Kapitel IV: Differentialrechnung

Änderungsraten, Steigungen, Ableitungen, Monotonie

Einführendes Beispiel: Wir erinnern uns zunächst an ein Beispiel aus Kapitel I, in dem es um ein Modell zur Beschreibung der Kosten $b(p)$ von $p\%$ der Verunreinigungen in einem See ging.

$$b(p) = \frac{10p}{105-p}$$

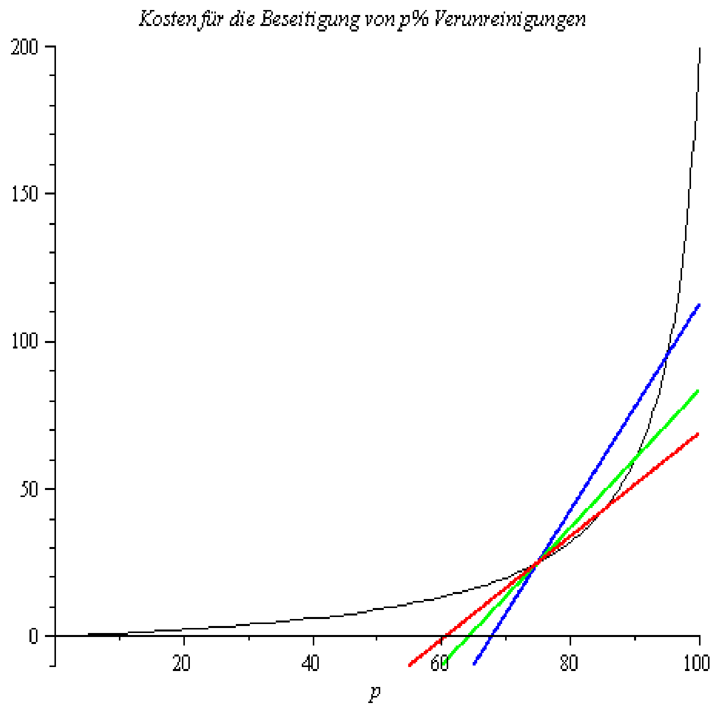
Einige Werte:

p	75	85	90	95
$b(p)$	25	42.5	60	95

Werden statt 75% der Verunreinigungen 95%, 90% bzw. 85% beseitigt, so entstehen Mehrkosten von

$b(95) - b(75) = 70$; $b(90) - b(75) = 35$; $b(85) - b(75) = 17.5$

Der durchschnittliche Zuwachs an Kosten (die durchschnittliche Änderungsrate bei den Kosten) bei Beseitigung von 95%, 90% bzw. 85% statt 75% beträgt $\frac{b(95)-b(75)}{95-75} = \frac{7}{2}$; $\frac{b(90)-b(75)}{90-75} = \frac{7}{3}$; $\frac{b(85)-b(75)}{85-75} = \frac{7}{4}$



Geometrisch sind dies die Steigungen der Sekanten durch die Punkte

$P_0(75,25)$ und $P_{20}(95,95)$,

$P_0(75,25)$ und $P_{15}(90,60)$,

$P_0(75,25)$ und $P_{10}(85,42.5)$

Allgemeiner gilt: $b(75+h) = \dfrac{10(75+h)}{105-(75+h)} = \dfrac{750+10h}{30-h}$.

Die durchschnittliche Änderungsrate für die Beseitigung von $(75+h)$% statt p% der Verunreinigungen, d.h. die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_0(75, 25)$ und $P_h\left(75+h, \dfrac{750+10h}{30-h}\right)$, $h \neq 0$, beträgt

$$\frac{b(75+h)-b(75)}{75+h-75} = \frac{\frac{750+10h}{30-h} - 25}{h} = \frac{35h}{(30-h)h} = \frac{35}{30-h}.$$

Wir interessieren uns nun dafür, was passiert, wenn wir P_h immer dichter an P_0 wählen, d.h. $|h|$ immer kleiner werden lassen oder anders ausgedrückt den Grenzwert für h gegen Null betrachten.

$$\lim_{h \to 0} \frac{b(75+h)-b(75)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{35}{30-h} = \frac{7}{6}$$

Dies ist die momentane Änderungsrate bei den Kosten an der Stelle $p=75$. Geometrisch handelt es sich um die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle $p=75$.

Wir betrachten nun einen beliebigen festen Wert $p \in (0,100)$. Die durchschnittliche Änderungsrate der Kosten bei Beseitigung von $(p+h)$% statt p% der Verunreinigungen beträgt

$$\frac{b(p+h)-b(p)}{(p+h)-p} = \frac{\frac{10(p+h)}{105-(p+h)} - \frac{10p}{105-p}}{h}$$

$$= \frac{10(p+h)(105-p) - 10p(105-p-h)}{h(105-p-h)(105-p)}$$

$$= \frac{1050h}{h(105-p-h)(105-p)}$$

$$= \frac{1050}{(105-p-h)(105-p)},$$

Steigung der Sekanten durch $P_0(p, b(p))$ und $P_h(p+h, b(p+h))$.

Die momentane Änderungsrate bei den Kosten an der Stelle p, d.h. die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle p ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{b(p+h)-b(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1050}{(105-p-h)(105-p)} = \frac{1050}{(105-p)^2}.$$

Diesem Beispiel liegt folgendes allgemeine Konzept zugrunde.

Definition: Sei $f: D_f \longrightarrow W_f$ und $x_0 \in D_f$. Existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

dann heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar. Der Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt 1. Ableitung von f an der Stelle x_0.

Ist I ein Intervall, so heißt f differenzierbar auf I, wenn f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist, d.h. wenn $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ für jedes $x \in I$ existiert.

Im Falle abgeschlossener Intervalle sind an den Intervallrandpunkten jeweils die entsprechenden einseitigen Grenzwerte gemeint.

Häufig werden statt der Bezeichnung $f'(x)$ auch die Notationen $\frac{df(x)}{dx}$ oder $\frac{df}{dx}(x)$ oder $\frac{d}{dx}f(x)$ verwendet.

Verschiedene Bezeichnungen und Sprechweisen:

Differenzenquotient: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x bis $x+h$
- Steigung der Sekanten durch $P_0(x, f(x))$ und $P_h(x+h, f(x+h))$

Differentialquotient: $\frac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

- momentane Änderungsrate von f an der Stelle x
- Steigung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle x
- In ökonomischen Anwendungen findet man häufig folgende Bezeichnungen für die 1. Ableitung: Grenzkosten, Grenzertrag, Grenzgewinn, Grenzneigung zum Konsum, Grenzproduktivität, Grenzneigung zum Sparen, etc.; allgemein Grenz- oder Marginalfunktion.

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ falls $f(x) \neq 0$

- relative oder proportionale Änderungsrate

In Kapitel I haben wir bereits definiert, wann eine Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist.
Im Falle differenzierbarer Funktionen können wir das Monotonieverhalten einfacher mit Hilfe der 1. Ableitung untersuchen.
Aus der geometrischen Interpretation sofort ersichtlich ist der Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten und dem Vorzeichen der 1. Ableitung. Genauer gilt:

Satz: Sei f eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion. Dann gilt:

1) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Leftrightarrow f$ monoton wachsend auf I
2) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Leftrightarrow f$ monoton fallend auf I
3) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ streng mon. wachsend auf I
4) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ streng mon. fallend auf I

Wir erinnern uns an dieser Stelle noch einmal daran, dass die strenge Monotonie einer Funktion hinreichend für die Existenz einer Umkehrfunktion ist.

Bevor wir uns die Begriffe an weiteren Beispielen klarmachen können, müssen wir zunächst wissen, was die Ableitungen unserer Grundfunktionen sind und wie man die Ableitungen verknüpfter Funktionen berechnet.

Beispiel: 1) Ist $f(x) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so ist die Steigung des Graphen an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gleich 0, also ist $f'(x) = 0$.

2) Ist $f(x) = ax + b$, so ist die Steigung des Graphen an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gleich a, also ist $f'(x) = a$.

3) Sei $f(x) = x^2$. Dann gilt für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = 2x + h$$

Somit folgt: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$,

d.h. $f'(x) = 2x$.

4) Sei $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Somit folgt: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\lim\limits_{h \to 0} (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

d.h. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$.

Nun ist es zum Glück nicht so, dass wir ständig Ableitungen über Grenzwerte ermitteln müssen. Das haben findige Mathematiker schon längst erledigt und wir können die Ergebnisse verwenden.

Ableitungen der Potenz- und Wurzelfunktionen

Sei $f(x) = x^a$. Dann gilt:

$$f'(x) = ax^{a-1} \text{ für alle } \begin{cases} x \in D_f, \text{ falls } a \geq 1 \\ x \in D_f \setminus \{0\}, \text{ falls } (a < 1 \wedge a \neq 0) \end{cases}$$

Beispiel:

$$f_1(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = 5x^4$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f_2'(x) = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x^7} = x^{7/3} \quad \Rightarrow \quad f_3'(x) = \frac{7}{3}x^{4/3} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt[3]{x^4}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} = x^{-9/5} \quad \Rightarrow \quad f_4'(x) = -\frac{9}{5}x^{-14/5} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^{14}}}$$

Ableitungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion

Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $f(x) = \ln x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Um nun verknüpfte und kompliziertere Funktionen differenzieren zu können, benötigen wir Regeln dafür, wie Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen von Funktionen abgeleitet werden.

Wir stellen diese Regeln zusammen und zeigen exemplarisch, wie sich auch diese allgemeinen Regeln aus der Definition des Differentialquotienten herleiten lassen.

Ableitungsregeln unter der Voraussetzung, dass die auftretenden Ableitungen existieren:

Konstante Faktoren bleiben bei der Differentiation erhalten.

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$$

Summenregel: Die Ableitung einer Summe (Differenz) von Funktionen ist die Summe (Differenz) der Ableitungen.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$
$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$$

Produktregel:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

1) $f_1(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^{1/3} + x^{-3}$

$$f_1'(x) = 3 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} + (-3) \cdot x^{-4} = 6x - \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x^4}$$

2) $f_2(x) = x^3 \cdot \ln x$; $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$f_2'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1)$$

3) $f_3(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2}$; $u(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $u'(x) = 4x - 5$

$v(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$, $v'(x) = 3x^2 + x$

$$f_3'(x) = \frac{(4x-5)(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2) - (2x^2 - 5x + 1)(3x^2 + x)}{(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-2x^4 + 10x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 10}{(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2)^2}$$

4) $f_4(x) = \dfrac{(0.5x^2+3)\cdot e^x}{x^2\cdot \ln x}$

Ableitung des Zählers $u(x)=(0.5x^2+3)\cdot e^x$ mit Produktregel:

$u'(x) = x\cdot e^x + (0.5x^2+3)\cdot e^x = (0.5x^2+x+3)\cdot e^x$

Ableitung des Nenners $v(x) = x^2\cdot \ln x$ mit Produktregel:

$v'(x) = 2x\cdot \ln x + x^2\cdot \frac{1}{x} = x\cdot(2\ln x+1)$

$$f_4'(x) = \frac{(0.5x^2+x+3)e^x\cdot x^2\ln x - (0.5x^2+3)\cdot e^x\cdot x\cdot(2\ln x+1)}{x^4\cdot(\ln x)^2}$$

$$= \frac{x\cdot e^x\,[(0.5x^2+3)(x\ln x-1) - 6\ln x]}{x^4\cdot(\ln x)^2}$$

Herleitung der Produktregel: $f(x) = u(x)\cdot v(x)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)\,v(x+h) - u(x)\,v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h)\,v(x+h) - u(x)\,v(x+h) + u(x)\,v(x+h) - u(x)\,v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,v(x+h) - u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} v(x+h) + u(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Beispiel zur Interpretation der Produktregel

Bei der Förderung aus einer Ölquelle beschreibe $x(t)$ die Förderungsrate in Barrel pro Tag zur Zeit t und $p(t)$ den Preis in Dollar pro Barrel zur Zeit t.

