V Integralrechnung

Häufig gibt es Problemstellungen, in denen eine Funktion aus der Kenntnis ihrer Ableitung bestimmt werden muss. Dies ist Gegenstand der Integralrechnung, die auch als Umkehrung zur Differentialrechnung betrachtet werden kann.

Anwendungen der Integralrechnung sind z.B.

- Flächenberechnungen
- Bestimmung der Kostenfunktion aus der Grenzkostenfunktion
- Bestimmung des mittleren Einkommens von Personen mit einem Einkommen zwischen a und b.
- Bestimmung der Gesamtnachfrage nach einem Gut aus der Nachfragefunktion

Bevor wir uns beispielhaft solchen Anwendungsproblemen zuwenden können, müssen wir uns mit den Grundlagen der Integralrechnung vertraut machen.

Unbestimmte Integrale

Wir behandeln zunächst folgende Fragestellung:
Zu einer gegebenen Funktion f sind Funktionen F gesucht, so dass $F' = f$ gilt.

Beispiel: $f(x) = x^2$

Aus der Differentialrechnung wissen wir, dass $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$ gilt. Also gilt für $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, dass $F'(x) = x^2 = f(x)$ ist.

Solche Funktionen F heißen Stammfunktionen von f.
Genauer definieren wir:

Definition: Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Jedes $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ heißt eine Stammfunktion von f auf I.

Beispiel: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$ ist ebenfalls Stammfunktion von $f(x) = x^2$, da $F'(x) = x^2 = f(x)$ gilt.

Zwei Funktionen, die dieselbe Ableitung besitzen, können sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, da nur die Ableitung einer Konstanten verschwindet. Ist also F Stammfunktion von f, dann ist auch $F + C$ für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion von f. Weitere Stammfunktionen gibt es nicht.
Die Menge aller Stammfunktionen von f fasst man unter folgendem Begriff zusammen.

Definition: Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f. Dann heißt die Menge aller Stammfunktionen von f

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

unbestimmtes Integral von f.
($\int$ ist das Integralzeichen, $f(x)$ der Integrand und C die Integrationskonstante. Aus dx ist ersichtlich, dass x die Integrationsvariable ist.)

Beispiel: Die Grenzkostenfunktion (1. Ableitung der Kostenfunktion) eines Unternehmens sei $K'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Weiter sei bekannt, dass die Fixkosten 200 sind. Gesucht ist die zugehörige Kostenfunktion.

Wir bestimmen zunächst $\int(3x^2+2x+1)\,dx$.
Da $\frac{d}{dx}(x^3+x^2+x) = 3x^2+2x+1 = K'(x)$ ist, gilt

$$\int(3x^2+2x+1)\,dx = x^3+x^2+x+C \,,\; C\in\mathbb{R}.$$

Mit den vorgegebenen Fixkosten von 200 ermitteln wir daraus die Kostenfunktion $K(x) = x^3+x^2+x+200$ des Unternehmens.

Aus der Definition des unbestimmten Integrals folgt, dass die Ableitung eines unbestimmten Integrals mit dem Integranden übereinstimmt, d.h.

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x),$$

denn: Ist F Stammfunktion zu f, dann gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = F'(x) = f(x).$$

Mit Hilfe dieser Aussage lassen sich nun einige wichtige Integrale von Grundfunktionen unmittelbar bestätigen, wobei sich die folgenden Aussagen stets auf den jeweiligen Definitionsbereich der Funktion beziehen.

Wichtige Integrale von Grundfunktionen

1) Für $a \neq -1$ gilt: $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$

denn: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C\right) = x^a$

2) $\int x^{-1}\,dx = \ln|x|+C$

denn:

1. Fall: $x>0$. Dann gilt $|x| = x$, also $\ln|x| = \ln x$ und
$$\frac{d}{dx}(\ln x + C) = x^{-1}$$

2. Fall: $x < 0$. Dann gilt $|x| = -x$, also $\ln|x| = \ln(-x)$.
Mit der Kettenregel erhält man
$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)+C) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = x^{-1}$$

3) $\int e^x\,dx = e^x + C$, denn: $\frac{d}{dx}(e^x+C) = e^x$

4) $\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln x - x + C$

denn: $\frac{d}{dx}(x\cdot\ln x - x + C) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x$

Im Kapitel Differentialrechnung haben wir gesehen, dass wir durch konsequentes Anwenden der Differentiationsregeln auch komplizierte Funktionen differenzieren können. Die Bestimmung unbestimmter Integrale sogar einfacher Funktionen kann dagegen sehr schwierig sein. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$, die bei der Gaußschen Normalverteilung in der Statistik eine wesentliche Rolle spielt. Man kann zwar zeigen, dass $\int e^{-x^2}dx$ existiert, das Ergebnis lässt sich aber nicht in einer "einfachen Form" durch unsere Standardfunktionen ausdrücken.
Wir werden jedoch einige mathematische Methoden behandeln, mit deren Hilfe man schon eine Menge häufig vorkommender Fälle behandeln kann.
Neben den folgenden einfachen Integrationsregeln werden wir uns mit der Methode der partiellen Integration und der Substitution beschäftigen, die in engem Zusam-

menhang mit der Produktregel und der Kettenregel der Differentialrechnung stehen.

Elementare Integrationsregeln

1) Konstante Faktoren

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$$

2) Integral einer Summe

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

3) "Lineare Substitution" (Begriffsbildung s.u.)

