I) Lineare Gleichungssysteme

Zahlreiche Modelle in den Wirtschaftswissenschaften verwenden Systeme mit mehreren Gleichungen für mehrere Variablen. Sind diese Gleichungen linear, so werden Untersuchungs- und Lösungsmethoden im Bereich der Linearen Algebra zur Verfügung gestellt.
In diesem Kapitel erläutern wir zwei verschiedene Methoden, mit denen man systematisch lineare Gleichungssysteme lösen kann.
Während sich die Cramersche Regel nur für Gleichungssysteme verwenden lässt, bei denen die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt, ist der Gauß-Algorithmus auch anwendbar, wenn es mehr oder weniger Gleichungen als Unbekannte gibt. Außerdem verwendet man die Cramersche Regel wegen des sonst zu hohen Rechenaufwandes meist nur zur Lösung kleiner linearer Gleichungssysteme.
Bevor wir uns mit den angegebenen Lösungsmethoden beschäftigen, legen wir zunächst fest, was unter einem linearen Gleichungssystem zu verstehen ist und geben ein Beispiel an, in dem lineare Gleichungssysteme in ökonomischen Zusammenhängen vorkommen.

Beispiel:
$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9$$
$$x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4$$

ist ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für die 3 Unbekannten x_1, x_2 und x_3. Ein Zahlentripel (x_1^*, x_2^*, x_3^*) heißt Lösung des Gleichungssystems, wenn die Zahlen x_1^*, x_2^* und x_3^* beide Gleichungen erfüllen. Durch Einsetzen lässt sich leicht feststellen, dass z.B. $(5, 1, 2)$ aber auch $(\frac{49}{23}, -\frac{16}{23}, -1)$ Lösungen des Gleichungssystems sind.

Allgemein werden wir uns auch mit der Frage beschäftigen, ob ein vorgegebenes lineares Gleichungssystem überhaupt lösbar ist und wenn ja, ob es eindeutig lösbar ist oder unendlich viele Lösungen besitzt.
Allgemein lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen für n Unbekannte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in folgender Standardform angeben. Dabei setzen wir grundsätzlich voraus, dass nicht alle Koeffizienten einer Zeile 0 sind.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1k}x_k & + & \ldots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2k}x_k & + & \ldots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \qquad \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{ik}x_k & + & \ldots & + & a_{in}x_n = b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mk}x_k & + & \ldots & + & a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Die Faktoren $a_{ik} \in \mathbb{R}$ vor den Unbekannten x_k heißen Koeffizienten des linearen Gleichungssystems. Die reellen Zahlen b_i bilden die rechte Seite. In der i-ten Zeile gehört zur Unbekannten x_k der Koeffizient a_{ik}.
Bevor wir uns mit Methoden zur Lösung solcher linearer Gleichungssysteme beschäftigen, betrachten wir ein ökonomisches Beispiel, auf das wir an späterer Stelle in allgemeinerer Form noch einmal zurückkommen werden.

Beispiel: (Einfaches Beispiel des Leontief-Modells)
Eine Volkswirtschaft habe die drei Industrien Fischfang, Forstwirtschaft und Bootsbau. Es gelten folgende Bedingungen:
Um 1t Fisch zu fangen, werden c_1 Fischerboote benötigt.
Um 1t Holz zu erzeugen, werden für die Ernährung der Forstarbeiter c_2 t Fisch benötigt.
Für die Herstellung von 1 Fischerboot werden c_3 t Holz benötigt.
Dies sollen die einzigen Inputgrößen sein, die für die drei

Industriezweige benötigt werden. Wir nehmen an, dass es keine zusätzliche externe Nachfrage nach Fischerbooten gibt aber eine zusätzliche Nachfrage nach b_1 t Fisch und b_2 t Holz.
Es soll bestimmt werden, welchen Gesamtoutput jeder der drei Industriezweige produzieren muss.
Wir bezeichnen mit

x_1 die Gesamtanzahl zu produzierender Tonnen Fisch

x_2 die Gesamtanzahl zu produzierender Tonnen Holz

x_3 die Gesamtanzahl zu produzierender Fischerboote

und überlegen, welche Nachfrage nach den einzelnen Produkten besteht.
Die Nachfrage nach Fisch setzt sich folgendermaßen zusammen. Um x_2 t Holz zu produzieren, werden $c_2 x_2$ t Fisch benötigt. Weiter muss die zusätzliche Nachfrage nach b_1 t Fisch befriedigt werden. Somit muss gelten:

1) $x_1 = c_2 x_2 + b_1$

Die Nachfrage nach Holz ergibt sich analog. Um x_3 Fischerboote herstellen zu können, werden $c_3 x_3$ t Holz benötigt. Außerdem soll die zusätzliche Nachfrage nach b_2 t Holz befriedigt werden. Somit muss gelten:

2) $x_2 = c_3 x_3 + b_2$

Die Nachfrage nach Booten ergibt sich aus der Überlegung, dass für die Produktion von x_1 t Fisch $c_1 x_1$ Boote nötig sind. Also muss gelten:

3) $x_3 = c_1 x_1$

Die Gleichungen 1), 2) und 3) ergeben zusammen ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_1, x_2 und x_3.

Formt man die Gleichungen äquivalent um, so erhält man das Gleichungssystem in standardisierter Form:

$$\begin{aligned} x_1 - c_2 x_2 &= b_1 \\ x_2 - c_3 x_3 &= b_2 \\ -c_1 x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir werden das Gleichungssystem an späterer Stelle weiter untersuchen.

