Produkt ihrer Eigenwerte und stimmt mit dem Koeffizienten c_0 des charakteristischen Polynoms überein.

Insbesondere gilt damit für das charakteristische Polynom einer (2×2)-Matrix A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^2 + Sp(A)\cdot(-\lambda) + \det(A)$$
$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22})$$

Nach Berechnung der Eigenwerte kann man überprüfen, ob ihre Summe mit der Spur und ihr Produkt mit der Determinante der Matrix übereinstimmt.

Beispiel: Wir bestimmen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, wobei gilt $\det(A) = 4$, $Sp(A) = 5$.

1. Schritt: Berechnen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\underbrace{5}_{=\mathrm{Sp}(A)}\lambda^2-8\lambda+\underbrace{4}_{=\det(A)}$$

2. Schritt: Berechnen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Um die Nullstellen bestimmen zu können, müssen wir $p(\lambda)$ faktorisieren. Da es sich um ein Polynom dritten Grades handelt, müssen wir zunächst eine Nullstelle ermitteln. Da bei einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ganzzahlige Nullstellen stets Teiler des Absolutgliedes sind (vgl. Vorkurs) probieren wir die Teiler von 4.

Es gilt: $p(1)=-1+5-8+4=0$

Weiter erhält man mit Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4):(\lambda-1)=-\lambda^2+4\lambda-4=-(\lambda-2)^2 \\ \underline{-\lambda^3+\lambda^2} \\ \quad 4\lambda^2-8\lambda \\ \quad \underline{4\lambda^2-4\lambda} \\ \qquad -4\lambda+4 \\ \qquad \underline{-4\lambda+4} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Somit gilt: $p(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$$p(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda_1=1 \vee \lambda_{2,3}=2$$

Die Matrix A besitzt somit den (einfachen) Eigenwert $\lambda_1=1$ und den (doppelten) Eigenwert $\lambda_{2,3}=2$.

$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+2+2=5=\mathrm{Sp}(A),\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=1\cdot2\cdot2=4=\det(A))$

3. Schritt: Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren

a) zu $\lambda_1=1$: Gleichungssystem $(A-\lambda_1 E)\vec{x}_1=\vec{0}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 4 & -6 & -6 & \\ -1 & 3 & 2 & (\tfrac{1}{4}) \\ 3 & -6 & -5 & (-\tfrac{3}{4}) \\ \hline 4 & -6 & -6 & \\ & \tfrac{3}{2} & \tfrac{1}{2} & \\ & -\tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} & (1) \\ \hline 4 & -6 & -6 & \\ & \tfrac{3}{2} & \tfrac{1}{2} & \\ & & 0 & \end{array}$$

$\mathrm{Rg}(A-\lambda_1 E)=2$

Rückwärtsauflösen liefert:

$x_3=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},\ x_2=-\frac{1}{3}\alpha,\ x_1=\alpha$

Somit ist $\vec{x}_1=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\alpha\neq0$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=1$.

Mit $\left\|\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{19}}{3}$ ist $\vec{v}_1 = \frac{3}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$ der zugehörige normierte Eigenvektor.

b) zu $\lambda_2 = 2$: Gleichungssystem $(A-\lambda_{2,3}E)\vec{x}_{2,3} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}3 & -6 & -6\\-1 & 2 & 2\\3 & -6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{ccc|l}3 & -6 & -6 & \\ -1 & 2 & 2 & \cdot(\frac{1}{3}) \\ 3 & -6 & -6 & \cdot(-1) \\ \hline 3 & -6 & -6 & \\ & & 0 & \\ & & 0 & \end{array}$$

$Rg(A-\lambda_{2,3}E) = 1$

Rückwärtsauflösen – 2 Freiheitsgrade

$x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$; $x_2 = \beta, \beta \in \mathbb{R}$; $x_1 = 2\alpha + 2\beta$

Somit ist $\vec{x}_{2,3} = \begin{pmatrix}2\alpha+2\beta\\ \beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ für α, β nicht gleichzeitig gleich Null Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{2,3} = 2$.

Wir untersuchen dies noch etwas genauer: Setzt man z.B. $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ so erhält man den Eigenvektor $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Für $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ erhält man den Eigenvektor $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Wir erhalten also 2 linear unabhängige Eigenvektoren zu dem doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = 2$.