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt mit $a\neq 0$:

$$\int f(\underbrace{ax+b}_{\text{(lineare Funktion von } x)})\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

denn: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)=\frac{1}{a}\cdot a\cdot F'(ax+b)=f(ax+b)$

Beispiel:

$$\int(2x^2+x-3)\,dx = 2\cdot\int x^2\,dx + \int x\,dx - 3\cdot\int 1\,dx$$
$$= 2\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3\cdot x+C$$

$$\int\left(\frac{2}{x}-4\cdot e^x\right)dx = 2\cdot\int\frac{1}{x}\,dx - 4\cdot\int e^x\,dx = 2\ln|x|-4e^x+C$$

$$\int(2x-5)^{184}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{185}(2x-5)^{185}+C$$

$$\int\frac{1}{(4x-7)}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x-7|+C$$

$$\int\ln\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}x\cdot\ln\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x\right)+C = x\cdot\ln\left(\frac{1}{2}x\right)-x+C$$

$a>0 \wedge a \neq -1$: $\int \log_a x \, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx$

$$= \frac{1}{\ln a}(x \ln x - x) + C$$

$a \neq 0$: $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

$a>0 \wedge a \neq -1$: $\int a^x \, dx = \int e^{(\ln a)\cdot x} \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{(\ln a)\cdot x} + C = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

Partielle Integration

Aus der Regel für die Differentiation eines Produktes zweier Funktionen $(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ lässt sich eine sehr wichtige und häufig anzuwendende Integrationsregel herleiten.

Indem man auf beiden Seiten der Produktregel das unbestimmte Integral bildet und beachtet, dass $f(x)\cdot g(x)$ eine Stammfunktion zu $(f(x)\cdot g(x))'$ ist, erhält man

$$f(x)\,g(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx .$$

Durch Umordnen erhält man daraus die Formel der partiellen Integration

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

In den folgenden Beispielen werden wir sehen, wie sich diese Regel verwenden lässt.

Prinzipiell lässt sich die Formel für die partielle Integration sinnvoll anwenden, wenn

1) $g(x)$ bestimmt werden kann <u>und</u> das neue Integral auf der rechten Seite leichter zu bestimmen ist als das

ursprüngliche Integral.

2) $g(x)$ bestimmt werden kann und man eine Gleichung für das unbekannte Integral erzeugen kann.

Beispiel: $\int x \cdot e^x \, dx$

Zunächst müssen wir überlegen, welche der Funktionen $f(x)$ und welche $g'(x)$ sein soll.

Prinzipiell hat man dafür zwei Möglichkeiten.

1. Nehmen wir $f(x) = e^x$ und $g'(x) = x$, dann ist $f'(x) = e^x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$. Wenn wir dies in die Formel für die partielle Integration einsetzen, erhalten wir auf der rechten Seite ein Integral, das nicht einfacher, sondern komplizierter ist als das ursprüngliche. Diese Wahl ist also ungeeignet.
2. Nehmen wir $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$, dann ist $f'(x) = 1$ und $g(x) = e^x$. Einsetzen in die Formel für die partielle Integration liefert

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g'(x)}}{e^x} \, dx = \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{e^x} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x)}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g(x)}}{e^x} \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Wichtig!

Wie man ohne viel "Rumprobieren" die Rollen von $f(x)$ und $g'(x)$ verteilt, lernt man am besten durch ÜBEN!

Beispiel: $\int x^2 \cdot e^{3x}\,dx$

Wenn wir hier $f(x)=e^{3x}$ und $g'(x)=x^2$ wählen, ist $f'(x)=3e^{3x}$ und $g(x)=\frac{1}{3}x^3$, d.h. "das neue Integral" wird schwierigér.

Wenn wir dagegen $f(x)=x^2$ und $g'(x)=e^{3x}$ wählen, wird $f'(x)=2x$ und $g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$ und wir erhalten:

$$\int \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{x^2}} \cdot \underset{g'(x)}{\underset{\downarrow}{e^{3x}}}\,dx = \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{x^2}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{3}e^{3x}}} - \int \underset{f'(x)}{\underset{\downarrow}{2x}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{3}e^{3x}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\int \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underset{g'(x)}{\underset{\downarrow}{e^{3x}}}\,dx$$ (noch mal partiell integrieren!)

$$= \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}\left\{ \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{3}e^{3x}}} - \int \underset{f'(x)}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{3}e^{3x}}}\,dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x e^{3x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C$$

Probe möglich durch Differenzieren der rechten Seite! Die Ableitung muss den Integranden ergeben!

Beispiel: $\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \,dx$ für $x>0$.

Wir wählen $f(x)=\ln x$ und $g'(x)=\frac{1}{x}$. Dann ist $f'(x)=\frac{1}{x}$ und $g(x)=\ln x$. Somit

$$\int \underset{g'(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{x}}} \cdot \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{\ln x}}\,dx = \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{\ln x}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\ln x}} - \int \underset{f'(x)}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{x}}} \cdot \underset{g(x)}{\underset{\downarrow}{\ln x}}\,dx$$

Wir haben nun auf der rechten Seite das ursprüngliche Integral stehen mit einem anderen Vorfaktor (c-1). Damit haben wir eine Gleichung für das unbekannte Integral hergeleitet, die wir nun nach dem ubekannten Integral auflösen können.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx \quad \Big| + \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = (\ln x)^2 + C_1 \, , \; C_1 \in \mathbb{R} \quad \Big| : 2$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \frac{1}{2} C_1 \, , \; C_1 \in \mathbb{R}$$

Mit der Umbenennung von $\frac{1}{2} C_1 = C$ erhalten wir insgesamt:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

Integration durch Substitution

Auch die Kettenregel der Differentialrechnung lässt sich verwenden, um eine wichtige Integrationsmethode herzuleiten. Ist F Stammfunktion von f, so liefert uns die Kettenregel $(F(g(x)) + C)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Geht man auf beiden Seiten zum unbestimmten Integral über und beachtet, dass $\int (F(g(x)) + C)' \, dx = F(g(x)) + C$ ist, erhält man die Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C = \int f(u) \, du$$

mit $u = g(x)$.