Determinanten und Cramersche Regel

In diesem Abschnitt behandeln wir den Fall, dass die Anzahl der Gleichungen in dem linearen Gleichungssystem mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, d.h.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + & \dots & + a_{1k} x_k + & \dots & + a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + & \dots & + a_{2k} x_k + & \dots & + a_{2n} x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + & \dots & + a_{ik} x_k + & \dots & + a_{in} x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + & \dots & + a_{nk} x_k + & \dots & + a_{nn} x_n & = & b_n \end{array}$$

Zur Erläuterung des Begriffs "Determinante" und zur Herleitung der Cramerschen Regel betrachten wir zunächst den Spezialfall $n = 2$, d.h. 2 Gleichungen für 2 Unbekannte

1) $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$

2) $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$

Geometrisch beschreiben die Gleichungen 2 Geraden im $\mathbb{R}^2$.
Gesucht sind Wertepaare (x_1, x_2), die beide Gleichungen erfüllen, d.h. geometrisch gemeinsame Punkte der beiden Geraden.
Es gibt nun 3 verschiedene Möglichkeiten:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Lösung, d.h. es gibt genau ein Wertepaar (x_1^*, x_2^*), das beide Gleichungen erfüllt.

Geometrisch bedeutet dies, dass sich die beiden, durch die Gleichungen beschriebenen Geraden in genau einem Punkt schneiden. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (x_1^*, x_2^*).

b) Es gibt unendlich viele Lösungen; die beiden Gleichungen sind zueinander proportional.
Geometrisch bedeutet dies, dass die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden übereinstimmen.

c) Es gibt keine Lösung. Geometrisch bedeutet dies, dass die beiden, durch die Gleichungen beschriebenen Geraden zueinander parallel verlaufen; sie haben keinen Schnittpunkt.

Wir lösen nun allgemein rechnerisch das Gleichungssystem 1) 2). Dabei setzen wir (zunächst) der Einfachheit halber voraus, dass die auftretenden Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ alle von Null verschieden sein sollen. Ziel ist es, durch Addition eines geeigneten Vielfachen der 1. Gleichung zu einem entsprechenden Vielfachen der 2. Gleichung jeweils eine der beiden Unbekannten zu eliminieren, d.h.

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\cdot a_{22}: & a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1 \\ 2)\cdot(-a_{12}): & -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{array}\right\} +$$

$$\boxed{\text{I)}\qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\cdot(-a_{21}): & -a_{21}a_{11}x_1 - a_{21}a_{12}x_2 = -a_{21}b_1 \\ 2)\cdot a_{11}: & a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{array}\right\} +$$

$$\boxed{\text{II)}\qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1}$$

Das Gleichungssystem I), II) ist äquivalent zum Gleichungssystem 1), 2). Man kann nachrechnen, dass dies auch gilt, wenn Koeffizien-

ten des Gleichungssystems Null sind.
Das Lösungsverhalten lässt sich nun an dem äquivalenten Gleichungssystem I), II) leicht untersuchen. Man sieht, dass die Lösungsmöglichkeit durch den Wert von

$$D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

bestimmt (determiniert) wird. Genauer gilt:

a) Ist $D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_1^* = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad , \quad x_2^* = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

b) Ist $D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0$ und $b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = 0$ und $a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = 0$, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

c) Ist $D = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0$ und $(b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \neq 0$ oder $a_{11} b_2 - a_{21} b_1 \neq 0)$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Man kann den Sachverhalt nun wesentlich kürzer angeben, wenn man den Begriff der Determinante einführt.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$ heißt Determinante zweiter Ordnung.

Ebenso sind $D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$ und

$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$ Determinanten zweiter Ordnung.

Formal erhält man D_{x_1} und D_{x_2} aus D, indem man die 1. bzw. 2. Spalte von D durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

Die Gleichungen I) und II) lassen sich nun kurz schreiben als

I) $D \cdot x_1 = D_{x_1}$

II) $D \cdot x_2 = D_{x_2}$

und es gilt:

a) Ist $D \neq 0$, dann ist $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}$ und $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \right) \right\}.$$

Die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

b) Ist $D = 0 \wedge D_{x_1} = 0 \wedge D_{x_2} = 0$, dann ist

$$\mathbb{L} = \{ (x_1, x_2) : a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \} = \{ (x_1, x_2) : a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \}.$$

Die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden sind gleich; alle Punkte der Geraden sind Lösungen.

c) Ist $D = 0 \wedge (D_{x_1} \neq 0 \vee D_{x_2} \neq 0)$, dann ist I) oder II) nicht erfüllbar, also

$$\mathbb{L} = \{ \quad \}.$$

Die durch die Gleichungen beschriebenen Geraden sind parallel, haben also keine gemeinsamen Punkte.

Beispiel: $2x_1 - 5x_2 = 1$

$-x_1 + 3x_2 = -2$

Wir berechnen die zugehörigen Determinanten.

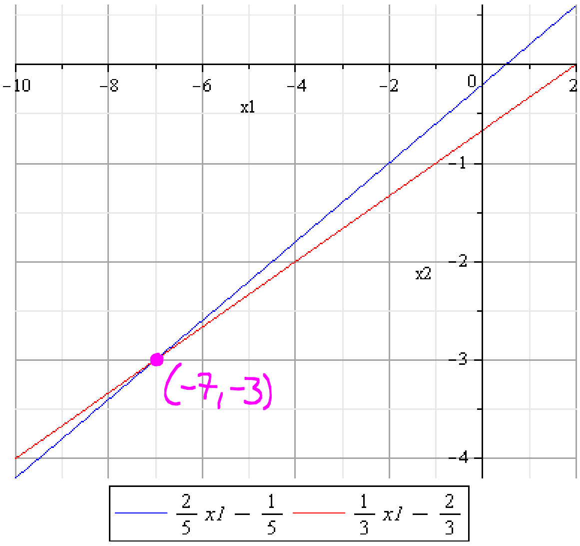
$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = -7$ und $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = -3$, d.h. $\mathbb{L} = \{(-7, -3)\}$.