Mit $\left\|\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}$ und $\left\|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}$ also die beiden linear unabhängigen, normierten Eigenvektoren $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Beispiel: Wir bestimmen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, wobei gilt $\det(A) = 1$, $Sp(A) = 3$.

1. Schritt: Berechnen des charakteristischen Polynoms.

$$p(\lambda) = \det(B-\lambda E) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\0 & 1-\lambda & 1\\0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

2. Schritt: Berechnen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$p(\lambda)=0 \iff \lambda_{1,2,3}=1$

Die Matrix B besitzt also den dreifachen Eigenwert $\lambda_{1,2,3}=1$.

$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3=Sp(A),\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=det(A))$

3. Schritt: Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren

Gleichungssystem $(B-1\cdot E)\vec{x}=\vec{0}$, d.h.

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix}0&1&1\\&&1\\&&0\end{matrix}\right|$$

keine Rechnung erforderlich; Zeilenstufenf.

$Rg(B-1\cdot E)=2$

Rückwärtsauflösen: $x_3=0$; $x_2=0$; $x_1=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Somit ist $\vec{x}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ für $\alpha\neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{1,2,3}=1$, insbesondere gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor zum dreifachen Eigenwert. Der zugehörige normierte Eigenvektor ist offenbar $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Die beiden Beispiele werfen bereits einige Fragen auf.

Wie viele verschiedene Eigenwerte gibt es?

Wie viele linear unabhängige Eigenvektoren gibt es?

Antwort darauf gibt der folgende Satz.

Satz: Sei A eine $(n\times n)$-Matrix. Dann gilt:

1) A hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

2) Zu jedem Eigenwert λ von A gibt es genau $(n-Rg(A-\lambda E))$ linear unabhängige Eigenvektoren.

3) Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ zugehörige Eigenvektoren, dann sind die Eigenvektoren linear unabhängig.

Im folgenden benötigen wir noch eine weitere Eigenschaft von Eigenwerten. Es gilt der folgende Zusammenhang.

Satz: Ist A eine $(n \times n)$-Matrix und gilt $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, so gilt auch

$$B\vec{y} = \lambda\vec{y} \quad \text{für} \quad B = R^{-1}AR \text{ und } \vec{y} = R^{-1}\vec{x}$$

für jede reguläre $(n \times n)$-Matrix R.

Eine solche Transformation von Matrizen heißt Ähnlichkeitstransformation, die Matrix R heißt Transformationsmatrix und die Matrizen A und $B = R^{-1}AR$ heißen ähnlich.

Ähnliche Matrizen besitzen also dieselben Eigenwerte und dasselbe charakteristische Polynom.

denn: Mit $B = R^{-1}AR$ und $\vec{y} = R^{-1}\vec{x}$ gilt:

$$B\vec{y} = (R^{-1}AR)\cdot(R^{-1}\vec{x}) = R^{-1}A\underbrace{(RR^{-1})}_{=E}\vec{x} = R^{-1}\underbrace{A\vec{x}}_{=\lambda\vec{x}} = \lambda R^{-1}\vec{x} = \lambda\vec{y}$$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ die Matrix aus dem vorletzten Beispiel. Die Eigenwerte und Eigenvektoren hatten wir bereits berechnet zu $\lambda_1 = 1$, $\vec{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_{2,3} = 2$, $\vec{x}_{2,3} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sei nun $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3/4 & 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$. Es gilt $\det(R) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3/4 & 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} \neq 0$, also ist R regulär. Die zu R inverse Matrix ist $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Mit dem letzten Satz wissen wir nun, dass für die Matrix

$$B = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3/4 & 1/4 & 3/4 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{113}{4} & \frac{59}{4} & -\frac{85}{4} \\ \frac{221}{4} & -\frac{111}{4} & -\frac{153}{4} \\ \frac{39}{2} & -\frac{21}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

das Eigenwertproblem gelöst wird durch:

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{y}_1 = R^{-1}\vec{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{17}{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

$$\lambda_{2,3} = 2, \quad \vec{y}_{2,3} = R^{-1}\vec{x}_{2,3} = \begin{pmatrix} 6\alpha + 4\beta \\ 6\alpha + \beta \\ 4\alpha + 5\beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \text{ nicht beide } 0.$$

Eine besondere Rolle spielen nun Matrizen, die zu einer Diagonalmatrix, d.h. einer Matrix, deren Einträge außerhalb der Diagonalen Null sind, ähnlich sind.