Sowohl die Förderungsrate als auch der Preis ändern sich mit der Zeit t.

Die Einnahmen in Dollar pro Tag betragen dann $R(t) = p(t) \cdot x(t)$ und es gilt nach der Produktregel

$$R'(t) = p'(t) \cdot x(t) + p(t) \cdot x'(t)$$

Steigen $p(t)$ und $x(t)$ (z. B. wegen der Inflation und auf Grund von Erweiterungen der Kapazitäten der Fördereinrichtungen), d. h. $p'(t) > 0$ und $x'(t) > 0$, so wächst $R(t)$, d. h. $R'(t) > 0$, aus zwei Gründen. $R(t)$ wächst, weil der Preis steigt. Dieses Wachstum $p'(t) \cdot x(t)$ ist proportional zur Fördermenge. $R(t)$ wächst aber auch, weil die Förderung zunimmt. Dieses Wachstum $p(t) \cdot x'(t)$ ist proportional zum Preis. $R'(t)$, die Gesamtänderungsrate ist die Summe dieser beiden Beiträge.

Für die relative Änderungsrate gilt:

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{p'(t) \cdot x(t) + p(t) x'(t)}{p(t) \cdot x(t)} = \frac{p'(t)}{p(t)} + \frac{x'(t)}{x(t)}$$

Somit ist die relative Wachstumsrate der Einnahmen die Summe der relativen Änderungsraten des Preises und der Fördermenge.

Beispiel: Sei $W(t)$ das nominale Einkommen und $P(t)$ der Preisindex zur Zeit t. Dann heißt

$$w(t) = \frac{W(t)}{P(t)}$$ der reale Lohnsatz.

Die momentane Änderungsrate des realen Lohnsatzes beträgt dann nach der Quotientenregel

$$w'(t) = \frac{W'(t) \cdot P(t) - W(t) \cdot P'(t)}{[P(t)]^2}.$$

Für die relative Änderungsrate erhält man

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{\frac{W'(t)\cdot P(t) - W(t)\cdot P'(t)}{[P(t)]^2}}{\frac{W(t)}{P(t)}}$$

$$= \frac{W'(t)\cdot P(t) - W(t)\cdot P'(t)}{[P(t)]^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{P(t)}}{W(t)}$$

$$= \frac{W'(t)}{W(t)} - \frac{P'(t)}{P(t)} .$$

Die relative Änderungsrate des realen Lohnsatzes ist also die Differenz aus den relativen Änderungsraten des nominalen Lohnsatzes und des Preisindex. Steigt der nominale Lohn um 5% pro Jahr und die Preise wachsen um 6% pro Jahr, dann fallen die realen Löhne um 1% pro Jahr.

Kettenregel: Die Ableitung einer verketteten Funktion ist das Produkt der "äußeren" und der "inneren" Ableitung.

$$\frac{d}{dx}(f(u(x))) = \underbrace{\frac{d}{du}(f(u(x)))}_{\text{„äußere" Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}u(x)}_{\text{„innere" Ableitung}} = f'(u(x))\cdot u'(x)$$

Beispiel: 1) $f(x) = (x^3+2x+7)^{50}$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u) = u^{50}$ und $u(x) = x^3+2x+7$ mit $f'(u) = 50\cdot u^{49}$ und $u'(x) = 3x^2+2$

Also: $f'(x) = \underbrace{50\cdot(x^3+2x+7)^{49}}_{\text{„äußere" Ableitung}} \cdot \underbrace{(3x^2+2)}_{\text{„innere" Ableitung}}$

2) $f(x) = e^{2x^2-5}$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u)=e^u$ und $u(x)=2x^2-5$ mit $f'(u)=e^u$ und $u'(x)=4x$.
Also: $f'(x) = e^{2x^2-5} \cdot 4x$

3) $f(x) = \ln(0.3 \cdot x^3 + 2)$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u)=\ln u$ und $u(x)=0.3x^3+2$ mit $f'(u)=\frac{1}{u}$ und $u'(x)=0.9x^2$

Also: $f'(x) = \frac{1}{0.3x^2+2} \cdot 0.9x^2 = \frac{0,9x^2}{0.3x^2+2}$

Anwendung der Kettenregel zur Differentiation der allgemeinen Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Wir verwenden, dass die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus zueinander invers sind und formen unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus um.

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

Differentiation mit der Kettenregel liefert:

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = (\ln a) \cdot a^x$$

Dieser "Trick" zum Umschreiben lässt sich auch bei Funktionen einsetzen, in denen die unabhängige Variable in der Basis und im Exponenten auftritt.

Beispiel: $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$

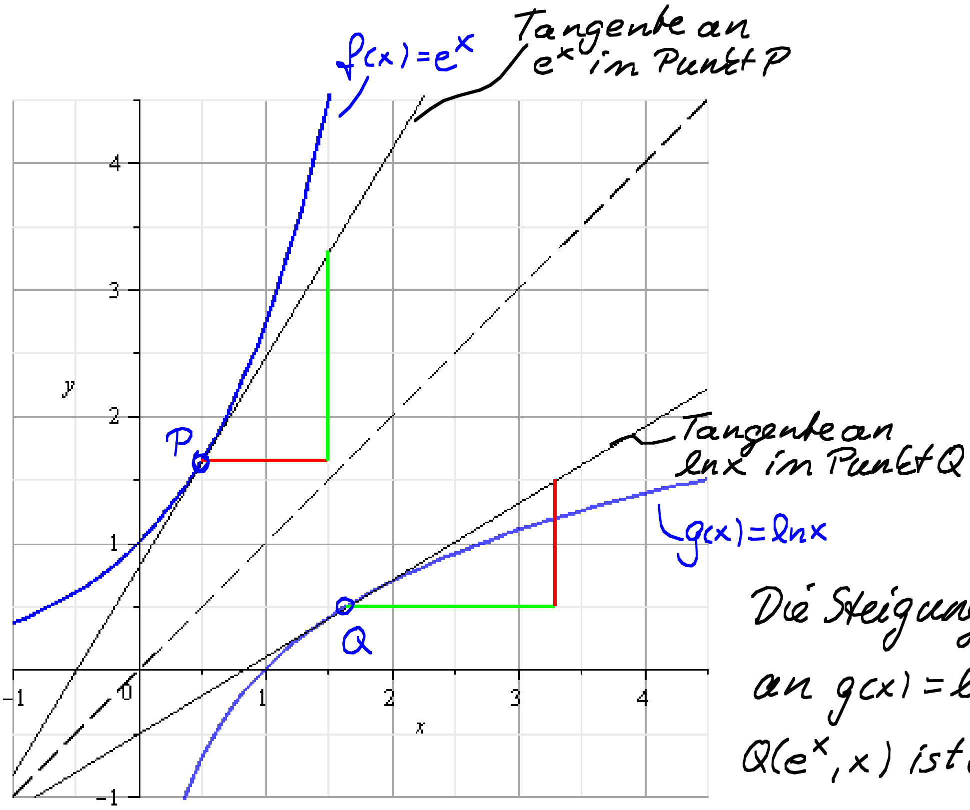
$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Beispiel: Mit der weiteren Rechenregel für den Logarithmus: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ erhält man für $f(x) = \log_a x$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

Ableitung der Umkehrfunktion:

Es sei nun f eine differenzierbare, umkehrbar eindeutige Funktion und g die zugehörige Umkehrfunktion. Im Folgenden wollen wir herleiten, wie man aus der Ableitung von f die Ableitung der Umkehrfunktion gewinnen kann. Dies lässt sich dann z.B. verwenden, um die Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktion herzuleiten.

Wir machen uns die Zusammenhänge zunächst geometrisch klar.



$P(0.5, e^{0.5})$, $Q(e^{0.5}, 0.5)$

Die Steigung der Tangenten an $g(x) = \ln x$ im Punkt $Q(e^x, x)$ ist der Reziprokwert der Steigung der Tangenten an $f(x) = e^x$ im Punkt $P(x, e^x)$.

Mit diesen Überlegungen kann man nun auf eine andere Art die Ableitung von $g(x) = \ln x$ bestimmen.

Sei $y = f(x) = e^x$ mit der Umkehrfunktion $x = g(y) = \ln y$.
Es gilt: $\quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

Somit nach Umbenennung der Variablen:
$g(x) = \ln x \implies g'(x) = \frac{1}{x}$

Allgemein: Ist $y = f(x)$ umkehrbar eindeutig mit der Umkehrfunktion $x = g(y)$, dann gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Diese Beziehungen lassen sich auch verwenden, wenn die Umkehrfunktion nicht explizit angegeben ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: $y = f(x) = x^5 + 3x^3 + 6x$. Da die Funktionen $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = 3x^3$, $f_3(x) = 6x$ streng monoton wachsend sind, ist f als Summe streng monoton wachsender Funktionen wieder streng monoton wachsend und somit umkehrbar eindeutig. Sie besitzt somit eine Umkehrfunktion g. Weiter ist $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 6$ und es gilt $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{109}{32}$, d.h. $g\left(\frac{109}{32}\right) = \frac{1}{2}$.
Da $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{137}{16}$, erhalten wir mit der oben angegebenen Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$g'\left(\frac{109}{32}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{137}{16}} = \frac{16}{137} .$$

Beispiel: Wir analysieren die Aufmerksamkeit A des Studenten Xaver Fidelius während einer 90-minütigen Analysis-Vorlesung über Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit, gemessen auf einer Skala von 0 bis 100, wobei der Wert 0 Tiefschlaf und 100 hellwach mit voller Aufmerksamkeit bedeutet.
Beobachtungen zufolge lässt sich die Aufmerksamkeit des besagten Studenten gut durch das folgende Modell beschreiben.

$$A(t) = \frac{1}{1080}t^3 - \frac{17}{180}t^2 + \frac{4}{3}t + 60 \quad , \; t \in [0, 90]$$

Wir untersuchen das Monotonieverhalten mit Hilfe der 1. Ableitung $\quad A'(t) = \frac{1}{360}t^2 - \frac{17}{90}t + \frac{4}{3}$

Dies ist ein quadratisches Polynom, der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Wir bestimmen zunächst die Nullstellen von A'.

$$\begin{aligned}
A'(t) = 0 &\iff \frac{1}{360}t^2 - \frac{17}{90}t + \frac{4}{3} = 0 \\
&\iff t^2 - 68t + 480 = 0 \\
&\iff t = 34 \pm \sqrt{34^2 - 480} \\
&\iff t = 34 \pm \sqrt{676} \\
&\iff t = 34 \pm 26 \\
&\iff t = 8 \vee t = 60
\end{aligned}$$