Beispiel: $\int 9x^2 (3x^3 - 1)^{16} \, dx$

Wir substituieren $u = 3x^3 - 1$.

Dann gilt: $\frac{du}{dx} = 9x^2 \Rightarrow du = 9x^2 dx$

Damit erhält man mit anschließender Rücksubstitution

$$\int 9x^2(3x^3-1)^{16}\,dx = \int u^{16}\,du = \frac{1}{17}u^{17} + C$$
$$= \frac{1}{17}(3x^3-1)^{17} + C$$

$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx \,, \quad x > -2.$

Wir substituieren $u = x^3+8$.

Dann gilt: $\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{1}{3}du = x^2\,dx$

Damit erhält man mit anschließender Rücksubstitution

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+8} + C$$

Zwei häufig vorkommende Spezialfälle lassen sich allgemein angeben:

1) Ist F Stammfunktion zu f und $a \neq 0$, so gilt

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad \text{(s.o.)}$$

2) Ist g differenzierbar, dann gilt

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

Mit der Substitution $u = g(x)$, d.h. $du = g'(x)\,dx$ erhält man $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{\overbrace{7x^6+6x-9}^{g'(x)}}{\underbrace{x^7+3x^2-9x+10}_{g(x)}}\,dx = \ln|x^7+3x^2-9x+10| + C$

$$\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}\,dx = -\frac{1}{6}\int \frac{\overbrace{6e^{2x}}^{g'(x)}}{\underbrace{1-3e^{2x}}_{g(x)}}\,dx = -\frac{1}{6}\ln|1-3e^{2x}| + C$$

Bestimmte Integrale

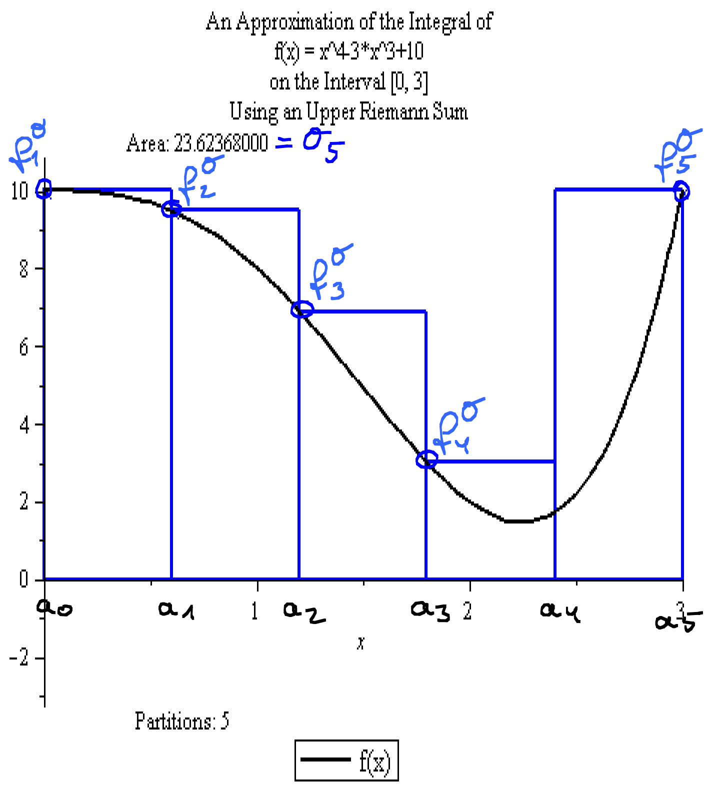
Im folgenden setzen wir voraus, dass $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ist auf $[a,b]$. Wir teilen das Intervall $[a,b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

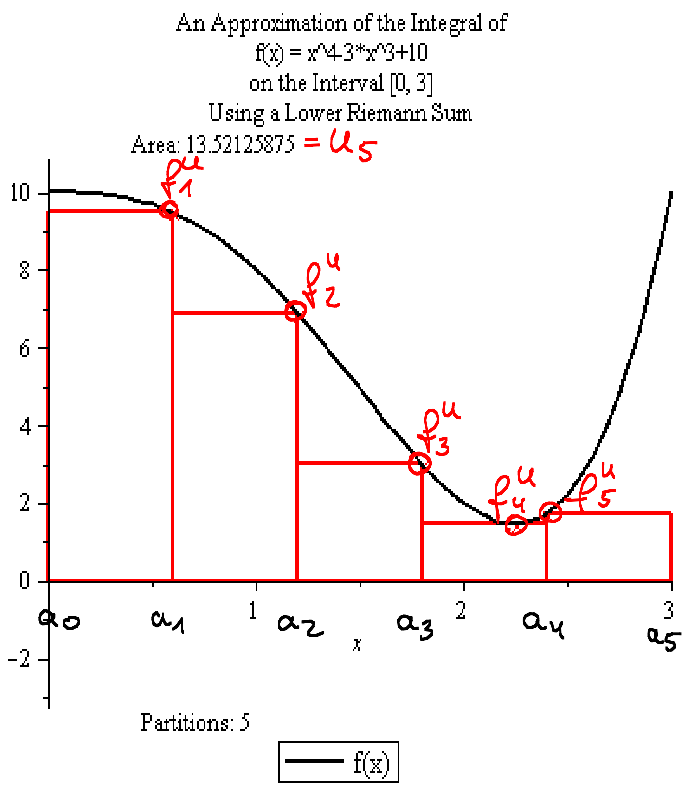
$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a & a+\Delta x & a+2\Delta x & \ldots & a+(n-1)\Delta x & b = a+n\Delta x \end{array}$$

D.h. $[a,b] = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1},a_n]$

Sei nun zunächst $f(x) \geq 0$ für alle $x\in[a,b]$.