Für eine geometrische Betrachtung lösen wir die Gleichungen nach x_2 auf. An dieser Darstellung sieht man unmittelbar, dass die zugehörigen Geraden verschiedene Steigungen besitzen und sich somit in genau einem Punkt schneiden.

$$2x_1 - 5x_2 = 1 \iff x_2 = \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}$$

$$-x_1 + 3x_2 = -2 \iff x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}$$



Beispiel:

$$-2x_1 + x_2 = -5$$
$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2}$$

Wir berechnen die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, d.h.

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) : -2x_1 + x_2 = -5\} = \{(x_1, x_2) : x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2}\}.$$

Bei genauerem Hinschauen sieht man, dass sich die 1. von der 2. Gleichung nur um den Faktor $-\frac{1}{2}$ unterscheidet; die Gleichungen sind zueinander proportional.

Löst man die beiden Gleichungen nach x_2 auf, erhält man in beiden Fällen dasselbe Ergebnis.

$$-2x_1 + x_2 = -5 \iff x_2 = 2x_1 - 5$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2} \iff x_2 = 2x_1 - 5$$

Die durch die Gleichungen dargestellten Geraden stimmen überein. Die Koordinaten aller Punkte der Geraden sind Lösungen des Gleichungssystems.

Beispiel: $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= -4 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Wir berechnen die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

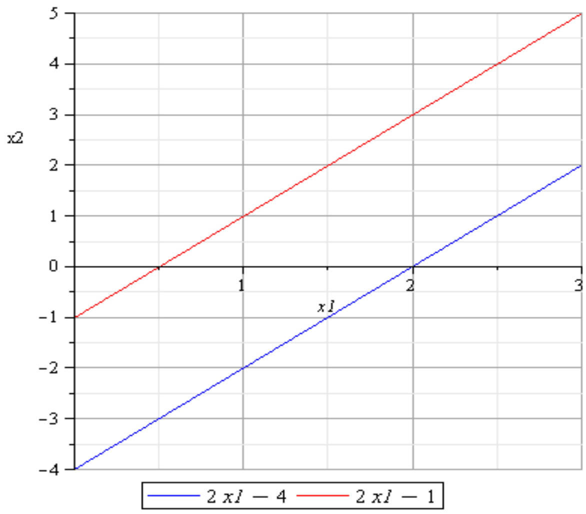
Somit ist das lineare Gleichungssystem nicht lösbar, d.h. $\mathbb{L} = \{\ \}$.

Löst man die beiden Gleichungen nach x_2 auf, so erhält man:

$$-2x_1 + x_2 = -4 \iff x_2 = 2x_1 - 4$$

$$4x_1 - 2x_2 = 2 \iff x_2 = 2x_1 - 1$$

Die beiden durch die Gleichungen beschriebenen Geraden besitzen zwar dieselbe Steigung 2, aber verschiedene Achsenabschnitte und sind somit parallel.



Die für den Spezialfall von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten erläuterte Lösungsmethode heißt Cramersche Regel.

Im folgenden soll die Cramersche Regel auch für die Lösung größerer quadratischer Gleichungssysteme hergeleitet werden. Dazu müssen die notwendigen Begriffe auf lineare Gleichungssysteme mit n Gleichungen für n Unbekannte, $n \in \mathbb{N}$, verallgemeinert werden, d.h. wir betrachten nun allgemein:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + a_{1k}x_k & + \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + a_{2k}x_k & + \dots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + a_{ik}x_k & + \dots + & a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + a_{nk}x_k & + \dots + & a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

Analog zum Spezialfall $n=2$ werden die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems in einem quadratischen Schema, der Determinante n-ter Ordnung, zusammengefasst.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ik}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

$\uparrow$ k-te Spalte

Der Koeffizient a_{ik} steht im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile und der k-ten Spalte.

Entsprechend zu dem Vorgehen im Spezialfall $n=2$ erhält man wieder weitere Determinanten, indem man jeweils die k-te Spalte von D durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt

$$D_{x_k} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Wie man solche Determinanten n-ter Ordnung allgemein berechnet, wird weiter unten behandelt. Vorher wollen wir die formale Aufstellung solcher Determinanten an einem Beispiel erläutern und die Cramersche Regel allgemein formulieren.

Beispiel:
$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= \tfrac{1}{2} \\ 2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1x_3 &= 7 \\ -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 5x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 5 \end{vmatrix}, \; D_{x_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 7 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -3 & \frac{1}{4} & 5 \end{vmatrix}, \; D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -3 & 5 \end{vmatrix}, \; D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 7 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -3 \end{vmatrix}$$

Wir formulieren nun die Cramersche Regel für den allgemeinen Fall.

Satz: Cramersche Regel

a) Ist $D \neq 0$, so ist $\left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D}\right)$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems.

b) Ist $D = 0$ und mindestens ein $D_{x_k} \neq 0$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

c) Ist $D = 0$ und $D_{x_k} = 0$ für alle $k = 1, 2, .., n$, so kann man für $n > 2$ keine allgemeine Aussage machen. Den genaueren Sachverhalt für den allgemeineren Fall werden wir im Zusammenhang mit dem Gauß-Algorithmus sehen.

Um die Cramersche Regel anwenden zu können, muss man nun wissen, wie man allgemein Determinanten n-ter Ordnung berechnen kann. Der im weiteren erläuterte Entwicklungssatz von laplace gibt ein Verfahren an, wie man eine Determinante n-ter Ordnung als eine Summe von n Determinanten (n-1)-ter Ordnung berechnen kann. Jede Determinante (n-1)-ter Ordnung wird dann als eine Summe von (n-1) Determinanten (n-2)-ter Ordnung berechnet. Dies setzt man fort, bis man nur noch Determinanten 2-ter Ordnung zu berechnen hat.