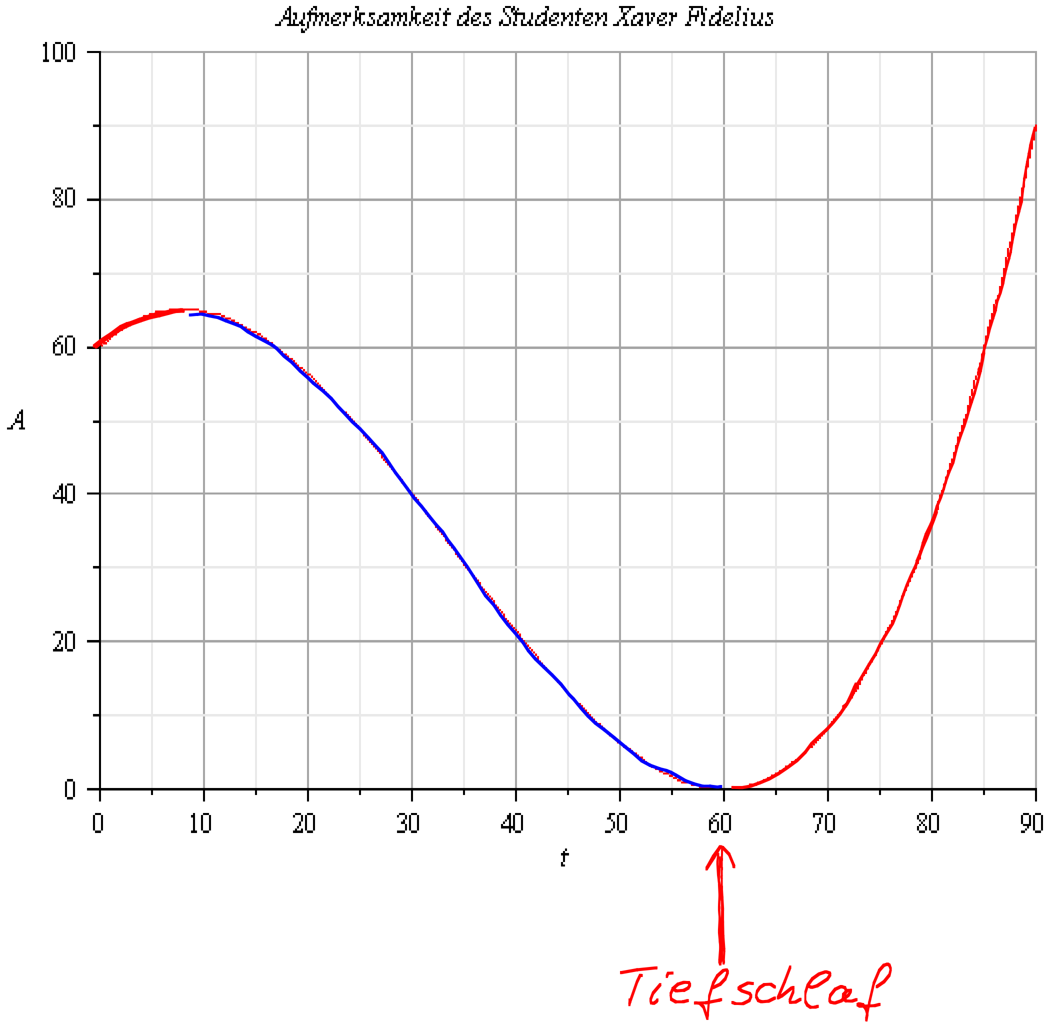
Da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, können wir mit Hilfe der Nullstellen auf das Vorzeichenverhalten von A' und damit auf das Monotonieverhalten von A schließen.

$A'(t) > 0 \iff t \in [0,8) \vee t \in (60,90)$

$A'(t) < 0 \iff t \in (8,60)$

Die Aufmerksamkeit von Xaver Fidelius ist also in den ersten 8 Minuten streng monoton wachsend, zwischen der 8ten und 60ten Minute streng monoton fallend und ab der 60ten Minute wieder streng monoton wachsend.

Für $t=60$ gilt: $A(60)=0$ "Tiefschlaf"



Ableitungen höherer Ordnung, Krümmungsverhalten

Ist die 1. Ableitung f' einer Funktion f wieder differenzierbar, dann können wir die Ableitung von f', also

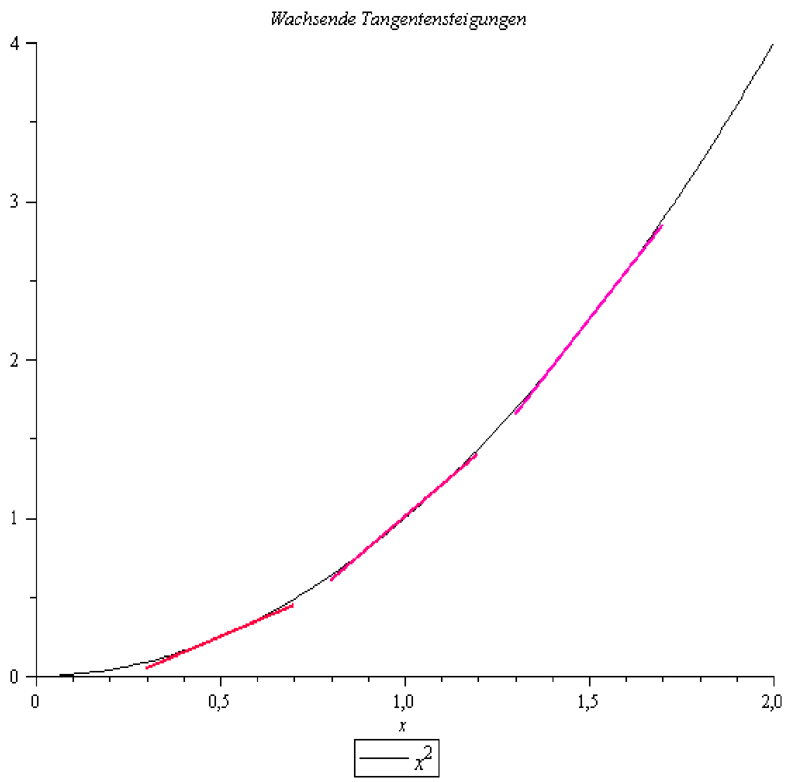
$(f')'$ bilden. Diese wird mit f'' bezeichnet und heißt 2. Ableitung von f.
Andere übliche Schreibweisen sind

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

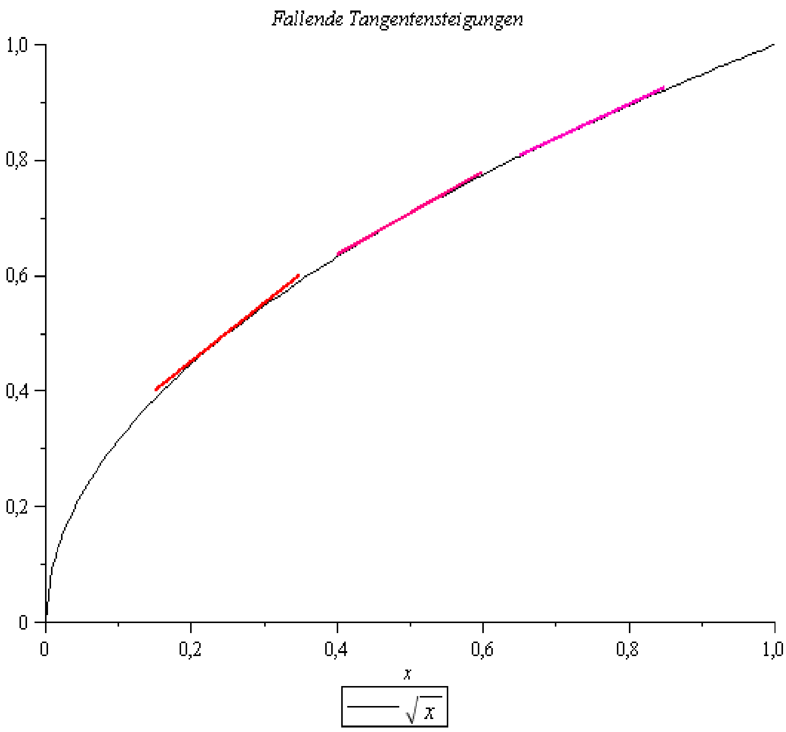
Entsprechend kann man nun im Falle der Differenzierbarkeit wieder die Ableitung von f'' bilden und erhält die 3. Ableitung f''' von f u.s.w.

Wir befassen uns nun zunächst genauer mit der 2. Ableitung und erinnern uns daran, wie das Vorzeichen der Ableitung mit dem Vorzeichen zusammenhängt. Wenden wir die Ergebnisse auf f' an, so erhalten wir mit der Bezeichnung I für ein Intervall:

1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \iff f'$ monoton wachsend auf I
2) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \iff f'$ monoton fallend auf I



Die Steigung der Tangenten ist mit zunehmendem x monoton wachsend, $f''(x) \geq 0$.
Der Graph beschreibt eine Linkskurve.



Die Steigung der Tangenten ist mit zunehmendem x monoton fallend, $f''(x) \leq 0$. Der Graph beschreibt eine Rechtskurve.

Dieses Krümmungsverhalten wird nun exakter definiert. Anschließend geben wir an, wie man dies im Falle der zweimaligen Differenzierbarkeit mit Hilfe der zweiten Ableitung untersuchen kann.

Definition: Eine Funktion f heißt konvex auf einem Intervall I, falls jede Strecke, die zwei beliebige Punkte des Graphen verbindet, oberhalb oder auf dem Graphen verläuft, was einer Linkskurve des Graphen entspricht.
Eine Funktion f heißt konkav auf einem Intervall I, falls jede Strecke, die zwei beliebigige Punkte des Graphen verbindet, unterhalb oder auf dem Graphen verläuft, was einer Rechtskurve des Graphen entspricht.

Aus den oben angegebenen geometrischen Überlegungen kann man folgendes einsehen.

Satz: Die Funktion f sei auf einem Intervall I zweimal differenzierbar. Dann gilt:

1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist konvex auf I
2) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist konkav auf I

In vielen ökonomischen Modellen ist die Unterscheidung zwischen konvexen und konkaven Funktionen, zusammen mit dem Monotonieverhalten von Bedeutung.

Beispiel: Bei einem Einkommen zwischen 4000 € und 10 000 € sollen die Abgaben

$$s(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^2 + 5 \cdot 10^{-2} x \quad \text{betragen.}$$

Es gilt: $s'(x) = 8 \cdot 10^{-5} x + 5 \cdot 10^{-2}$

$$s'(x) \geq 0 \iff 8 \cdot 10^{-5} x + 5 \cdot 10^{-2} \geq 0$$

$$\iff \quad x \geq \frac{5}{8} \cdot 10^3$$

Also ist $s'(x)$ insbesondere auf $[4000, 10000]$ monoton wachsend.

Weiter ist $s''(x) = 8 \cdot 10^{-5} \geq 0$

Damit ist s monoton wachsend und konvex auf $[4000, 10000]$. In diesem Zusammenhang spricht man auch von progressivem Wachstum.