Mit f_j^u bezeichnen wir den minimalen Funktionswert und mit f_j^o den maximalen Funktionswert auf dem Intervall $[a_{j-1},a_j]$, $j=1,\ldots,n$.





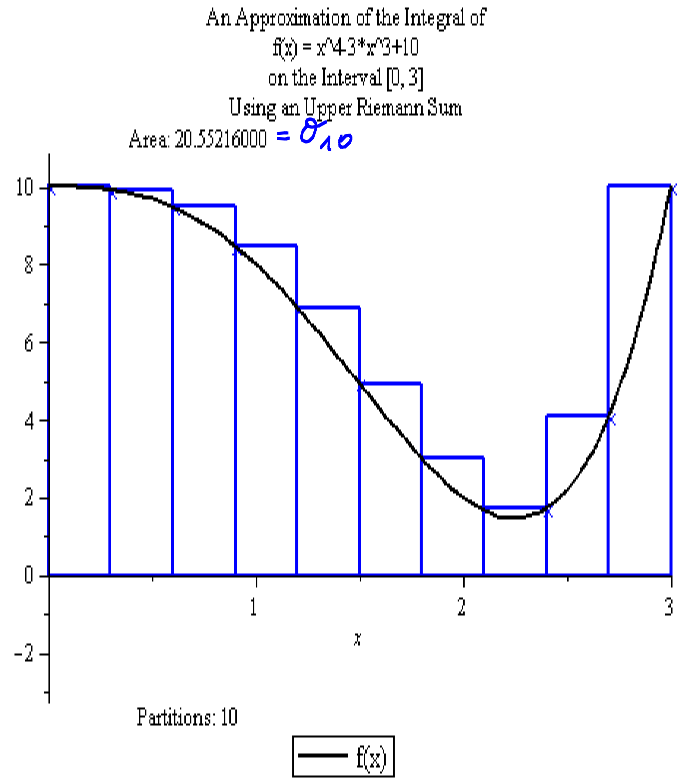
Für die Summe der Rechteckflächen gilt dann:

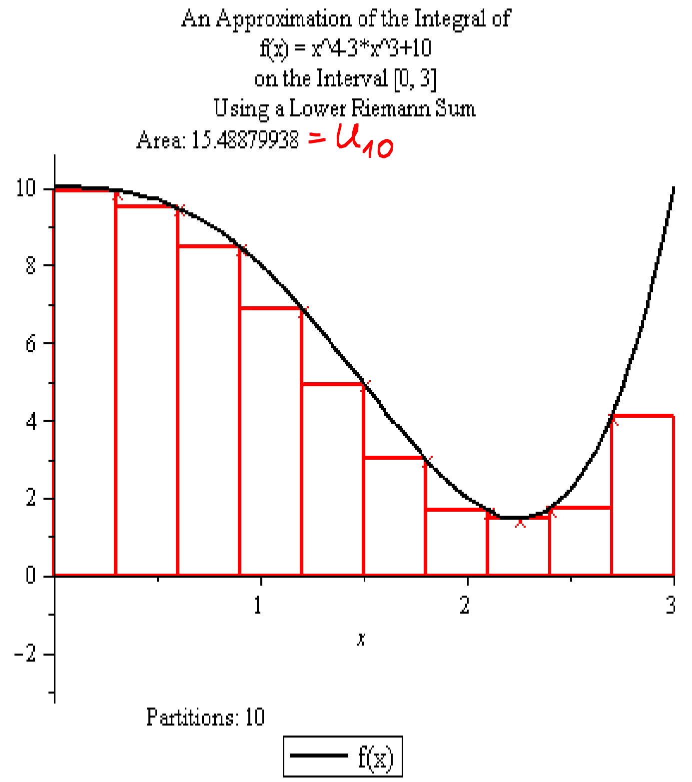
$$O_n = \Delta x\cdot f_1^o + \Delta x f_2^o + \ldots + \Delta x f_n^o = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{n} f_j^o \quad \text{(Obersumme)}$$

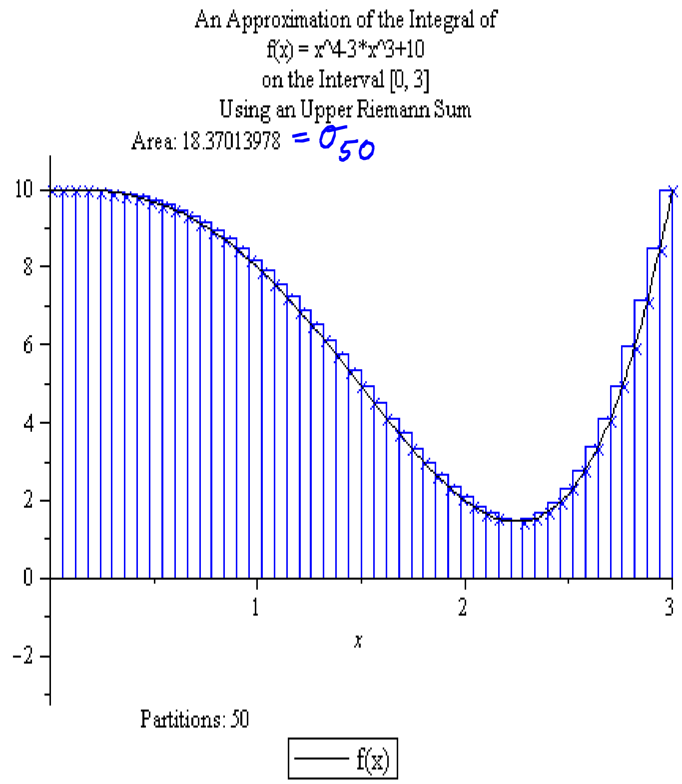
$$U_n = \Delta x\cdot f_1^u + \Delta x f_2^u + \ldots + \Delta x f_n^u = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^{n} f_j^u \quad \text{(Untersumme)}$$