Will man z.B. eine Determinante 4-ter Ordnung berechnen, so ist dafür die Berechnung von 4 Determinanten 3-ter Ordnung erforderlich. Für jede Determinante 3-ter Ordnung müssen 3 Determinanten 2-ter Ordnung berechnet werden. Insgesamt sind also für die Berechnung einer Determinante 4-ter Ordnung $4 \cdot 3 = 12$ Determinanten 2-ter Ordnung zu bestimmen. Für eine Determinante 5-ter Ordnung sind es bereits $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ u.s.w.

Um den Entwicklungssatz von Laplace erläutern zu können, benötigen wir zunächst einige weitere Begriffe.

Streicht man in einer Determinante n-ter Ordnung die i-te Zeile und die k-te Spalte, so erhält man eine Determinante M_{ik} $(n-1)$-ter Ordnung, die ein **Minor** genannt wird. Multipliziert man den Minor M_{ik} mit dem **Vorzeichenfaktor** $(-1)^{i+k}$, so erhält man den sogenannten **Co-Faktor** C_{ik}.

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}, \quad C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}, \quad C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

Der Vorzeichenfaktor lässt sich auch einfach dem Schachbrettmuster entnehmen.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe der Co-Faktoren lässt sich nun angeben, wie man Determinanten n-ter Ordnung als Summe von Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung darstellen kann.

Satz: **Entwicklungssatz von Laplace**

a) Entwicklung nach der i-ten Zeile:

Für jeden festen Zeilenindex $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} .$$

a) Entwicklung nach der k-ten Spalte.

Für jeden festen Spaltenindex $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k} C_{1k} + a_{2k} C_{2k} + \cdots + a_{nk} C_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

Es ist tatsächlich egal, nach welcher Zeile oder Spalte man entwickelt. Man erhält immer dasselbe Ergebnis.

Beispiel:

Wir berechnen die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Schachbrettmuster für die Vorzeichenfaktoren $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

a) Entwickeln nach der 3-ten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-5) - 3 \cdot (-4) + (-3) = 14$$

b) Entwickeln nach der 2-ten Spalte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = 14$$

Beispiel: Wir berechnen den Wert der Determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Wir entwickeln zunächst nach der 1. Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{=0}$$

Entwickeln nach 1. Spalte

Entwickeln nach 2. Zeile

$$= 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 0 + 2\cdot 4 - 4\cdot 4 + (-1) + 3 = -6$$

Nachdem wir wissen, wie man auch Determinanten höherer als zweiter Ordnung ausrechnet, können wir die Cramersche Regel auch auf Gleichungssysteme mit n Gleichungen für n Unbekannte anwenden, wenn $n > 2$ ist.

Beispiel:
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \qquad &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$
Entwickeln nach 1. Zeile

(Also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.)

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$$
Entwickeln nach 1. Zeile

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$
Entwickeln nach 3. Spalte

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

Nach der Cramerschen Regel ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems gegeben durch:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{1}{10}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{7}{10}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D} = -\frac{7}{10}$$

Somit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, -\frac{7}{10} \right) \right\}$$

Beispiel:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2$$
$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 3$$

Es gilt:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 7 \cdot (-3) - 8 \cdot (-6) + 9 \cdot (-3) = 0$$

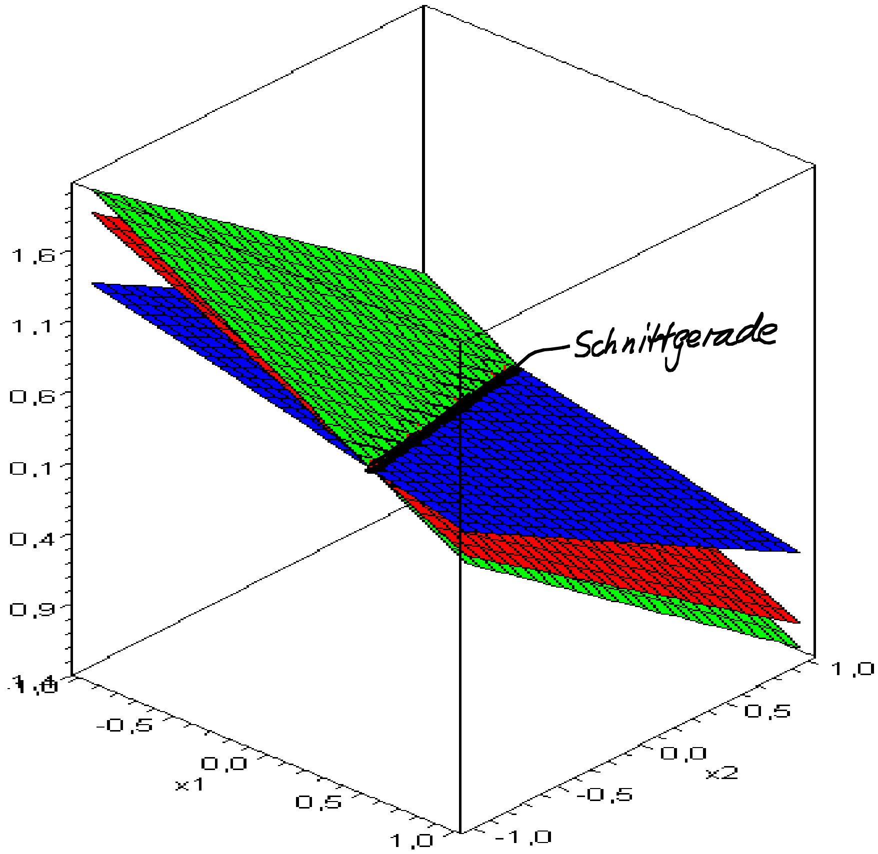
$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot (-3) - 8 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = 0$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 7 \cdot 0 - 3 \cdot (-6) + 9 \cdot (-2) = 0$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 7 \cdot (-1) - 8 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = 0$$

Da alle Determinanten gleich Null sind, wissen wir nach der Cramerschen Regel, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Wir wissen nicht, wie diese aussehen. Geometrisch beschreiben 3 Gleichungen für 3 Unbekannte 3 Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Bei unendlich vielen Lösungen können sich die drei Ebenen in einer Geraden schneiden oder übereinstimmen. Im ersten Fall sind alle Punkte der Schnittgeraden Lösungen des linearen Gleichungssystems, im zweiten Fall alle Punkte der Ebene.