Definition: Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt *diagonalisierbar* oder *diagonalähnlich*, wenn es eine reguläre Matrix R und eine Diagonalmatrix D gibt, so dass $D = R^{-1} A R$ gilt, d.h. A und D ähnlich sind.

Der folgende Satz charakterisiert diagonalähnliche Matrizen und gibt gleichzeitig eine Methode zur Bestimmung der Transformationsmatrix R an.

Satz: Eine $(n \times n)$-Matrix ist genau dann diagonalähnlich, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ besitzt. Für die Transformationsmatrix gilt dann $R = (\vec{x}_1 \; \vec{x}_2 \; \cdots \; \vec{x}_n)$ und für die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Beispiel: Aus unseren vorigen Beispielen wissen wir, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ die drei linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

Daraus bilden wir die (reguläre) Transformationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit der Inversen } R^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit bestätigt man

$$D = R^{-1} A R = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -12 & -10 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Viele Matrizen, die in ökonomischen Anwendungen vorkommen, sind symmetrisch, d.h. stimmen mit ihrer Transponierten überein (vgl. Kapitel 2). Für solche Matrizen ist die Eigenwerttheorie wesentlich einfacher als für nicht symmetrische Matrizen. Wir halten daher noch einige spezielle Ergebnisse für solche Matrizen fest.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. es gelte $A^T = A$.

Dann gilt:

1) Jeder Eigenwert von A ist reell.
2) Zwei zu verschiedenen Eigenwerten von A gehörende Eigenvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind orthogonal, d.h.
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0.$$
3) Es gibt eine orthonormale Basis von Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.
4) A ist diagonalisierbar. Die Transformationsmatrix R wird wird dabei gebildet aus den Eigenvektoren als Spalten, d.h. $R = (\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_n)$.
5) Verwendet man für die in 4) angegebene Transformationsmatrix die normierten Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, so gilt $R^T \cdot R = E$, d.h. die Transponierte ist gleich ihrer Inversen.
(Solche Matrizen heißen orthogonal.)

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt $A = A^T$, d.h. A ist symmetrisch.

Wir bestätigen durch Nachrechnen die Aussagen des letzten Satzes durch Nachrechnen.

a) Bestimmung der Eigenwerte.
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$$

Da $p(1) = 0$, findet man durch Polynomdivision und Anwendung der pq-Formel:

$p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+8) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$.

Somit hat A die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$.

b) Berechung der zugehörigen Eigenvektoren.

zu $\lambda_1 = 1$: Lösen von $(A - 1\cdot E)\vec{x}_1 = \vec{0}$ liefert $\vec{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$,

normierter Eigenvektor $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

zu $\lambda_2 = 2$: Lösen von $(A - 2\cdot E)\vec{x}_2 = \vec{0}$ liefert $\vec{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$,

normierter Eigenvektor $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

zu $\lambda_3 = 4$: Lösen von $(A - 4\cdot E)\vec{x}_3 = \vec{0}$ liefert $\vec{x}_3 = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\gamma \neq 0$,

normierter Eigenvektor $\vec{v}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für die inneren Produkte der Eigenvektoren gilt:

$$< \vec{v}_1, \vec{v}_2 > = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1+1) = 0$$

$$< \vec{v}_1, \vec{v}_3 > = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) = 0$$

$$< \vec{v}_2, \vec{v}_3 > = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Verschiedene Eigenvektoren sind also orthogonal. Da sie linear unabhängig sind, bilden sie eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aus den normierten Eigenvektoren bilden wir die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}. \text{ Es gilt } R^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Durch Nachrechnen von $R \cdot R^T$ bestätigt man $R^T = R^{-1}$ sowie

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Quadratische Formen

Abschließend beschäftigen wir uns noch mit einem neuen Begriff, dem der quadratischen Formen, deren Eigenschaften eng mit dem Verhalten von Eigenwerten quadratischer Matrizen verknüpft ist. Quadratische Formen treten z.B. auf in der Statistik, bei Problemstellungen mit mehrdimensionalen Preis-Absatz-Beziehungen, sowie bei quadratischen Optimierungsproblemen, bei denen man das Minimum oder Maximum einer quadratischen Form (Zielfunktion) gegebenenfalls unter einschränkenden Nebenbedingungen sucht. Solche quadratischen Optimierungsprobleme werden auch zur Approximation allgemeinerer nichtlinearer Optimierungsprobleme auf. Im Zusammenhang damit stehen Definitheitseigenschaften der in quadratischen Formen auftretenden Matrizen, die in enger Beziehung zu den Eigenwerten stehen. Solche Definitheitseigenschaften von Matrizen werden wir auch im kommenden Semester benötigen, um Kriterien für lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen zu formulieren.

Ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ein Variablenvektor und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so nennt man $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ eine quadratische Form.

Beispiel: Für $n=2$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$q(\vec{x}) = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1 x_2$$

Man beachte, dass man mit der symmetrischen Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$ auf dieselbe quadratische Form kommt.

Für $n=3$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\vec{q}(\vec{x}) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + (a_{13}+a_{31})x_1x_3 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3$$

Man beachte, dass man auch hier mit der symmetrischen Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32}+a_{23}) & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T) \text{ auf dieselbe}$$

quadratische Form kommt.

Auch in allgemeinen Fall lässt sich eine quadratische Form stets mit einer symmetrischen Matrix darstellen. Wir können also ohne Einschränkung voraussetzen, das A symmetrisch ist.
Für eine symmetrische Matrix A, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ lässt sich nun die quadratische Form allgemein berechnen zu:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2 a_{ij} x_i x_j \ .$$

Beispiel: Sei $q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$.
Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, A symmetrisch, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ gilt.
Offenbar ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Beispiel: Sei $q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.
Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, A symmetrisch, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ gilt.
Offenbar ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

In vielen Anwendungen ist man nun an Bedingungen an die Matrix A interessiert, die sicherstellen, dass $q(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$ dasselbe Vorzeichen besitzt.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt die quadratische Form $\vec{x}^T A \vec{x}$ bzw. die Matrix A

1) positiv definit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
2) positiv semidefinit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
3) negativ definit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
4) negativ semidefinit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
5) indefinit, wenn sie weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Beispiel:

$(x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ist positiv definit, da Quadrate stets nichtnegativ sind und für $\vec{x} \neq \vec{0}$ mindestens ein $x_i \neq 0$, d.h. $x_i^2 > 0$ sein muss.

Beispiel:

$$(x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2$$

Die Entscheidung fällt hier nicht so leicht, wie in unserem ersten Beispiel.
Es gilt aber:

$$\begin{aligned} -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 &= -\left((2x_1)^2 + 4x_1x_2 + x_2^2\right) - 3x_3^2 \\ &= -(2x_1 + x_2)^2 - 3x_3^2 \end{aligned}$$

Da Quadrate stets nichtnegativ sind, ist der Ausdruck auf jeden Fall kleiner oder gleich Null für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$. Er wird z.B. Null für $\vec{x} = (1, -2, 0)^T$. Somit ist die quadratische Form negativ semidefinit.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Entscheidung über Definitheitseigenschaften einer Matrix nicht durch einfaches Hinschauen gefällt werden kann. Wir werden uns daher mit Kriterien und geeignetem mathematischen Werkzeug für die Untersuchung von Definitheitseigenschaften von Matrizen beschäftigen.

Eine Möglichkeit besteht in der Untersuchung der Eigenwerte. Es gilt die folgende Charakterisierung.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:

1) A positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte > 0
2) A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte ≥ 0
3) A negativ definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte < 0
4) A negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte ≤ 0
5) A indefinit $\Leftrightarrow$ A hat positive und negative Eigenwerte

Beispiel: Wir untersuchen die Definitheitseigenschaften der quadratischen Form $q(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_3^2$

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dazu bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Charakteristisches Polynom:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(9-\lambda)(2-\lambda) - 9(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(9-\lambda) - 9\right]$$

$$= (2-\lambda)(9 - 10\lambda + \lambda^2 - 9)$$

$$= (2-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda - 10)$$

Somit gilt: $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 0 \vee \lambda_3 = 10$

Damit sind A und die quadratische Form positiv semidefinit.

Beispiel: Wir untersuchen die Definitheitseigenschaften der quadratischen Form $q(\vec{x}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen wieder die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Charakteristisches Polynom:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) - 4(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[(6-\lambda)(1-\lambda) - 5\right]$$

$$= (1-\lambda)(6-7\lambda+\lambda^2-5)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+1)$$

Da $\lambda^2-7\lambda+1=0 \iff \lambda = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}-1}$

$$\iff \lambda = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{2}$$

$$\iff \lambda = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

gilt somit: $\det(A-\lambda E)=0 \iff \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = \frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5} \vee \lambda_3 = \frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}\ (>0)$

Alle Eigenwerte sind größer als Null. Damit sind A und die quadratische Form positiv definit.