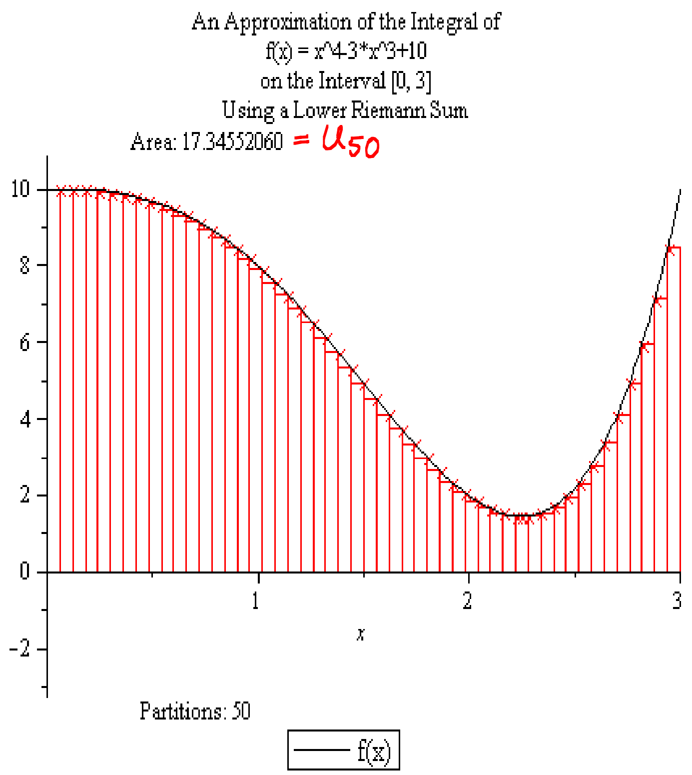
O_n ist eine obere Schranke und U_n eine untere Schranke für den Inhalt der Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[a,b]$, d.h. $U_n \leq A \leq O_n$.

Lässt man nun die Anzahl n der Teilintervalle wachsen, d.h. Δx kleiner werden, so kann man (bei genügend gutartigen Funktionen) beobachten, dass U_n und O_n immer dichter aneinanderrücken (siehe Bilder unten).









Definition: Falls die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} O_n$ und $\lim_{n\to\infty} U_n$ existieren und denselben Grenzwert G besitzen, dann heißt

$$G = \int_a^b f(x)\,dx$$

bestimmtes Integral von $f(x)$ über $[a,b]$.

Die Funktion f heißt dann integrierbar über $[a,b]$.

Man kann zeigen, dass eine im Intervall $[a,b]$ stetige Funktion stets über $[a,b]$ integrierbar ist.

Den Zusammenhang zu den vorher behandelten unbestimmten Integralen und Stammfunktionen liefert der folgende wichtige Satz. Gleichzeitig liefert er auch eine Berechnungsvorschrift für bestimmte Integrale.

Satz (Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und F eine (beliebige) Stammfunktion von f. Dann existiert das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Zur Abkürzung schreibt man auch $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.)

Jedes Integral $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ ist eine Stammfunktion zu $f(x)$.

Beispiel: $\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = 21$

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\cdot(\ln x - 1)\Big|_1^2 = 2(\ln 2 - 1) - 1\cdot(\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1) = 2\ln 2 - 1$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3 = -\ln 3$$

Wie wir aus der Herleitung gesehen haben, berechnet man für eine Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit dem bestimmten Integral die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[a,b]$. Hat $f(x)$ wechselndes Vorzeichen, so gehen in $\int_a^b f(x)\,dx$ die Flächenanteile unterhalb der x-Achse negativ ein. Mit $\int_a^b |f(x)|\,dx$ berechnet man die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, wobei alle Flächenanteile positiv zählen.

Für die konkrete Berechnung benötigt man häufig, dass für eine über $[a,b]$ integrierbare Funktion und $a<c<b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^4+x^3-7x^2-x+6 = (x+3)(x+1)(x-1)(x-2)$.

Wir berechnen das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[-3,2]$.

$$\int_{-3}^{2} (x^4+x^3-7x^2-x+6)\,dx = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\Big|_{-3}^{2} = -\frac{125}{2}$$

Zur Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x Achse im Intervall $[-3,2]$ berechnen wir

$$\int_{-3}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{-3}^{-1} (-f(x))\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} (-f(x))\,dx$$

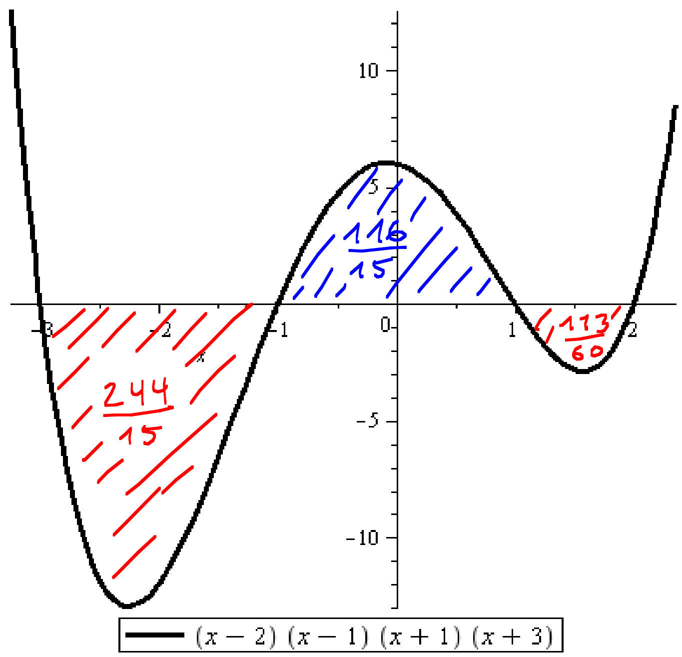
$$= \left(-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right)\Big|_{-3}^{-1}$$

$$+\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$+\left(-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right)\Big|_{1}^{2}$$

$$= \frac{244}{15} + \frac{116}{15} + \frac{113}{60}$$

$$= \frac{1553}{60}$$



An dieser Stelle soll nun kurz angesprochen werden, wie bei variablen Integrationsgrenzen bezüglich der Integrationsgrenzen differenziert werden kann.