In diesem Beispiel liegt der erste Fall vor, wie die folgende Graphik veranschaulicht.



Als nächstes greifen wir noch einmal das Beispiel von S. 2 auf.

Beispiel: Auf S. 2 hatten wir ein einfaches Beispiel des Leontief-Modells mit folgenden Größen betrachtet:

c_1: Anzahl der Boote, die zur Produktion von 1t Fisch nötig sind

c_2: Tonnen Fisch, die zur Produktion von 1t Holz nötig sind

c_3: Tonnen Holz, die zur Produktion von 1 Boot nötig sind

b_1: Tonnen zusätzliche Nachfrage nach Fisch

b_2: Tonnen zusätzliche Nachfrage nach Holz

x_1: Gesamtzahl zu produzierender Tonnen Fisch

x_2: Gesamtzahl zu produzierender Tonnen Holz

x_3: Gesamtzahl zu produzierender Boote

Zunächst beinhaltet die Aufgabenstellung, dass die Größen c_1, c_2, c_3 und b_1, b_2 positiv sind.

Wir haben bereits das folgende lineare Gleichungssystem aufgestellt.

$$\begin{aligned} x_1 - c_2 x_2 \qquad\quad &= b_1 \\ x_2 - c_3 x_3 &= b_2 \\ -c_1 x_1 \qquad + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der Aufgabenstellung ist klar, dass nur positive Lösungen sinnvoll sind.

Wir berechnen zunächst die zugehörigen Determinanten.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & -c_3 \\ -c_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} -c_2 & 0 \\ 1 & -c_3 \end{vmatrix} = 1 - c_1 c_2 c_3$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & -c_2 & 0 \\ b_2 & 1 & -c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} 1 & -c_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} b_2 & -c_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = b_1 + c_2 b_2$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & -c_3 \\ -c_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & -c_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & -c_3 \\ -c_1 & 1 \end{vmatrix} = b_2 + c_1 c_3 b_1$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -c_2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ -c_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -c_1 \begin{vmatrix} -c_2 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_1 + c_1 c_2 b_2 = c_1 (b_1 + c_2 b_2)$$

Da $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2 > 0$ sind, gilt $D_{x_1} > 0 \wedge D_{x_2} > 0 \wedge D_{x_3} > 0$.
Somit ist das Gleichungssystem nur dann lösbar, wenn $D \neq 0$ ist. Die Lösung ist dann eindeutig bestimmt.
Für $1 \neq c_1 c_2 c_3$ gilt also $\mathbb{L} = \left\{ \frac{b_1 + c_2 b_2}{1 - c_1 c_2 c_3}, \frac{b_2 + c_1 c_3 b_1}{1 - c_1 c_2 c_3}, \frac{c_1 (b_1 + c_2 b_2)}{1 - c_1 c_2 c_3} \right\}$
Um positive Lösungen zu erhalten, muss $c_1 c_2 c_3 < 1$ gelten!

Bei den betrachteten Beispielen haben wir gesehen, dass beim Berechnen von Determinanten vorzugsweise nach einer Zeile oder Spalte entwickelt werden sollte, die möglichst viele Nullen enthält. Es gibt nun einige Rechenregeln für Determinanten, die u.a.

verwendet werden können, um "zusätzliche Nullen" zu bekommen bzw. die Berechnung von Determinanten zu vereinfachen.

Rechenregeln für Determinanten

a) Sind alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) einer Determinante gleich Null, dann hat die Determinante den Wert Null.

b) Schreibt man in einer Determinanten die Zeilen in entsprechender Reihenfolge als Spalten auf, so bleibt der Wert gleich, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

c) Eine Determinante wird mit einer reellen Zahl α multipliziert, indem alle Elemente einer Zeile (Spalte) mit α multipliziert werden.

d) Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen (Spalten), so wechselt die Determinante ihr Vorzeichen.

e) Sind zwei Zeilen (Spalten) einer Determinante zueinander proportional, so hat sie den Wert Null.

f) Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn das Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird.

g) Hat eine Determinante "Dreiecksgestalt", d.h. sind alle Einträge ober- oder unterhalb der Diagonalen Null, so ist der Wert der Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Wir illustrieren die genannten Regeln für den Spezialfall der Determinanten 2-ter Ordnung.

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot 0 - 0\cdot a_{12} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\ ;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

c) $\alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21});\ \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha a_{11}a_{22} - a_{21}\alpha a_{12}$

d) $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a_{11} & c\cdot a_{11} \\ a_{21} & c\cdot a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot c\cdot a_{21} - a_{21}\cdot c\cdot a_{11} = 0$

f) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+c\cdot a_{11} & a_{22}+c a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+c a_{12}) - (a_{21}+c\cdot a_{11})\cdot a_{12}$

$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$

Beispiel:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ -2 & -8 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

(-2)

g) $\begin{vmatrix} 1 & e & \pi \\ 0 & 2 & 10^{1000} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

Zum Schluss dieses Abschnitts soll noch eine Regel vorgestellt werden, die die Berechnung von Determinanten 3-ter Ordnung vereinfacht.

Regel von Sarrus: Nur anwendbar für Determinanten 3-ter Ordnung!

Zunächst schreibt man die ersten beiden Spalten der Determinante noch einmal rechts neben die dritte Spalte. Dann multipliziert man die jeweils in den Diagonalen stehenden Elemente. Die Produkte der "blauen Diagonalen" werden addiert, die der "roten Diagonalen" werden subtrahiert.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Wir zeigen die Gültigkeit dieser Regel, indem wir die Determinante mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen und die Ergebnisse vergleichen. Entwickeln nach der 1-ten Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Ein Vergleich mit den oben angegebenen Regel zeigt die Gültigkeit.