	$f' \geq 0$ (f wachsend)	$f' \leq 0$ (f fallend)
$f'' \geq 0$ (f konvex)	progressiv wachsend	degressiv fallend
$f'' \leq 0$ (f konkav)	degressiv wachsend	progressiv fallend

Beispiel: Wir untersuchen folgende kubische Kostenfunktion.

$$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 1 \quad , \; x \geq 0.$$

Es gilt $C'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$$C''(x) = x - 2$$

Weiter ist $C'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0$

$$\iff (x-2)^2 = 0$$

$$\iff x = 2$$

Da der Graph von C' eine nach oben geöffnete Parabel und $x = 2$ die einzige Nullstelle ist, gilt

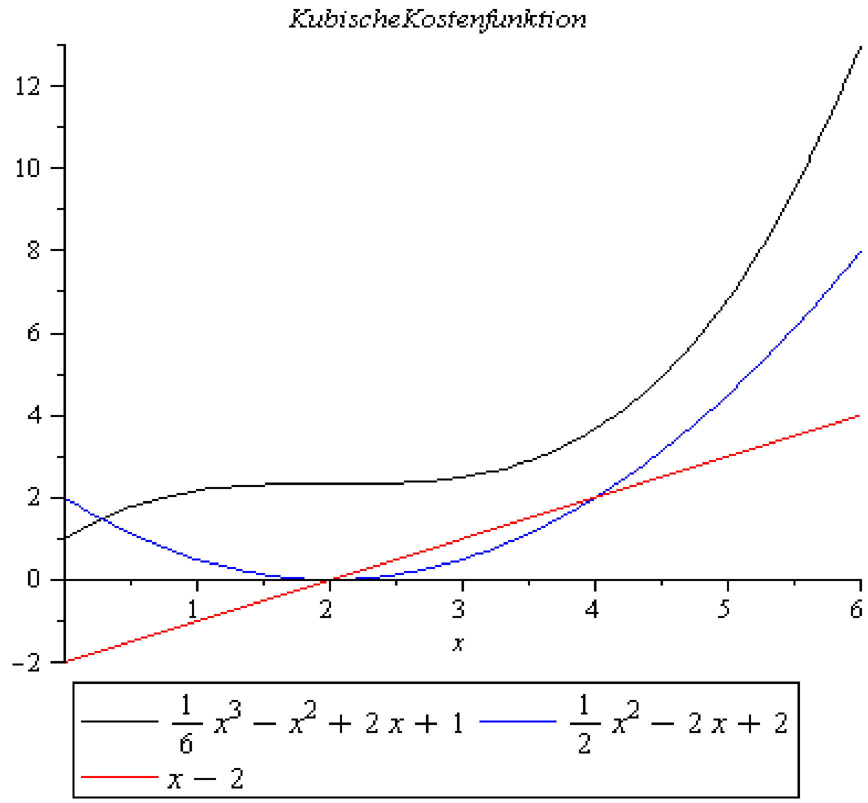
$$C'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \geq 0.$$

Somit ist $C(x)$ insgesamt monoton wachsend.

Ferner ist $C''(x) \geq 0 \iff x \geq 2$ und

$$C''(x) \leq 0 \iff x \leq 2,$$

d.h. $C(x)$ ist konkav auf $[0,2]$ und konvex auf $[2,\infty)$.



Beispiel: Wir betrachten eine allgemeine Produktions-funktion in Abhängigkeit vom Kapital $K > 0$:

$$Y(K) = A \cdot K^a \text{ mit } A > 0 \text{ konstant}$$

und $a > 0$, $a \neq 1$.

$Y'(K) = A \cdot a \cdot K^{a-1}$

$Y''(K) = A \cdot a(a-1)\, K^{a-2}$

Es gilt: $Y'(K) \geq 0$ für alle $a > 0$ und $K > 0$, also ist $Y(K)$ monoton wachsend.

$Y''(K) \geq 0 \Longleftrightarrow a > 1$

$Y''(K) \leq 0 \Longleftrightarrow a < 1$

Also ist $Y(K)$ konkav für $0 < a < 1$ und konvex für $a > 1$ mit $K > 0$.

Lokale und globale Extrema

In vielen ökonomischen Anwendungen treten Fragen nach optimalen Lösungen auf. Beispiele hierfür sind:

Wie lassen sich Kapital und Arbeitskraft in einem Unternehmen so einsetzen, dass der Gewinn maximiert oder die Kosten minimiert werden?

Wie viel Dünger sollte eingesetzt werden, um in einem landwirtschaftlichen Betrieb einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen?

Bei zugrundeliegenden mathematischen Modellen in Form von Funktionen bedeutet dies, maximale bzw. minimale Funktionswerte zu bestimmen und Stellen, an denen diese angenommen werden. Bevor wir auf konkrete Beispiele eingehen können, müssen wir uns zunächst mit dem mathematischen Werkzeug, insbesondere im Zusammenhang mit den Methoden der Differentialrechnung, befassen.

Definition: Sei $f: \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ und $x_0 \in \mathbb{D}_f$.

1) Globale Extrema

   a) f hat an der Stelle x_0 ein globales Minimum $f(x_0)$, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

   b) f hat an der Stelle x_0 ein globales Maximum $f(x_0)$, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

   Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe Optimal-, Extremalstellen und Optimal-, Extremwert.

2) Lokale (relative) Extrema

Zu $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(x_0)$ das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

a) f hat an der Stelle x_0 ein lokales (relatives) Minimum $f(x_0)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

b) f hat an der Stelle x_0 ein lokales (relatives) Maximum $f(x_0)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe lokale (relative) Extremalstellen und Extremwerte.

Wir beschäftigen uns nun mit Kriterien, wann Minima und Maxima existieren und mit Methoden, wie man diese findet. Ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Existenz liefert der folgende Satz.

Satz: Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in [a,b]$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein $x_1 \in [a,b]$, in dem f ein Maximum besitzt, d.h.

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

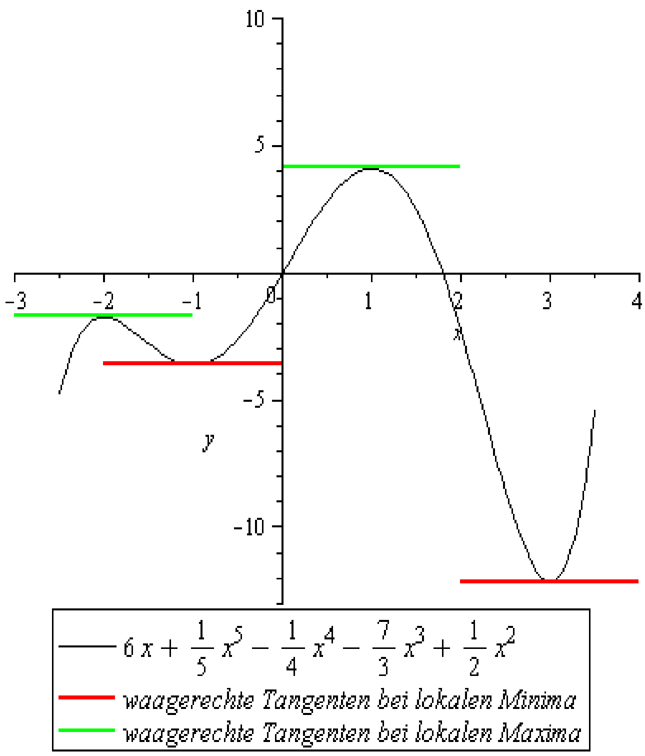
Zur Bestimmung globaler Extrema sind folgende Punkte abzuarbeiten:

- Bestimmung aller lokalen Extrema
- gegebenenfalls Untersuchung der Funktion
  - an Intervallrändern
  - für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$
  - an Definitionslücken

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Bestimmung lokaler Extrema mit Hilfe der Methoden der Differentialrechnung, d.h. unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die zu untersuchende Funktion.

Anschaulich sollte zunächst folgendes klar sein.

Bei einem lokalen Minimum ist die Funktion vor dem Minimum fallend und danach wachsend. Ist f differenzierbar, so heißt dies, dass die Tangentensteigung vor dem Minimum kleiner oder gleich Null, im Minimum gleich Null und danach größer oder gleich Null ist. Weiter sieht man, dass der Graph der Funktion im Bereich des Minimums eine Linkskurve beschreibt, d.h. f konvex ist, was sich mit dem Vorzeichen der 2. Ableitung beschreiben lässt.



Bei einem lokalen Maximum ist die Funktion vor dem Maximum wachsend und danach fallend. Ist f differenzierbar, so heißt dies, dass die Tangentensteigung vor dem Maximum größer oder gleich Null, im Maximum gleich Null und danach kleiner oder gleich Null ist. Weiter sieht man, dass der Graph von f im Bereich des Maximums eine Rechtskurve beschreibt, d.h. f konkav ist, was sich mit dem Vorzeichen der 2. Ableitung beschreiben lässt.

Wir fassen diese anschaulichen Überlegungen in einem Satz zusammen, der einen Überblick über die wichtigsten Kriterien zum Auffinden lokaler Extrema liefert.
Dabei bezeichnen wir Punkte $(x_0, f(x_0))$, in denen $f'(x_0) = 0$ ist (d.h. Punkte mit waagerechter Tangente bzw. Punkte, in denen die momentane Änderungsrate Null ist) als stationäre Punkte.

Satz:

1) Notwendige Bedingung für lokale Extrema.
Eine differenzierbare Funktion f besitzt an einer lokalen Extremalstelle x_0 stets eine waagerechte Tangente, d.h. es gilt $f'(x_0) = 0$.

2) Untersuchung mit Hilfe der 1. Ableitung
Ist f eine differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f, dann gilt:
   a) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.
   b) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

3) Untersuchung mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung
Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f, dann gilt:
   a) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.
   b) Ist für ein $\varepsilon > 0$ $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, dann

besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

c) Ist $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ oder $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ ein Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente, dazu später mehr).

4) Untersuchung mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung

Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f, dann gilt:

a) Ist $f''(x_0) > 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

b) Ist $f''(x_0) < 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

c) Ist $f''(x_0) = 0$, dann liefert das Kriterium keine Aussage.

Beispiel: Wir bestimmen alle lokalen Extrema von

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2.$$

Es gilt $f'(x) = 3x^2 + 6x$ und

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 3x^2 + 6x = 0 \\ &\iff x(x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Somit sind $P(0,-2)$ und $Q(-2,2)$ stationäre Punkte von f und damit Kandidaten für lokale Extrema.

Weiter gilt $f''(x) = 6x + 6$ und

$f''(0) = 6 > 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$.

Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = -2$ besitzt.

Aus $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) < 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = -2$ ein lokales Maximum $f(-2) = 2$ besitzt.

Beispiel: Wir bestimmen alle lokalen Extrema von

$$f(x) = x^2 \cdot 2^x.$$

Zunächst sei daran erinnert, dass $2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\cdot \ln 2}$ gilt, d.h. $\frac{d}{dx}(2^x) = \ln 2 \cdot e^{x\cdot\ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

Damit gilt $f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^x = (2x + \ln 2 \cdot x^2)\cdot 2^x$

und $f'(x) = 0 \iff (2x + x^2 \cdot \ln 2)\cdot 2^x = 0 \quad | : 2^x \neq 0$

$$\iff x(2 + x\cdot\ln 2) = 0$$

$$\iff x = 0 \vee x = -\frac{2}{\ln 2}$$

Somit sind $P(0,0)$ und $Q\left(-\frac{2}{\ln 2}, \frac{4}{(\ln 2)^2}\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}\right)$ stationäre Punkte von f und damit Kandidaten für lokale Extrema.