Falls $F'(x) = f(x)$, so ist mit variabler oberer Grenze t

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^t = F(t) - F(a), \text{ so dass}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_a^t f(x)\,dx\right\} = F'(t) = f(t).$$

Entsprechend ist mit variabler unterer Grenze t

$$\int_t^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_t^b = F(b) - F(t), \text{ so dass}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_t^b f(x)\,dx\right\} = -F'(t) = -f(t).$$

Allgemeiner gilt mit differenzierbaren Funktionen $a(t)$ und $b(t)$ für die Grenzen

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a(t)}^{b(t)} = F(b(t)) - F(a(t)).$$

Daraus erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx\right\} = F'(b(t))\,b'(t) - F'(a(t))\,a'(t)$$
$$= f(b(t))\,b'(t) - f(a(t))\,a'(t)$$

Beispiel: $\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t x^2\,dx\right\} = t^2$, $\frac{d}{dt}\left\{\int_t^3 e^{-x^2}\,dx\right\} = -e^{-t^2}$,

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{t^2+1}^{t^3+1} \sqrt{x}\,dx\right\} = \sqrt{t^3+1}\cdot 3t^2 - \sqrt{t^2+1}\cdot 2t$$

Beispiel: Wir betrachten eine Population von n Personen. Mit $F(r)$ bezeichnen wir den Anteil von Personen, die in einem Jahr nicht mehr als r € verdienen.
Bei großem n geht man in ökonomischen Anwendungen häufig davon aus, dass F (in guter Näherung) als eine Funktion mit einer stetigen Ableitung f angenommen werden kann.
Dann heißt f die Einkommensverteilungsfunktion und F die assoziierte kumulative Verteilungsfunktion.
Daraus können verschiedene Größen berechnet werden.

Anzahl der Personen mit Einkommen zwischen a und b:

$$N = n \cdot \int_a^b f(r)\,dr$$

Gesamteinkommen der Personen mit Eink. zwischen a und b:

$$M = n \cdot \int_a^b r f(r)\,dr$$

Mittleres Einkommen der Personen mit Eink. zwischen a und b:

$$m = \frac{M}{N} = \frac{\int_a^b r \cdot f(r)\,dr}{\int_a^b f(r)\,dr}$$

Sehr gebräuchlich ist die Pareto-Verteilung $f(r) = B \cdot r^{-\beta}$, $B > 0$ und etwa $2.4 < \beta < 2.6$, wobei r nicht nahe bei Null sei.
Wir betrachten speziell $f(r) = B \cdot r^{-2.5}$.

$$N = n \cdot \int_a^b B \cdot r^{-2.5}\,dr = n \cdot B \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) r^{-1.5}\Big|_a^b = \frac{2}{3} nB\left(a^{-1.5} - b^{-1.5}\right)$$

$$M = n \cdot \int_a^b r \cdot B \cdot r^{-2.5}\,dr = nB \int_a^b r^{-1.5}\,dr = -2nB\, r^{-0.5}\Big|_a^b = 2nB\left(a^{-0.5} - b^{-0.5}\right)$$

$$m = \frac{M}{N} = 3\,\frac{a^{-0.5} - b^{-0.5}}{a^{-1.5} - b^{-1.5}}$$

Wir kommen nun noch einmal auf Integrationsregeln zurück, die wir im Zusammenhang mit den unbestimmten Integralen besprochen haben und überlegen, wie diese bei der Berechnung bestimmter Integrale anzuwenden sind.

Partielle Integration bei bestimmten Integralen

Da $f(x)g(x)$ Stammfunktion von $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ist, gilt:

$$\underbrace{\int_a^b (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx}_{} = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Umstellung der Gleichung liefert die Formel für die partielle Integration bei bestimmten Integralen

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beispiel:

$$\int_0^T (a+bt)e^{-rt}dt \quad \text{mit } a,b,r \neq 0.$$

Mit $f(t)=a+bt$, $g'(t)=e^{-rt}$, d.h. $f'(t)=b$, $g(t)=-\frac{1}{r}e^{-rt}$ erhalten wir

$$\int_0^T \underset{\downarrow}{\underset{f(t)}{(a+bt)}}\,\underset{g'(t)}{e^{-rt}}dt = \underset{f(t)}{(a+bt)}\cdot\Big(\underset{g(t)}{-\frac{1}{r}e^{-rt}}\Big)\Big|_0^T - \int_0^T b\cdot\Big(-\frac{1}{r}\Big)e^{-rt}dt$$

$$= -\frac{1}{r}\left\{(a+bT)e^{-rT}-a\right\} + \frac{1}{r}b\cdot\Big(-\frac{1}{r}e^{-rt}\Big)\Big|_0^T$$

$$= -\frac{1}{r}\left\{(a+bT)e^{-rT}-a\right\} - \frac{1}{r^2}b\left(e^{-rT}-1\right)$$

Substitution bei bestimmten Integralen

Führt man in einem bestimmten Integral eine Substitution durch, so ist zu beachten, dass auch die Integrationsgrenzen geändert werden müssen. Es gilt die Regel für die Substitution bei bestimmten Integralen