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right. = (-2)(-2)\cdot 5 + 4\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 7 - 1(-2)(-1) - 7\cdot 2\cdot(-2) - 5\cdot 3\cdot 4$$

$$= -27$$

Gaußsches Eliminationsverfahren

Für größere lineare Gleichungssysteme ist die Cramersche Regel nicht besonders effektiv. Außerdem ist sie nur auf Gleichungssysteme mit n Gleichungen für n Unbekannte anwendbar. Im folgenden stellen wir daher ein allgemein anwendbares Verfahren vor, in dem systematisch Unbekannte aus bestimmten Gleichungen eliminiert werden.

Ziel ist es, das vorgegebene lineare Gleichungssystem in ein äquivalentes Gleichungssystem umzuformen, das eine sogenannte Zeilenstufenform besitzt. Daran kann dann einerseits das Lösungsverhalten (eindeutig lösbar, unlösbar, unendlich viele Lösungen) abgelesen werden, andrerseits im Falle der Lösbarkeit die Lösungsmenge einfach bestimmt werden.

Wir behandeln nun allgemein lineare Gleichungssysteme mit n Gleichungen für m Unbekannte, d.h.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & + & \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & + & \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ik}x_k & + & \cdots + & a_{in}x_n & = b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mk}x_k & + & \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

Das Lösungsverfahren beruht auf folgenden Äquivalenzumformungen:

1) Gleichungen dürfen in der Reihenfolge miteinander vertauscht werden.
2) Gleichungen dürfen mit einem beliebigen, von Null verschiedenen Faktor multipliziert werden.
3) Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

Bevor wir das Gaußsche Eliminationsverfahren weiter erläutern, betrachten wir ein Beispiel, das auf ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für 3 Unbekannte führt.

Beispiel: Ein Unternehmen produziert 2 Güter A und B. Das Unternehmen hat 3 Fabriken, in denen die beiden Güter nach den in der folgenden Tabelle gegebenen Mengen pro Stunde produziert werden.

Gut \ Fabrik	1	2	3
A	10	20	20
B	20	10	20

Das Unternehmen erhält einen Auftrag über 400 Einheiten von Gut A und 500 Einheiten von Gut B.

Wir bezeichnen mit x_1, x_2, x_3 die Anzahl der Stunden, in denen die 3 Fabriken zur Produktion des Auftrags genutzt werden.

Wie können/müssen x_1, x_2, x_3 gewählt werden, um die Einheiten für den Auftrag zu produzieren.

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 20x_2 + 20x_3 &= 400 \\ 20x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 500 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen stellt man leicht fest, dass z.B.

$x_1 = 12,\ x_2 = 2,\ x_3 = 12$ aber auch $x_1 = 14,\ x_2 = 4,\ x_3 = 9$

Lösungen sind. (Tatsächlich besitzt das Gleichungssystem sogar unendlich viele Lösungen.)

Wie wir bereits gesehen haben, gibt es für lineare Gleichungssysteme strukturell unterschiedliche Ergebnismöglichkeiten: eindeutig lösbar, unlösbar, unendlich viele Lösungen.

Wir erläutern die Vorgehensweise zunächst an Beispielen.

Um den Schreibaufwand später reduzieren zu können, schreiben wir parallel ein Rechenschema auf. Wir werden sehen, dass man sich auf dieses Rechenschema beschränken kann.

Beispiel: Gleichungssystem | Rechenschema

Koeffizienten | rechte Seite | Rechenanw.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 13 \end{aligned} \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 13 \end{array}\right| \begin{array}{l} (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \end{array}$$

Ziel: Elimination von x_1 aus der 2. und 3. Gleichung mit Hilfe der 1. Gleichung. Dazu:

- Addition des (-2)fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung
- Addition des (-3)fachen der 1. Gleichung zur 3. Gleichung

Die 1. Gleichung bleibt unverändert.

Gleichungssystem | Rechenschema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -5 \\ -2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -5 \\ & -2 & 1 & 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ (2) \\ \\ \end{array}$$

Ziel: Elimination von x_2 aus der 3. Gleichung mit Hilfe der 2. Gleichung. Dazu:

- Addition des 2-fachen der 2. Gleichung zur 3. Gleichung.

Die 1. und 2. Gleichung bleiben unverändert.

Gleichungssystem | Rechenschema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -5 \\ -x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -5 \\ & & -1 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

Wir multiplizieren nun noch die letzte Gleichung mit (-1), damit die Koeffizienten in der Diagonalen alle 1 werden.

Gleichungssystem	Rechenschema
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -5 \\ & & 1 & 3 \end{array}$
$x_2 - x_3 = -5$	
$x_3 = 3$	

Wir haben nun ein zum Ausgangssystem äquivalentes, "gestaffeltes" Gleichungssystem, d.h. ein Gleichungssystem in "Zeilenstufenform", das sich nun einfach "rückwärts", d.h. von unten nach oben auflösen lässt.

Die 3. Gleichung liefert unmittelbar $x_3 = 3$.

Einsetzen von x_3 in die 2. Gleichung liefert: $x_2 = -2$.

Einsetzen von x_2 und x_3 in die 1. Gleichung liefert: $x_1 = 1$.

Somit: $\mathbb{L} = \{(1,-2,3)\}$.