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der Definitheitseigenschaften quadratischer Formen bzw. symmetrischer Matrizen besteht in der Untersuchung der Vorzeichen von Determinanten gewisser Teilmatrizen von A.

Definition: Ein Hauptminor der Ordnung r einer $(n\times n)$-Matrix A ist die Determinante einer Matrix, die aus der Matrix A durch Streichung von $(n-r)$ Zeilen und $(n-r)$ Spalten entsteht. Dabei wird eine bestimmte Zeile i genau dann gestrichen, wenn auch die i-te Spalte gestrichen wird bzw. umgekehrt.

Ein Hauptminor heißt führender Hauptminor der Ordnung r einer $(n\times n)$-Matrix A, wenn er aus den ersten r Zeilen und Spalten von A besteht, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Die führenden Hauptminoren von A sind

$$\det(1) = 1, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -7, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -19$$

Alle Hauptminoren von A

der Ordnung $r=1$ sind $\det(1)=1$, $\det(5)=5$, $\det(6)=6$

der Ordnung $r=2$ sind $\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=-7$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}=13$, $\det\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=12$

der Ordnung $r=3$ ist $\det(A)=-19$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Führende Hauptminoren: $\det(a_{11})$, $\det(A)$

Alle Hauptminoren: $\det(a_{11})$, $\det(a_{22})$, $\det(A)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Führende Hauptminoren: $\det(b_{11})$, $\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $\det(B)$

Alle Hauptminoren: $\det(b_{11})$, $\det(b_{22})$, $\det(b_{33})$

$\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

$\det(B)$

Während es zu einer quadratischen $(n \times n)$-Matrix n führende Hauptminoren gibt, beträgt die Anzahl aller Hauptminoren $2^n - 1$. Für die Untersuchung der positiven bzw. negativen Definitheit sind (nur) die führenden Hauptminoren heranzuziehen, für die Semidefinitheit alle Hauptminoren, was in dem folgenden Satz festgehalten wird, der auch unter dem Stichwort Hurwitz-Kriterium in der Literatur zu finden ist.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir bezeichnen mit D_r den führenden Hauptminor der Ordnung r und mit Δ_r einen beliebigen Hauptminor der Ordnung r. Dann gilt:

1) A positiv definit $\Longleftrightarrow$ $D_r > 0$ für alle $r = 1, \dots, n$
2) A positiv semidefinit $\Longleftrightarrow$ $\Delta_r \geq 0$ für alle Hauptminoren der Ordnung $r = 1, \dots, n$
3) A negativ definit $\Longleftrightarrow$ $(-1)^r D_r > 0$ für alle $r = 1, \dots, n$
4) A negativ semidefinit $\Longleftrightarrow$ $(-1)^r \Delta_r \geq 0$ für alle Hauptminoren der Ordnung $r = 1, \dots, n$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det(2) = 2 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 7 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 19 > 0$.

Alle führenden Hauptminoren sind positiv, also ist A positiv definit.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det(-2) = -2 < 0$, $\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 8 > 0$, $\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -12 < 0$.

Die führenden Hauptminoren ungerader Ordnung sind negativ, der führende Hauptminor gerader Ordnung positiv, also ist A negativ definit.

Beispiel:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die führenden Hauptminoren:

$\det(0) = 0$, $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8 < 0$, $\det(C) = 24 > 0$

Die führenden Hauptminoren ungerader Ordnung sind somit kleiner oder gleich 0, die gerader Ordnung größer oder gleich 0.

Achtung! Damit lässt sich nur schließen, dass C nicht positiv definit, nicht negativ definit und nicht positiv semidefinit ist. Für die Frage, ob C **negativ semidefinit** ist, müssen auch die anderen Hauptminoren von C untersucht werden.

Betrachtet man den Hauptminor

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \text{ (Streichen der 2. Zeile und Spalte in } C\text{)},$$

so hat man einen Hauptminor ungerader Ordnung gefunden, der positiv ist. C ist somit auch nicht negativ semidefinit. Insgesamt ist also C indefinit.