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad (u=g(x)),$$

denn, ist $F'(u)=f(u)$, dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Beispiel: $\int_0^1 x^5\sqrt{4-x^3}\,dx$

Wir substituieren $u=4-x^3 \iff x^3=4-u$

Dann ist $\frac{du}{dx} = -3x^2 \Rightarrow -\frac{1}{3}du = x^2dx$

Untere Grenze: $x_1=0 \Rightarrow u_1 = 4-0^3 = 4$

Obere Grenze: $x_2=1 \Rightarrow u_2 = 4-1^3 = 3$

Damit erhalten wir

$$\int_0^1 x^5\sqrt{4-x^3}\,dx = \int_0^1 x^3\sqrt{4-x^3}\,x^2dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_4^3 (4-u)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\int_3^4 \left(4u^{1/2}-u^{3/2}\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\left\{4\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right\}\Big|_3^4 = \frac{1}{9}\left(64-\sqrt{27}\right)+\frac{2}{15}\left(\sqrt{243}-32\right)$$

Beispiel: $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

Substitution: $u=e^x$, $du=e^x dx$

Grenzen: $x_1=0 \Rightarrow u_1=e^0=1$

$x_2=2 \Rightarrow u_2=e^2$

$$= \int_1^{e^2}\frac{1}{1+u}\,du = \ln|1+u|\Big|_1^{e^2}$$

$$= \ln(1+e^2)-\ln 2$$

Bei der Durchführung von Substitutionen kann es passieren, dass die neue untere Grenze größer ist als die neue obere Grenze. Dann kann man verwenden, dass gilt:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Achtung! Beim Vertauschen der Grenzen kommt ein Faktor (-1) dazu.

Beispiel:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^3-e^x}\,dx$$

Substitution: $u = e^3 - e^x$

$$\frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow -du = e^x dx$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = e^3 - e = e(e^2-1) = e(e-1)(e+1)$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = e^3 - e^2 = e^2(e-1)$$

Es ist $u_2 < u_1$

$$= \int_{e(e-1)(e+1)}^{e^2(e-1)} \left(-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \int_{e^2(e-1)}^{e(e-1)(e+1)} \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| \Big|_{e^2(e-1)}^{e(e-1)(e+1)}$$

$$= \ln\big(e(e-1)(e+1)\big) - \ln\big(e^2(e-1)\big)$$

$$= \underbrace{\ln e}_{=1} + \cancel{\ln(e-1)} + \ln(e+1) - 2\cdot\underbrace{\ln e}_{=1} - \cancel{\ln(e-1)}$$

$$= \ln(e+1) - 1$$

Bisher haben wir bei der Berechnung bestimmter Integrale nur Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f stetig auf $[a,b]$ betrachtet. Wir werden dies nun in zwei Richtungen erweitern. Zum einen werden wir überlegen, wie mit unendlichen Integrationsgrenzen umzugehen ist, zum anderen werden wir uns mit nicht beschränkten Funktionen befassen.
deren werden wir uns mit nicht beschränkten Funk-
Zusammengefasst fällt dies unter den Begriff:

Uneigentliche Integrale

In der Statistik und in den Wirtschaftswissenschaften hat man es auch häufig mit Integralen über unendliche Integrationsintervalle zu tun.

Wir betrachten z.B. $\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b}$, $b > 0$.
Was passiert, wenn wir auf der rechten Seite b immer größer werden lassen? Da $\lim_{b\to\infty} e^{-b} = 0$, ist es naheliegend

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = 1$$

zu schreiben. Allgemein legt man folgendes fest.

Definition: Sei f eine Funktion, die stetig ist für alle $x \geq a$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx$ für alle $b \geq a$ definiert. Existiert der Grenzwert $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ (und ist endlich), so heißt f über $[a,\infty)$ integrierbar. Man definiert dann $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$. Man sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **konvergiert**. Falls der Grenzwert nicht existiert, sagt man, dass das uneigentliche Integral **divergiert**.

Beispiel: Die Dichtefunktion einer Exponentialverteilung ist gegeben durch $f(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$, mit einer Konstanten $\lambda>0$. Zunächst gilt $f(t)>0$ für alle $t\geq 0$ und $\int_0^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt$ ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse über dem Intervall $[0,b]$. Wir zeigen nun, dass die Fläche über dem Intervall $[0,\infty)$ gleich 1 ist.

Da $\int_0^b \lambda\cdot e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^b = 1-e^{-\lambda b}$ ist, gilt

$$\int_0^\infty \lambda\cdot e^{-\lambda t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \lambda\cdot e^{-\lambda t}\,dt = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-\lambda b}) = 1$$

Beispiel: Wir untersuchen $\int_1^\infty x^{-1}\,dx$.

Für $b>1$ gilt $\int_1^b x^{-1}\,dx = \ln|x|\Big|_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b$.

Da $\lim\limits_{b\to\infty}\ln b=\infty$, folgt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty \text{ divergiert.}$$

Analog zu einer unendlichen oberen Grenze verlaufen nun die Betrachtungen bei einer unendlichen unteren Grenze bzw. wenn beide Grenzen nicht endlich sind.

Definition: Sei f eine Funktion, die stetig ist für alle $x\leq b$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx$ für alle $a\leq b$ definiert. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (und ist endlich), so heißt f über $[-\infty,b)$ integrierbar. Man definiert dann $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Man sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ **konvergiert**. Falls der Grenzwert nicht existiert, sagt man, dass das uneigentliche Integral **divergiert**.

Sind beide Integrationsgrenzen unendlich, so zerlegt man $(-\infty,\infty)=(-\infty,c]\cup[c,\infty)$ und betrachtet $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty}f(x)\,dx$. Dies führt auf folgende

Definition: Sei f eine Funktion, die stetig ist für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,dx$ für alle a,b definiert. Existieren die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx$ und $\lim\limits_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$ (und sind endlich), so heißt f über $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ integrierbar. Man definiert dann $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx+\lim\limits_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$. Man sagt, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ konvergiert. Falls (mindestens) einer der Grenzwerte nicht existiert, sagt man, dass das uneigentliche Integral divergiert.