Beispiel: Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c|l} 3 & 1 & 2 & 2 & (-\frac{2}{3}) \quad (-1) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 3 & -2 & 5 & -1 & \end{array}$$

- Addition des $(-\frac{2}{3})$-fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung
- Addition des (-1)-fachen der 1. Gleichung zur 3. Gleichung

Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= -\tfrac{1}{3} \\ -3x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c|l} 3 & 1 & 2 & 2 & \\ & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & (9) \\ & -3 & 3 & -3 & \end{array}$$

- Addition des 9-fachen der 2. Gleichung zur 3. Gleichung

Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3 &= -\tfrac{1}{3} \\ 0 \cdot x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 \\ & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ & & 0 & -6 \end{array}$$

Offenbar gibt es kein $x_3 \in \mathbb{R}$, das die letzte Gleichung $0 \cdot x_3 = -6$ erfüllt. Daraus schließt man unmittelbar, dass das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist, d.h. $\mathbb{L} = \{\ \}$.

Beispiel: Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\ (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

- Addition des (-2)fachen der 1. Gleichung zur 2. Gleichung
- Addition des (-1)fachen der 1. Gleichung zur 3. Gleichung

Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_3 &= -2 \\ -x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & -1 & -2 \\ & & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array}$$

Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_3 &= -2 \\ (0 &= 0) \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & -1 & -2 \\ (& & 0 & 0\ ) \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-1) \\ \\ \end{array}$$

Wir sehen, dass die letzte Gleichung überflüssig ist, da sie keine Bedingungen und Informationen liefert. Generell werden alle Gleichungen der Form "$0 = 0$" gestrichen.

Wir multiplizieren nun noch die 1. Gleichung mit $\frac{1}{2}$ und die 2. Gleichung mit (-1).

Gleichungssystem / Rechenschema

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= \tfrac{1}{2} \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Rückwärtsauflösen: $x_3 = 2$ ist durch die 2. Gleichung eindeutig festgelegt. An der 1. Gleichung sehen wir, dass x_2 frei

gewählt werden kann. Indem wir $x_2 = t$ setzen, liefert Einsetzen von $x_3 = 2$ und $x_2 = t$ in die 1. Gleichung $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$.
Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t,\, t,\, 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Es gibt unendlich viele Lösungen; für jede spezielle Wahl von $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine spezielle Lösung. t heißt Parameter. Geometrisch bilden alle Punkte der Lösungsmenge die Schnittgerade der durch die Gleichungen des linearen Gleichungssystems beschriebenen Ebenen im $\mathbb{R}^3$.

Nachdem wir an 3 typischen Beispiel das Lösungsverfahren erläutert haben, geben wir nun eine allgemeine Beschreibung des Verfahrens an. Mit Hilfe der erlaubten elementaren Zeilenumformungen (Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen, Multiplikation einer Gleichung mit beliebigem Faktor ungleich Null, Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung) erfolgt im Rechenschema die Umformung au Zeilenstufenform, die sich schematisch wie folgt darstellen lässt:

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & & & & & x_n & \\
1 & * & \cdots & & & & & & & & * & d_1 \\
0 & 1 & * & \cdots & & & & & & & * & d_2 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & & & & * & d_3 \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & & * & d_4 \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & * & d_5 \\
\vdots & & & & & & 0 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 1 & * \cdots & * & d_r \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & d_m
\end{array}$$

Ist eine der Zahlen $d_{r+1}, \ldots, d_m$ ungleich Null, so gibt es keine Lösung.

Ist $d_{r+1} = d_{r+2} = \ldots = d_m = 0$, so werden die $(r+1)$-te bis m-te Zeile gestrichen und man bestimmt die Lösungsmenge aus der 1. bis r-ten Gleichung durch "Rückwärtsauflösen". Die in der Zeilenstufenform zu den Spalten ohne "Treppenstufe" gehörenden Unbekannten (in obigem Schema z.B. x_3 und x_4) sind frei wählbar und werden gleich den Parametern $t_1, t_2, ..., t_{n-r}$ gesetzt. Die Anzahl der Unbekannten, die frei gewählt werden können, nennt man auch die Anzahl der Freiheitsgrade des linearen Gleichungssystems. Im Fall der eindeutigen Lösbarkeit ist die Anzahl der Freiheitsgrade Null; alle Variablen sind durch die Gleichungen eindeutig bestimmt.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch einige Beispiele. Dabei beschränken wir uns auf das Rechenschema. Weiter verringern wir den Schreibaufwand, indem wir Zeilen, die nicht weiter verändert werden nur markieren. Die markierten Zeilen ergeben am Ende das Schema in Zeilenstufenform

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

1)	1	3	-1	4	(-3) (-2) (-2)
	3	4	0	11	
	2	1	1	7	
	2	-4	4	6	
2)		-5	3	-1	(-1) (-2)
		-5	3	-1	
		-10	6	-2	
			~~0~~	~~0~~	
			~~0~~	~~0~~	

Zusammenstellung der markierten Zeilen, wobei 2) noch durch (-5) dividiert wird.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & & 4 \\ & 1 & -\frac{3}{5} & & \frac{1}{5} \end{array}$$

Rückwärtsauflösen: $x_3 = t$ frei wählbar.

$$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$$

$$x_1 = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}t$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{17}{5} - \frac{4}{5}t, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt 1.

Beispiel: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u - 2v + w + 2z &= a \\ u + v - w + z &= b \\ u + 7v - 5w - z &= c \end{aligned}$$

für die Unbekannten u, v, w, z. Für welche Werte von a, b, c besitzt das Gleichungssystem Lösungen? Wie sehen die Lösungen im Falle der Lösbarkeit aus?

$$\begin{array}{l|cccc|c|l} 1) & 1 & -2 & 1 & 2 & a & (-1)\ (-1) \\ & 1 & 1 & -1 & 1 & b & \\ & 1 & 7 & -5 & -1 & c & \\ \hline 2) & & 3 & -2 & -1 & b-a & (-3) \\ & & 9 & -6 & -3 & c-a & \\ \hline & & & & 0 & 2a-3b+c & \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $2a - 3b + c = 0$ gilt.