Weiter gilt $f''(x) = (2 + 2\cdot\ln 2\cdot x)\cdot 2^x + (2x + \ln 2 \cdot x^2)\cdot \ln 2 \cdot 2^x$

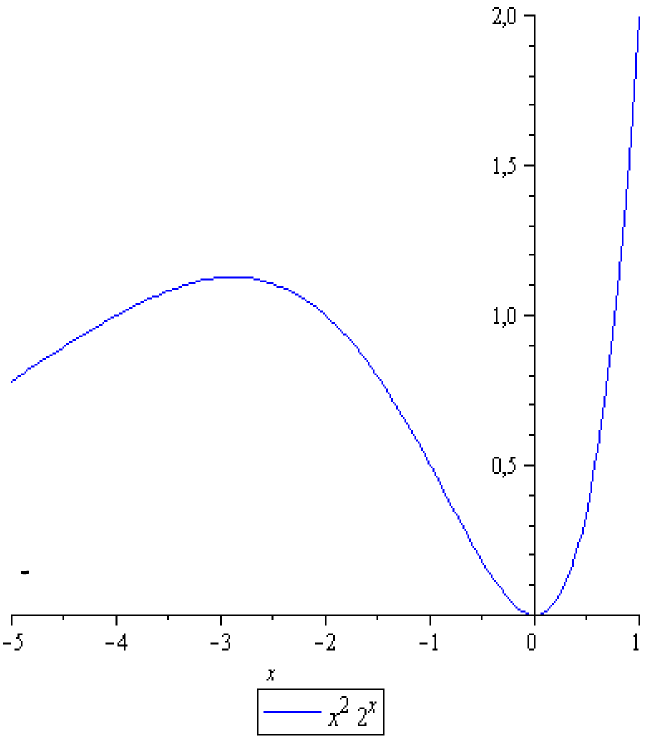
$$= (2 + 4\cdot \ln 2 \cdot x + (\ln 2)^2 \cdot x^2)\cdot 2^x \text{ und}$$

$f''(0) = 2 > 0$ und

$$f''\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = \left(2 + 4\cdot\cancel{\ln 2}\cdot\frac{-2}{\cancel{\ln 2}} + \cancel{(\ln 2)^2}\cdot\frac{4}{\cancel{(\ln 2)^2}}\right)\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} = -2\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} < 0.$$

Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = 0$ besitzt.

Aus $f'\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = 0$ und $f''\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) < 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = -\frac{2}{\ln 2}$ ein lokales Maximum $f\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{4}{(\ln 2)^2}\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$ besitzt.



Wir erinnern uns daran, dass wir zur Bestimmung globaler Extrema gegebenenfalls auch Grenzwerte betrachten müssen, wenn Intervallrandpunkte nicht zum Definitionsbereich gehören, wenn die Funktion Definitionslücken hat oder das Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ untersucht werden muss.

In diesem Zusammenhang treten häufig Quotienten von Funktionen auf, in denen bei Grenzbetrachtungen sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion beide gegen Null oder beide gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ streben. Man kann dann nicht so einfach auf das Verhalten der Quotientenfunktion schließen. Dies hängt wesentlich vom Verhältnis des Wachstumsverhaltens der Zähler- und Nennerfunktion ab.

Beispiel:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ ist ein (zunächst unbestimmter) Ausdruck vom Typ "$\frac{0}{0}$".

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$ ist ein (zunächst unbestimmter) Ausdruck vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Häufig gelingt es, Ausdrücke vom Typ "$\frac{0}{0}$" bzw. "$\frac{\infty}{\infty}$" durch die folgende Regel zu bestimmen.

Regel von l'Hospital: f und g seien in x_0 differenzierbare Funktionen mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ wenn } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Der Satz gilt auch für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ und einseitige Grenzwerte.

Achtung! Die Voraussetzungen müssen geprüft werden. Sind diese nicht erfüllt, so erhält man in der Regel falsche Ergebnisse.

Beispiel:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

4) Sei $a > 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{a^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln a \cdot a^x}$ wieder vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln a \cdot a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(\ln a)^2 \cdot a^x} = 0$

Entsprechend kann man vorgehen, um zu zeigen, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ ist für $n \in \mathbb{N}$ und $a > 1$.

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz x^n. Kurz: "Exponentiale ertränken Potenzen".

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$ ist vom Typ "$0 \cdot (-\infty)$". Indem wir $x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ schreiben, erhalten wir

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ vom Typ "$\frac{-\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x)=x^2\cdot 2^x$ und untersuchen, ob die Funktion globale Extrema besitzt. Wir hatten bereits festgestellt, dass f an der Stelle $x=0$ ein lokales Minimum $f(0)=0$ und an der Stelle $x=-\frac{2}{\ln 2}$ ein lokales Maximum $f\left(-\frac{2}{\ln 2}\right)=\frac{4}{(\ln 2)^2}\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$ besitzt.

Weiter gilt nun $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot 2^x=\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot 2^x$ ist vom Typ "$\infty\cdot 0$". Durch Umschreiben in $x^2\cdot 2^x=\frac{x^2}{2^{-x}}$ erhalten wir

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot 2^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2^{-x}}$ vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $$\lim_{x\to-\infty} x^2\cdot 2^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-\ln 2\cdot 2^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(\ln 2)^2\cdot 2^{-x}}=0$$

Damit besitzt f an der Stelle $x=0$ ein globales Minimum $f(0)=0$. f besitzt aber wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ kein globales Maximum.

Beispiel: Der Student Xaver Fidelius ist in seinem letzten Studienjahr und hat 6000 € zur Verfügung. Im Folgejahr werden es 36000 € sein. Er plant für sein letztes Studienjahr einen Konsum von c_1, für das Folgejahr einen Konsum von c_2 so, dass die Nutzenfunktion

$$U=\ln(1+c_1)+\frac{1}{1.03}\ln(1+c_2)\quad,\ c_1,c_2>0$$

maximiert wird. Dazu hat er die Möglichkeit Geld mit einem Zinsatz von 10% zu leihen, damit er in seinem letzten Studienjahr mehr als

6000 € ausgeben kann. Den geliehenen Betrag von $c_1 - 6000$ muss er dann im nächsten Jahr zusammen mit den Zinsen zurückzahlen.

Wir überlegen zunächst, wie c_1 und c_2 zueinander in Beziehung stehen.

$$c_2 = 36000 - \underbrace{\left(1+\tfrac{10}{100}\right)(c_1 - 6000)}_{\text{geliehenes Geld + Zinsen}} = 42600 - 1.1 \cdot c_1$$

Damit $c_2 \geq 0$ bleibt, muss $c_1 \leq \frac{42600}{1.1} = \frac{426000}{11}$ sein.

Wir setzen den Ausdruck für c_2 in die Nutzenfunktion ein und erhalten

$$u = \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03}\ln(1+42600-1.1\cdot c_1)$$

$$= \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03}\ln(42601-1.1\cdot c_1)$$

nur noch in Abhängigkeit von c_1.

Wir untersuchen die Funktion mit Hilfe ihrer 1. Ableitung nach c_1.

$$\frac{du}{dc_1} = \frac{1}{1+c_1} + \frac{1}{1.03}\cdot\frac{1}{42601-1.1\cdot c_1}\cdot(-1.1)$$

$$= \frac{1}{1+c_1} - \frac{1.1}{1.03\cdot(42601-1.1\cdot c_1)}$$

$$= \frac{1.03\cdot(42601-1.1\cdot c_1) - 1.1\cdot(1+c_1)}{(1+c_1)\cdot 1.03\cdot(42601-1.1\cdot c_1)}$$

$$= \frac{43877.93 - 2.233 c_1}{\underbrace{(1+c_1)}_{>0}\cdot 1.03\cdot\underbrace{(42601-1.1 c_1)}_{=1+c_2>0}}$$

Da der Nenner stets größer als Null ist, hängt das Vorzeichen von $\frac{du}{dc_1}$ nur vom Zähler ab.

Es gilt:

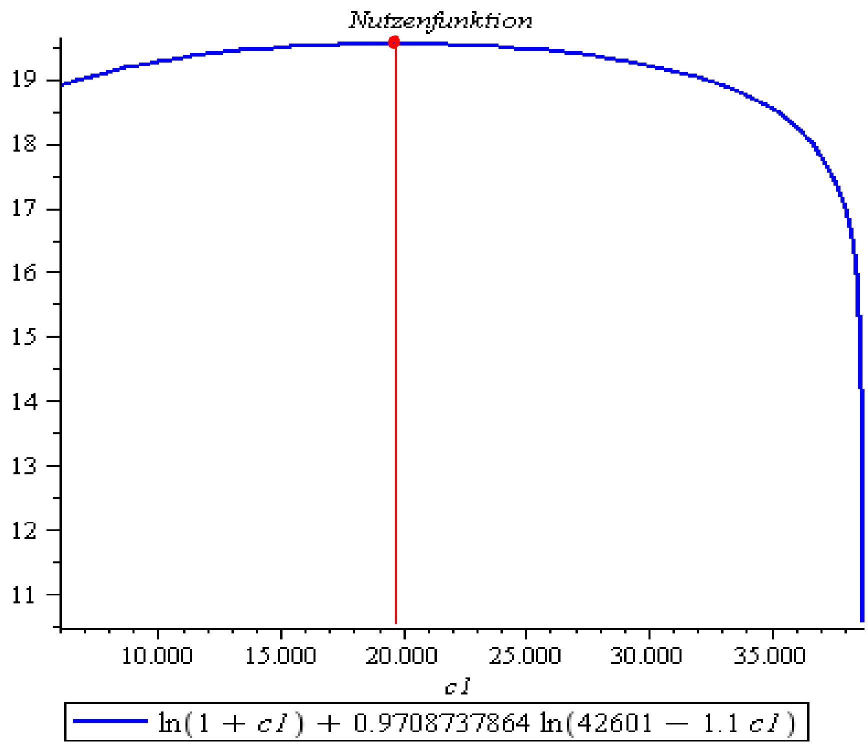
$$\frac{dU}{dc_1} > 0 \iff c_1 < \frac{43877.93}{2.233}$$

$$\frac{dU}{dc_1} = 0 \iff c_1 = \frac{43877.93}{2.233}$$

$$\frac{dU}{dc_1} < 0 \iff c_1 > \frac{43877.93}{2.233}$$

Somit ist U streng monoton wachsend $[6000, c_1^*]$ und streng monoton fallend auf $[c_1^*, \frac{426000}{11}]$ mit $c_1^* = \frac{43877.93}{2.233} \approx 19649.77$.

U besitzt also an der Stelle c_1^* ein absolutes Maximum. Insgesamt wird der Student nach diesen Überlegungen einen Betrag von $c_1^* - 6000 \approx 13649.77$ leihen, im letzten Studienjahr $c_1^* \approx 19649.77$ ausgeben und im Folgejahr $c_2^* = 42600 - 1.1 \cdot c_1^* \approx 20985.26$.



Wendepunkte

Definition: Sei f eine Funktion. Punkte, an denen der Graph der Funktion von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt übergeht, heißen Wendepunkte. An Wendepunkten wechselt also das Verhalten der Funktion von konkav nach konvex bzw. umgekehrt. Wendepunkte mit waagerechter Tangente heißen Sattelpunkte.

Die wichtigsten Kriterien zum Auffinden von Wendestellen sind in dem folgenden Satz zusammengefasst.

Satz:

1) Notwendige Bedingung
   Besitzt eine zweimal differenzierbare Funktion an einer Stelle x_0 eine Wendestelle, so gilt $f''(x_0) = 0$.
2) Untersuchung mit Hilfe der 2. Ableitung
   Sei f zweimal differenzierbar und $f''(x_0) = 0$. Dann gilt: Wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, dann ist $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt von f.
3) Untersuchung mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung
   Ist die Funktion f dreimal differenzierbar und gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt von f.