Im Zusammenhang mit der Frage nach der Konvergenz eines uneigentlichen Integrals kann es nützlich sein, dies mit einem uneigentlichen Integral zu vergleichen, über dessen Konvergenz und Grenzwert man bereits etwas weiß.

Vergleichstest auf Konvergenz

1) Seien $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,\infty)$. Weiter gelte $|f(x)|\le g(x)$ für alle $x\in[a,\infty)$ und $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ konvergent. Dann ist auch $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ konvergent und es gilt

$$\left|\int_a^{\infty}f(x)\,dx\right|\le\int_a^{\infty}g(x)\,dx.$$

2) Seien $f,g:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $(-\infty,b]$. Weiter gelte $|f(x)|\le g(x)$ für alle $x\in(-\infty,b]$ und $\int_{-\infty}^{b}g(x)\,dx$ konvergent.

Dann ist auch $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ konvergent und es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \right| \leq \int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx .$$

3) Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$. Weiter gelte $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ konvergent. Dann ist auch $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergent und es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx .$$

Beispiel: In der ökonomischen Wachstumstheorie treten Integrale der Form

$$\int_{t_0}^{\infty} U(c(t)) \cdot e^{-\alpha t}\,dt \text{ auf.}$$

Dabei bezeichnet $c(t)$ den Konsum zur Zeit t, U eine Nutzenfunktion und α eine positive Diskontierungsrate. Wir betrachten Nutzenfunktionen für die

$$|U(c(t))| \leq M \cdot e^{\beta t} \quad \text{für alle } t \geq t_0$$

mit einer Konstanten $M > 0$ und $0 \leq \beta < \alpha$.

Daraus schließen wir für den Betrag des Integranden

$$|U(c(t)) \cdot e^{-\alpha t}| = |U(c(t))| \cdot e^{-\alpha t} \leq M \cdot e^{-(\alpha-\beta)t} \text{ für alle}$$

$t \geq t_0$. Weiter gilt

$$\int_{t_0}^{T} M e^{-(\alpha-\beta)t}\,dt = \frac{M}{-(\alpha-\beta)}\, e^{-(\alpha-\beta)t} \Big|_{t_0}^{T} = -\frac{M}{\alpha-\beta}\left(e^{-(\alpha-\beta)T} - e^{-(\alpha-\beta)t_0}\right)$$

Da $-(\alpha-\beta) < 0$, folgt

$$\int_{t_0}^{\infty} M e^{-(\alpha-\beta)t}\,dt = \frac{M}{\alpha-\beta}\left\{ e^{-(\alpha-\beta)t_0} - \lim_{T\to\infty} e^{-(\alpha-\beta)T} \right\} = \frac{M}{\alpha-\beta}\, e^{-(\alpha-\beta)t_0},$$

also konvergiert $\int_{t_0}^{\infty} M e^{-(\alpha-\beta)t}\,dt$. Nach dem Vergleichstest konvergiert dann auch $\int_{t_0}^{\infty} U(c(t)) \cdot e^{-\alpha t}\,dt$ und es gilt

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} U(c(t))\, e^{-\alpha t}\,dt \right| \leq \frac{M}{\alpha-\beta}\, e^{-(\alpha-\beta)t_0}$$

Ähnlich wie bei den Betrachtungen für unendliche Integrationsbereiche kann man mit Hilfe von Grenzbetrachtungen bei Funktionen vorgehen, die an einem der Randpunkte oder auch an beiden Randpunkten des Integrationsintervalls nicht definiert sind.

Definition:

1) Sei $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $(a,b]$. Dann ist $\int_{a+h}^{b} f(x)dx$ für alle $h>0$ definiert. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b} f(x)dx$ (und ist endlich), dann definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b} f(x)dx.$$

Man sagt dann, dass das uneigentliche Integral konvergiert.

2) Sei $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b)$. Dann ist $\int_{a}^{b-h} f(x)dx$ für alle $h>0$ definiert. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{a}^{b-h} f(x)dx$ (und ist endlich), dann definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{a}^{b-h} f(x)dx.$$

Man sagt dann, dass das uneigentliche Integral konvergiert

3) Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ stetig auf (a,b) und $c\in\mathbb{R}$ mit $a<c<b$. Konvergieren dann die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$, so definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
$$= \lim_{h_1\to 0^+}\int_{a+h_1}^{c} f(x)dx + \lim_{h_2\to 0^+}\int_{c}^{b-h_2} f(x)dx$$

Wichtig! Die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite sind getrennt zu betrachten!

Beispiel: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Da für $0<h<2$ gilt $\int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_h^2 = 2\sqrt{2}-2\sqrt{h}$, folgt

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{h}\right) = 2\sqrt{2}$$

Beispiel: $\int_0^1 x\cdot \ln x\,dx$

Für $0<h<1$ berechnen wir zunächst mit partieller Integration ($f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$; $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$)

$$\int_h^1 x\cdot\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x\Big|_h^1 - \frac{1}{2}\int_h^1 x\,dx = -\frac{1}{2}h^2\cdot\ln h - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h^2$$

Mit der Regel von l'Hopital berechnen wir

$$\lim_{h\to 0^+} h^2\cdot\ln h = \lim_{h\to 0^+}\frac{\ln h}{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{-\frac{2}{h^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+} h^2 = 0$$

Daraus ermitteln wir nun

$$\int_0^1 x\cdot\ln x\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 x\cdot\ln x\,dx = \lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}h^2\ln h - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h^2\right) = -\frac{1}{4}$$