Für $2a - 3b + c = 0$ stellen wir die Zeilenstufenform noch einmal zusammen, wobei wir Gleichung 2) noch durch 3 dividieren.

$$\begin{array}{ll|l} 1) & 1 \quad -2 \quad 1 \quad 2 & a \\ 2) & \quad 1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} & \frac{b-a}{3} \end{array}$$

u, v, w, z

Rückwärtsauflösen:

Aus 2): $z = t$, $w = s$ sind frei wählbar.

Damit $v = \frac{b-a}{3} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t$

Aus 1): $u = a + 2 \cdot \frac{b-a}{3} + \frac{4}{3}s + \frac{2}{3}t - s - 2t = \frac{a+2b}{3} + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\ \}, \text{ falls } 2a - 3b + c \neq 0 \\ \left\{\left(\frac{a+2b}{3} + \frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t, \frac{b-a}{3} + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}t, s, t\right) : s, t \in \mathbb{R}\right\}, \text{ falls } 2a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

Das Leontief-Modell

Zu Beginn des Kapitels haben wir bereits ein einfaches Beispiel des sogenannten Leontief-Modells angegeben, das nun in allgemeiner Form behandelt werden soll.

Wir betrachten eine Volkswirtschaft mit n miteinander verbundenen Industrien, von denen jede ein einzelnes Gut produziert und dabei nur einen Produktionsprozess verwendet. Für die Produktion ihres Gutes muss jede Industrie Inputgüter von wenigstens einer der anderen Industrien benutzen. Zusätzlich zur Versorgung der anderen Industrien mit ihrem Gut hat jede Industrie möglicherweise noch eine externe Nachfrage nach ihrem Gut.

Bezeichnungen:

x_i: Gesamte Anzahl an Einheiten des Gutes i, die Industrie i in einer bestimmten Zeiteinheit produziert

a_{ik}: Anzahl Einheiten des Gutes i, die zur Produktion von einer Einheit des Gutes k benötigt wird

Wir nehmen an, dass der Inputbedarf direkt proportional zur Menge des zu produzierenden Outputs ist, d.h.

$a_{ik} x_k$: Anzahl der Einheiten des Gutes i, die zur Produktion von x_k Einheiten des Gutes k benötigt werden.

b_i : Externe Nachfrage nach dem Gut i

Damit x_1 Einheiten des Gutes 1, x_2 Einheiten des Gutes 2, ..., x_n Einheiten des Gutes n produziert werden können und die externe Nachfrage b_i erfüllt werden kann, muss Industrie i insgesamt $x_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n + b_i$ Einheiten des Gutes i produzieren. Dies gilt für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir erhalten somit ein lineares Gleichungssystem, das in standardisierter Form lautet:

$$\begin{array}{rcl} (1-a_{11}) x_1 - a_{12} x_2 - \cdots - a_{1n} x_n & = & b_1 \\ -a_{21} x_1 + (1-a_{22}) x_2 - \cdots - a_{2n} x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{n1} x_1 - a_{n2} x_2 - \cdots + (1-a_{nn}) x_n & = & b_n \end{array}$$

Dieses System wird als Leontief-System bezeichnet. Die Werte a_{ik}, $i,k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißen Inputkoeffizienten oder technische Koeffizienten. Für gegebene externe Nachfragen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gibt eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Outputgrößen für jede Industrie an, so dass alle Nachfragen der Industrien und die externen Nachfragen erfüllt werden können. Es ist zu beachten, dass im Sinne der Aufgabenstellung nur Lösungen des Gleichungssystems sinnvoll sind, in denen alle x_i nichtnegativ sind.

Beispiel: Wir betrachten ein Input-Output Modell mit den 3 Sektoren Schwerindustrie, Leichtindustrie und Landwirtschaft. Die Inputanforderungen seien durch folgende Tabelle gegeben:

	Schwerindustrie	Leichtindustrie	Landwirtschaft
Einheiten Schwerindustriegüter	$a_{11} = 0.1$	$a_{12} = 0.2$	$a_{13} = 0.1$
Einheiten Leichtindustriegüter	$a_{21} = 0.3$	$a_{22} = 0.2$	$a_{23} = 0.2$
Einheiten landwirtschaftliche Güter	$a_{31} = 0.2$	$a_{32} = 0.2$	$a_{33} = 0.1$

Die externen Nachfragen seien gegeben durch $b_1 = 85, b_2 = 95, b_3 = 20$.

Das Leontief-System für die genannten Daten lautet:

$$\begin{aligned} 0.9\,x_1 - 0.2\,x_2 - 0.1\,x_3 &= 85 \\ -0.3\,x_1 + 0.8\,x_2 - 0.2\,x_3 &= 95 \\ -0.2\,x_1 - 0.2\,x_2 + 0.9\,x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{array}{lrrr|r|l}
 & 0.9 & -0.2 & -0.1 & 85 & \\
 & -0.3 & 0.8 & -0.2 & 95 & \cdot 3 \\
 & -0.2 & -0.2 & 0.9 & 20 & \cdot 4.5 \\ \hline
1) & 0.9 & -0.2 & -0.1 & 85 & (1)\;(1) \\
 & -0.9 & 2.4 & -0.6 & 285 & \\
 & -0.9 & -0.9 & 4.05 & 90 & \\ \hline
 & & 2.2 & -0.7 & 370 & \\
 & & -1.1 & 3.95 & 175 & \cdot 2 \\ \hline
2) & & 2.2 & -0.7 & 370 & (1) \\
 & & -2.2 & 7.9 & 350 & \\ \hline
3) & & & 7.2 & 720 &
\end{array}$$

Gestaffeltes System nach Division von 1) durch 0.9, von 2) durch 2.2 und 3) durch 7.2:

$$\begin{array}{rrr|r}
1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{850}{9} \\
 & 1 & -\frac{7}{22} & \frac{1850}{11} \\
 & & 1 & 100
\end{array}$$

Rückwärtsauflösen liefert: $x_3 = 100, x_2 = 200, x_1 = 150$

$$\mathbb{L} = \{(150, 200, 100)\}$$