Beispiel: Wir bestimmen Wendepunkte von

$$f(x) = \frac{1}{10}x^6 - x^4 .$$

Es gilt: $f'(x) = \frac{3}{5}x^5 - 4x^3$

$$f''(x) = 3x^4 - 12x^2 = 3x^2(x^2-4) = 3x^2(x-2)(x+2)$$

Also ist: $f''(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

Somit sind die Punkte $P(0,0)$, $Q(2,-\frac{48}{5})$ und $R(-2,-\frac{48}{5})$ mögliche Kandidaten für Wendepunkte.
Weiter gilt: $f'''(x) = 12x^3 - 24x$

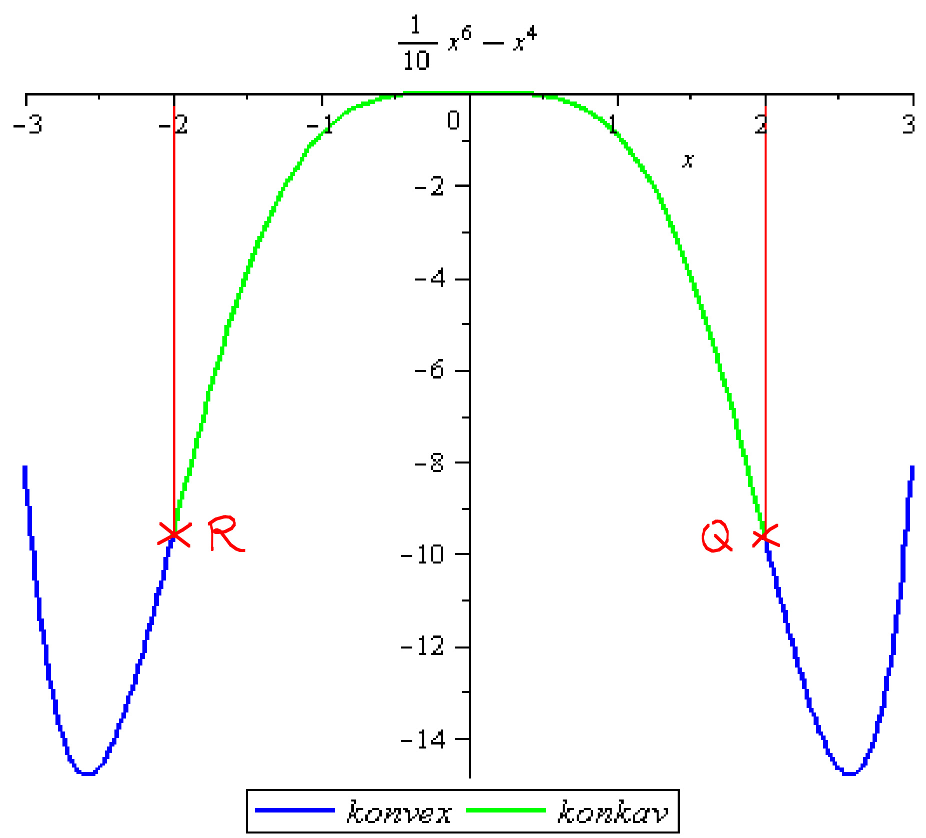
$f'''(0) = 0$, $f'''(2) = 48$, $f'''(-2) = -48$

somit gilt:

$f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$, also ist $Q(2,-\frac{48}{5})$ Wendepunkt von f.

$f''(-2) = 0$ und $f'''(-2) \neq 0$, also ist $R(-2,-\frac{48}{5})$ Wendepunkt von f.

Aus $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 0$ können wir nichts schließen. Wir müssen daher das Vorzeichen von f'' links und rechts um die Stelle 0 untersuchen.
Für $x \in (-2,0)$ gilt $f''(x) < 0$ und für $x \in (0,2)$ ebenfalls $f''(x) < 0$. Somit hat f'' an der Stelle 0 keinen Vorzeichenwechsel, d.h. in im Bereich von $P(0,0)$ konkav.
$P(0,0)$ ist somit kein Wendepunkt.



Elastizitäten

Neben durchschnittlichen, momentanen und relativen Änderungsraten spielen sogenannte Elastizitäten bei ökonomischen Fragestellungen eine wichtige Rolle.
Wir betrachten zunächst die konkrete Fragestellung, wie man "sinnvoll" beschreiben kann, wie die Nachfrage nach einem Gut auf Preisänderungen reagiert.
Um wie viel geht die nachgefragte Menge zurück, wenn der Preis um 10 € steigt?
Während die Nachfrage nach Kaffee bei einer solchen Erhöhung pro Pfund sicherlich sehr deutlich ausfallen dürfte, wird sich eine Erhöhung um 10 € für ein Auto kaum bemerkbar machen.
Nehmen wir an, dass ein Pfund Kaffee vor der Preiserhöhung 5 € gekostet hat und das Auto 20 000 €.
Die Preiserhöhung um 10 € bedeutet beim Kaffee dann eine Preissteigerung von 200%, beim Auto von 0.05 %.
Die Überlegungen zeigen, dass die Beschreibung der Sensitivität der Nachfrage auf Preisänderungen mittels absoluter Größen unzureichend ist. In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man daher Elastizitäten, die das Verhältnis von relativer Änderung der abhängigen Größe (z.B. der Nachfrage) zur relativen Änderung der unabhängigen Größe (z.B. Preis) beschreiben.

Für eine (ökonomische) Größe $f(x)$ mit der durchschnittlichen relativen Änderungsrate

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}$$

und der durchschnittlichen relativen Änderungsrate für die unabhängige Variable

$$\frac{\Delta x}{x}$$

bedeutet dies die Betrachtung der durchschnittlichen Elastizität im Intervall $[x, x+\Delta x]$

$$\frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)}$$

Es handelt sich dabei um eine dimensionslose Größe. Es spielt keine Rolle, ob z.B. Mengen in Tonnen, Kilogramm oder Litern oder ob Preise in Dollar, Euro oder Rubel angegeben werden.

Ähnlich wie beim Übergang vom Differenzenquotienten (durchschnittliche Änderungsrate) zum Differentialquotienten (momentane Änderungsrate) ergibt sich durch Limesbildung

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Definition: Sei f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$. Dann heißt

$$El_x f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$ die (Punkt-) Elastizität

von f bezüglich x.

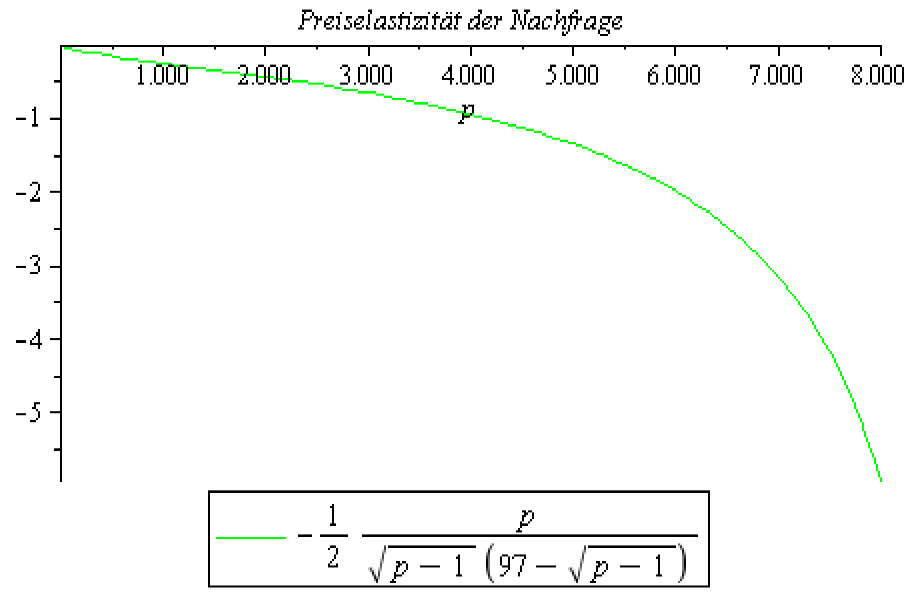
<u>Beispiel</u>: Die Nachfrage N nach einem bestimmten Gut in Abhängigkeit vom Preis P sei gegeben durch

$$N(p) = 97 - \sqrt{p-1}\ , \quad p \in [1, 9410]$$

Es gilt $N'(p) = -\frac{1}{2\sqrt{p-1}}$, woraus wir berechnen

$$El_p N(p) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{p-1}}}{97 - \sqrt{p-1}} \cdot p = \frac{-p}{2\sqrt{p-1}\,(97 - \sqrt{p-1})}$$

Dies ist die sogenannte Preiselastizität der Nachfrage.



Weitere Beispiele für typische Begriffsbildungen in den Wirtschaftswissenschaften im Zusammenhang mit Elastizitäten sind:

Einkommenselastizität der Nachfrage,

Preis-, Einkommenselastizität des Angebots, etc.

Am Wert der Elastizität lässt sich ablesen, wie stark z.B. die relative Nachfrage auf z.B. relative Preisänderungen reagiert. Daraus erklären sich die folgenden Begriffsbildungen:

$|El_x f(x)| = 0$: f vollkommen unelastisch an der Stelle x
(f reagiert gar nicht auf eine Änderung in x)

$0 < |El_x f(x)| < 1$: f unelastisch (unterproportional elastisch) an der Stelle x
($f(x)$ ändert sich relativ weniger stark als x)

$|El_x f(x)| = 1$: f ist 1-elastisch (ausgeglichen elastisch, proportional elastisch) an der Stelle x
(relative Änderung von $f(x)$ entspricht der relativen Änderung von x)

$|El_x f(x)| > 1$: f ist elastisch (überproportional elastisch) an der Stelle x)
(relative Änderung von $f(x)$ ist stärker als die von x)

Beispiel: Für einen bestimmten Zeitraum wurde in einem Land die Nachfrage nach Obst als Funktion des Einkommens r geschätzt durch

$N(r) = A \cdot r^{1.25}$ mit einer Konstanten $A > 0$.

Da $N'(r) = A \cdot 1.25 \cdot r^{0.25}$ ergibt sich die Einkommens-elastizität der Nachfrage zu

$$El_r N(r) = \frac{A \cdot 1.25 \cdot r^{0.25}}{A \cdot r^{1.25}} \cdot r = 1.25$$

Funktionen, die im gesamten Definitionsbereich die gleiche Elastizität haben, heißen isoelastisch.

Zum Abschluss stellen wir noch ein paar Regeln für die Berechnung von Elastizitäten zusammen.

Regeln zur Berechnung von Elastizitäten

Seien f und g differenzierbare Funktionen, A und p Konstanten.

1) $El_x A = 0$

2) $El_x (f \cdot g)(x) = El_x f(x) + El_x g(x)$

3) $El_x \left(\frac{f}{g}\right)(x) = El_x f(x) - El_x g(x)$

4) $El_x (f+g)(x) = \dfrac{f(x)\, El_x f(x) + g(x)\, El_x g(x)}{f(x) + g(x)}$

5) $El_x (f-g)(x) = \dfrac{f(x)\, El_x f(x) - g(x)\, El_x g(x)}{f(x) - g(x)}$

6) $El_x (f(g(x))) = El_u f(u) \cdot El_x g(x)$ mit $u = g(x)$

7) $El_x (f(x))^p = p \cdot El_x f(x)$

Die Regeln bestätigt man durch Einsetzen der Definition und Nachrechnen, z.B.

$$El_x (f \cdot g)(x) = \frac{(f \cdot g)'(x)}{(f \cdot g)(x)} \cdot x = \frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{f(x) \cdot g(x)} \cdot x$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x + \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot x = El_x f(x) + El_x g(x)$$

Approximationen

In manchen Zusammenhängen kann es nützlich sein, komplizierte Funktionen durch einfachere zu approximieren, um dann mit diesen einfacheren weiter zu arbeiten. Tatsächlich gibt es sehr viele unterschiedliche Möglichkeiten dies zu tun. Die Approximationstheorie ist ein Spezialgebiet der Mathematik, in dem solche Fragestellungen untersucht werden.

Einfache Funktionen, die sich in bestimmten Zusammenhängen für eine Approximation eignen, sind Polynome. Wir behandeln hier die Möglichkeit, unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, eine Funktion lokal, d.h. in der Nähe einer festen Stelle x_0 durch ein Polynom näherungsweise darzustellen.

Lineare Approximation

Der einfachste Fall hierbei ist die lineare Approximation, d.h. die Näherung durch eine Funktion der Form $t_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ für eine Funktion, die an einer festen Stelle x_0 differenzierbar ist. Dabei soll t_1 an der Stelle x_0 mit der Funktion im Funktionswert und der 1. Ableitung übereinstimmen, d.h. es soll gelten:

1) $t_1(x_0) = f(x_0) \iff a_0 = f(x_0)$
2) $t_1'(x_0) = f'(x_0) \iff a_1 = f'(x_0)$

Aus den gestellten Bedingungen ist klar, dass $t_1(x)$ die Gleichung der Tangenten an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist.

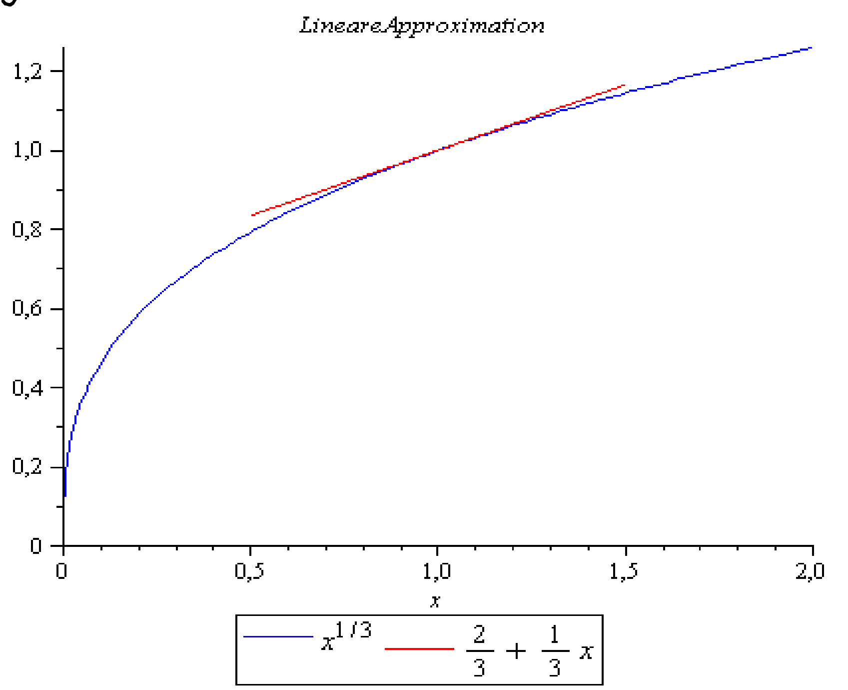
Eine explizite Darstellung erhält man, indem man $a_0 = (x_0)$ und $a_1 = f'(x_0)$ einsetzt.
Man erhält $t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
Zusammenfassend halten wir fest:

> Die lineare Approximation einer Funktion f, die an einer Stelle x_0 differenzierbar ist, ist
> $$t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
> In der Nähe von x_0 gilt $f(x) \approx t_1(x)$.

Beispiel: Wir bestimmen die lineare Approximation von
$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{um} \quad x_0 = 1.$$
Es ist $\quad f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad f(1) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}, \quad f'(1) = \frac{1}{3}$$

Somit ist $t_1(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$ die lineare Approximation an $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in der Nähe von $x_0 = 1$.
Es ist z.B. $t_1(1.03) = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.03 = 1.01$
Zum Vergleich: $\sqrt[3]{1.03} = 1.009901634....$



Beispiel: Wir erinnern uns an die Funktion

$$b(p) = \frac{10p}{105-p}, \quad p \in [0,100],$$

zur Beschreibung der Kosten zur Beseitigung von p% Verunreinigungen in einem See.

Wir bestimmen allgemein die lineare Approximation um ein festes $p_0 \in (0,100)$.

Es gilt $b'(p) = \frac{1050}{(105-p)^2}$, also $b(p_0) = \frac{10p_0}{105-p_0}$, $b'(p_0) = \frac{1050}{(105-p_0)^2}$

und somit zunächst allgemein: $t_1(p) = \frac{10p_0}{105-p_0} + \frac{1050}{(105-p_0)^2}(p-p_0)$

Interessiert uns z.B. speziell die lineare Approximation um

$p_0 = 5$, so erhalten wir

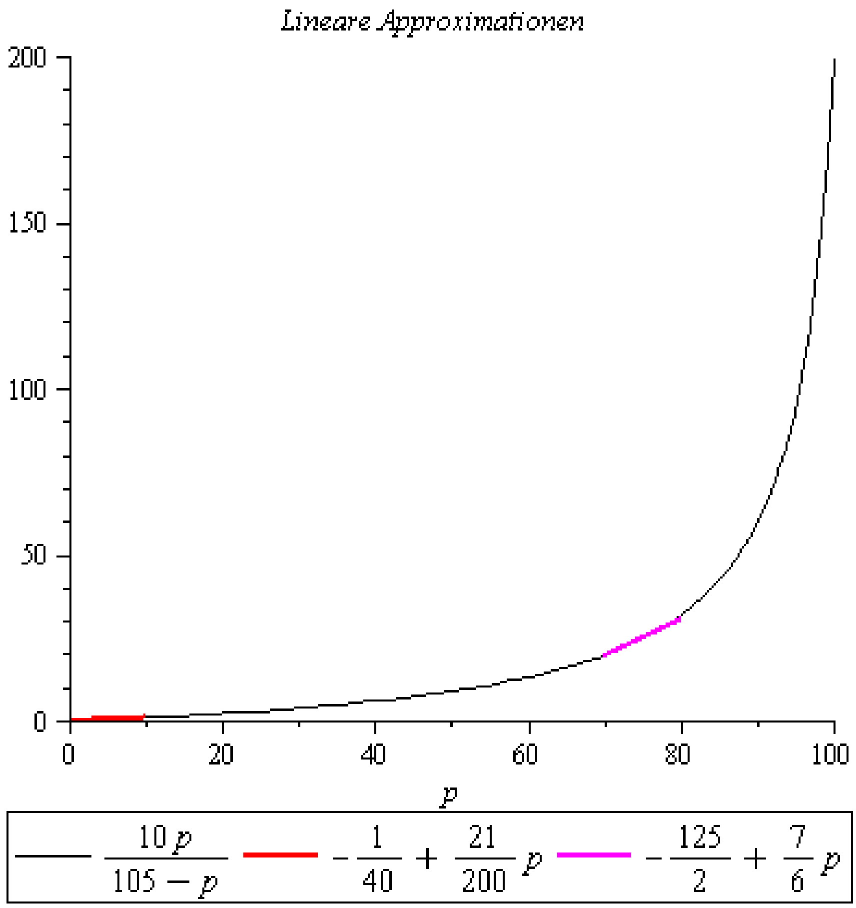
$$t_1(p) = \frac{50}{100} + \frac{1050}{100^2}\cdot(p-5)$$

$$= -\frac{1}{40} + \frac{21}{200}\cdot p$$

Für $p_0 = 75$ berechnen wir

$$tt_1(p) = -\frac{750}{30} + \frac{1050}{30^2}\cdot(p-75)$$

$$= -\frac{125}{2} + \frac{7}{6}p$$



Quadratische Approximation

Es kommt vor, dass die lineare Approximation nicht gut genug ist. Verbesserungen lassen sich erreichen, wenn man mit quadratischen Polynomen oder Polynomen höheren Grades approximiert. Man fordert dann unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nicht nur die Übereinstimmung von Funktionswert und 1. Ableitung an der Stelle x_0 sondern auch von höheren Ableitungswerten.

Wir betrachten nun zunächst den Fall der Approximation durch ein quadratisches Polynom, d.h. durch

$$t_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 .$$

Für die ersten beiden Ableitungen berechnet man

$$t_2'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0), \quad t_2''(x) = 2a_2 .$$

Wir fordern nun

1) $t_2(x_0) = f(x_0) \iff a_0 = f(x_0)$

2) $t_2'(x_0) = f'(x_0) \iff a_1 = f'(x_0)$

3) $t_2''(x_0) = f''(x_0) \iff 2a_2 = f''(x_0) \iff a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$

Eingesetzt in t_2 ergibt sich die Darstellung

$$t_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Zusammenfassend halten wir fest:

> Die quadratische Approximation einer Funktion f, die an einer Stelle x_0 zweimal differenzierbar ist, ist
>
> $$t_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
>
> In der Nähe von x_0 gilt $f(x) \approx t_2(x)$.

Vergleicht man die quadratische mit der linearen Approximation, so sieht man:

$$t_2(x) = t_1(x) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Beispiel: Wir bestimmen die quadratische Approximation von $f(x)=\sqrt[3]{x}$ um $x_0=1$.

Für die lineare Approximation hatten wir bereits $t_1(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)$ berechnet.

Mit $f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $f''(1)=-\frac{2}{9}$ erhalten wir daraus

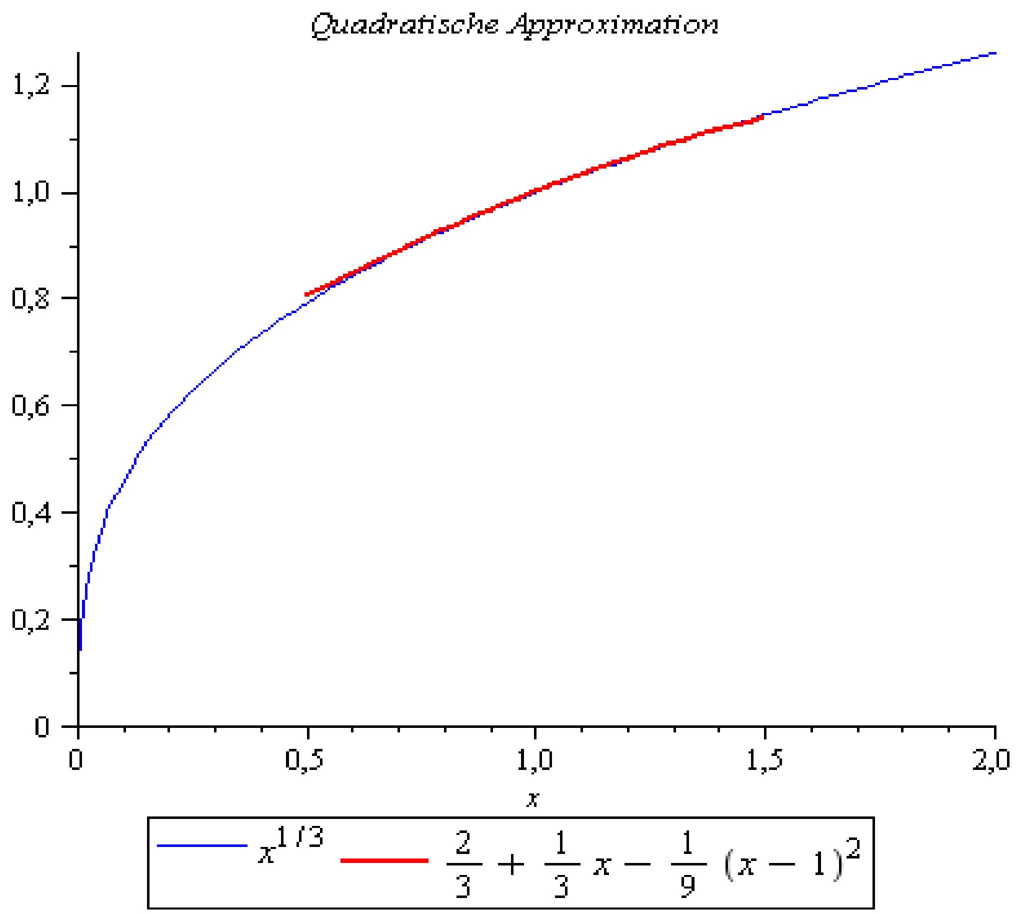
$$t_2(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2.$$

In der Nähe von $x_0=1$ gilt $f(x)\approx t_2(x)$.

Es ist z.B. $t_2(1.03)=1+\frac{1}{3}\cdot 0.03-\frac{1}{9}\cdot 0.03^2$

$$=1+0.01-0.0001=1.0099$$

Zum Vergleich: $t_1(1.03)=1.01$, $\sqrt[3]{1.03}=1.009901634\ldots$



Approximation durch Taylor-Polynome

Für Funktionen, die an einer Stelle x_0 mehr als zweimal differenzierbar sind, kann man analog zu dem Verfahren für die lineare und quadratische Approximation Polynome höheren Grades finden, die in der Nähe von x_0 noch besser approximieren. Bevor wir dies allgemein herleiten, führen wir noch zur Vereinfachung der Darstellung folgende Notationen ein.

Definition: Die Fakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 720$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

$$\frac{7!}{5!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 6 \cdot 7 = 42$$

$$\frac{(n+k)!}{n!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \ldots \cdot \cancel{n} \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \ldots \cdot \cancel{n}}$$

$$= (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k) \quad , \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Summennotation: Für Summen, die aus regelmäßig aufgebauten Termen aufgebaut sind, ist es zweckmäßig, das Summenzeichen Σ (großes Sigma) zu verwenden.

Statt $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$ schreiben wir

$\sum_{i=1}^{7} i^2$ (gesprochen Summe von $i = 1$ bis 7 über i^2).

Die Abkürzung bedeutet, dass für i nacheinander von 1 bis 7 der Ausdruck hinter dem Summenzeichen bestimmt wird. Die Terme werden dann aufsummiert.

i heißt der Summationsindex. Statt i kann man auch einen beliebigen anderen Buchstaben verwenden. Es gilt also z. B.

$$\sum_{i=1}^{7} i^2 = \sum_{k=1}^{7} k^2 = \sum_{\alpha=1}^{7} \alpha^2$$

Beispiel:

$$\sum_{\ell=1}^{4} (2\cdot\ell-1) = (2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$$
$$= 1+3+5+7 = 16$$

$$\sum_{m=2}^{6} (-1)^m\cdot m = (-1)^2\cdot 2+(-1)^3\cdot 3+(-1)^4\cdot 4+(-1)^5\cdot 5+(-1)^6\cdot 6$$
$$= 2-3+4-5+6 = 4$$

Statt konkreter Zahlen können für die untere und obere Grenze auch Variablen angegeben sein. Sind $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p \leq q$, so bedeutet

$$\sum_{m=p}^{q} a_m = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

Beispiel: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

Mit $a \in \mathbb{Z}$: $\displaystyle\sum_{j=a}^{a+7} j^3 = a^3+(a+1)^3+\dots+(a+7)^3$

Wir wenden uns nun wieder den Approximationen zu. f sei an einer Stelle x_0 n-mal differenzierbar mit $n \in \mathbb{N}$.
Das approximierende Polynom

$$t_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$$

soll die Bedingungen $t_n(x_0)=f(x_0)$, $t_n'(x_0)=f'(x_0), \dots, t_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$ erfüllen.
Kurz: Für $j=0,\dots,n$ soll $t_n^{(j)}(x_0)=f^{(j)}(x_0)$ gelten.

Wir bestimmen zunächst die Ableitungen von t_n. Da die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Ableitungen ist, ist es praktisch, die Summendarstellung von t_n zu verwenden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Ableitung einer Konstanten Null ist. Wir erhalten

$$t_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k(x-x_0)^{k-1}$$

$$t_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k \cdot k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$t_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k \cdot k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

$$\vdots$$

$$t_n^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{n} a_k k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}$$

Beim Einsetzen von $x=x_0$ verschwindet jeweils nur der 1. Summand nicht.

$$t_n(x_0) = a_0 = 0!\cdot a_0$$

$$t_n'(x_0) = a_1 = 1!\cdot a_1$$

$$t_n''(x_0) = 2a_2 = 2!\cdot a_2$$

$$\vdots$$

$$t_n^{(j)}(x_0) = j(j-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_j = j!\cdot a_j$$

$$\vdots$$

$$t_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_n = n!\cdot a_n$$

Die Bedingungen $t_n^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $j=0,1,\ldots,n$ liefern somit

$$j!\cdot a_j = f^{(j)}(x_0) \iff a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)$$

Eingesetzt ergibt sich nun

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Zusammenfassend halten wir fest:

Die Taylor-Approximation (das Taylor-Polynom) n-ten Grades um x_0 für eine Funktion f, die an der Stelle x_0 n-mal differenzierbar ist, ist

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

Beispiel: Wir bestimmen allgemein das Taylor-Polynom n-ten Grades um $x_0 = 0$ zu $f(x) = \ln(1+x)$.

Dazu benötigen wir eine allgemeine Darstellung der k-ten Ableitung von f. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$$

$$f^{IV}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4}$$

....

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\,(1+x)^{-k}$$

An der Stelle $x_0 = 0$ gilt $f(0) = \ln 1 = 0$,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$$

Damit ergibt sich das Taylor-Polynom n-ten Grades zu

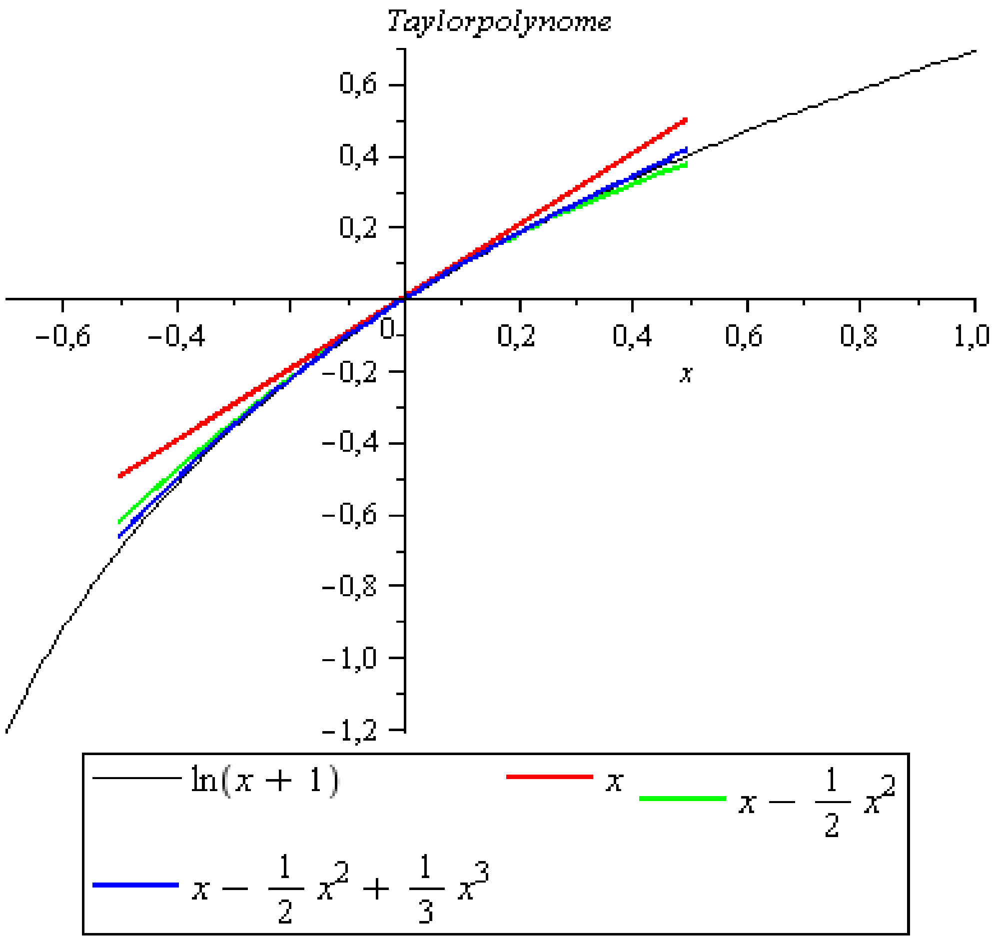
$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\cdot x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\,x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}x^k$$

$n=1: \quad t_1(x) = x$

$n=2: \quad t_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$

$n=3: \quad t_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \qquad$ u.s.w.



Fehlerbetrachtung

Der Nutzen von Approximationen, wie sie z.B. durch Taylor-Polynome gegeben sind, sind sehr begrenzt, wenn man nicht auch eine Aussage über den Approximations-fehler machen kann. Wir geben daher einen Satz an, in dem eine Darstellung für den Fehler angegeben wird und zeigen exemplarisch in Beispielen, wie diese Darstellung für Fehlerabschätzungen verwendet werden kann.

Satz: Sei f eine Funktion, die in einem Intervall, das x_0 und x enthält, $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Dann gilt für den Fehler $f(x) - t_n(x) = R_{n+1}(x)$ mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

mit einer (nicht näher bekannten) Stelle ξ zwischen x_0 und x.

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Taylor-Approximation um $x_0 = 0$ für $f(x) = \ln(1+x)$.

$n=1$: $t_1(x) = x$

Für den Fehler gilt mit $f''(x) = -(1+x)^{-2}$:

$R_2(x) = \frac{1}{2!} \cdot (-1)(1+\xi)^{-2} \cdot x^2$, ξ zwischen 0 und x.

Wir schätzen den Fehler für $x \in [-0.5, 0.5]$ nach oben ab. Da zwischen 0 und x liegt, ist dann $\xi \in [-0.5, 0.5]$, d.h. $1+\xi \in [0.5, 1.5]$. Damit gilt:

$\xi \in [-0.5, 0.5] \Rightarrow |(1+\xi)^{-2}| = (1+\xi)^{-2} \leq (1-\frac{1}{2})^{-2} = 4$

$x \in [-0.5, 0.5] \Rightarrow |x^2| = x^2 \leq 0.5^2 = \frac{1}{4}$

Daraus folgt für $x \in [-0.5, 0.5]$:

$|f(x) - t_1(x)| = |R_2(x)| = \frac{1}{2} \cdot |(1+\xi)^{-2}| \cdot |x^2| \leq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$n=2$: $t_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$

Für den Fehler gilt mit $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$:

$R_3(x) = \frac{1}{3!} \cdot 2(1+\xi)^{-3} \cdot x^3$, ξ zwischen 0 und x.

Wir schätzen den Fehler für $x \in [-0.5, 0.5]$ nach oben ab. Auch hier gilt wieder $\xi \in [-0.5, 0.5]$.

Nun gilt:

$\xi \in [-0.5, 0.5] \Rightarrow |(1+\xi)^{-3}| \leq (1-\frac{1}{2})^{-3} = 8$

$x \in [-0.5, 0.5] \Rightarrow |x^3| \leq 0.5^3 = \frac{1}{8}$

Daraus folgt für $x \in [-0.5, 0.5]$:

$|f(x) - t_2(x)| = |R_3(x)| = \frac{1}{3!} \cdot 2 \cdot |(1+\xi)^{-3}| \cdot |x^3| \leq \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$