# III Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir hatten bereits gesehen, dass bei der m-maligen Verzinsung mit einem jährlichen Zinsfuß von p% und jeweils weiterer Mitverzinsung des Kapitals nach t Jahren das Kapital auf

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot t}$$

angewachsen ist.

Für den Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ hatten wir festgehalten, dass

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = 2.71828\ldots \text{ ist.}$$

Das bedeutet, dass sich der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für wachsendem dem Wert e nähert.

Diese Zusammenhänge wollen wir nun allgemeiner betrachten.

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\} = f(n)$ ist eine Funktion $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{N}$ und $W_f \subseteq \mathbb{R}$.

Man kann Folgen durch Angabe des Bildungsgesetzes oder auch durch Auflisten der Funktionswerte angeben.

Beispiel: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Bei der Folge $\{b_n\}$ kann man beobachten, dass sich mit wachsendem n die Folgenglieder immer weniger von 0 unterscheiden, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \;.$$

Allgemein halten wir fest:

Definition: Gegeben sei eine unendliche Folge $\{a_n\}$. Nähert sich $a_n$ mit wachsendem $n$ genau einer reellen Zahl $G$ an, so heißt $G$ der Grenzwert der Folge. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = G$$

und sagt, die Folge $\{a_n\}$ ist konvergent gegen $G$. Hat die Folge keinen Grenzwert, so heißt sie divergent.

Beispiel: $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = -1, 1, -1, 1 \ldots$ ist divergent. Die Folgenglieder wechseln zwischen den Werten $+1$ und $-1$.

$\{2^n\} = 2, 4, 8, 16, \ldots$ ist divergent. Mit wachsendem $n$ werden die Folgenglieder immer größer, sie wachsen über jede beliebige Schranke. In einem solchen Fall schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

$\{-n^2\} = -1, -4, -9, -16, -25, \ldots$ ist divergent. Mit wachsendem $n$ fallen die Folgenglieder unter jede beliebige bige Schranke und man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

Bevor wir uns mit einigen, für Anwendungen wichtige Folgen beschäftigen, fassen wir noch einige Rechenregeln für Grenzwerte zusammen.

Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G_a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = G_b$ mit $G_a, G_b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot G_a$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = G_a + G_b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = G_a - G_b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = G_a\cdot G_b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)/\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{G_a}{G_b},\ \text{falls } G_b \neq 0.$$

Wir befassen uns nun mit zwei Typen von Folgen, deren Bildungsgesetze eine bestimmte festgelegte Struktur aufweisen.

Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt arithmetisch, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, d.h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{mit } d \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich also stets um eine additive Konstante.

Beispiel: Lineare Abschreibung

Eine Maschine wird für 25000 € angeschafft. Es wird angenommen, dass der Wertverlust jährlich je weils 10% ihres Anschaffungswertes beträgt. Der Restwert verringert sich also jedes Jahr um 2500 €.

Bezeichnen wir mit $R_n$ den Restwert nach $n$ Jahren, so erhalten wir:

$R_0 = 25000$, $R_1 = 22500$, $R_2 = 20000$, $R_3 = 17500$, $R_4 = 15000$, $R_5 = 12500$, $R_6 = 10000$, $R_7 = 7500$, $R_8 = 5000$, $R_9 = 2500$, $R_{10} = 0$

Dies ist eine (endliche) arithmetische Folge $\{R_n\}_{n=0}^{10}$ mit $R_{n+1} = R_n - 2500$, $n = 1, \dots, 9$.

Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt geometrisch, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, d.h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{mit } q \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich also stets um eine multiplikative Konstante.

Beispiel: Die Zinseszinsformel $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ definiert eine geometrische Folge $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $K_{n+1} = K_n\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Aus der Definition kann man direkt den folgenden Aufbau einer geometrischen Folge ablesen.

$a_1,\ a_2 = a_1\cdot q,\ a_3 = a_2\cdot q = a_1 q^2,\ a_4 = a_3\cdot q = a_1\cdot q^3, \ldots$

d.h. allgemein $a_{n+1} = a_1\cdot q^n$.

Wir überlegen nun das Konvergenzverhalten von $\{q^n\}$.

Beispiel: $\{0.1^n\} = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$

$\{0.9^n\} = 0.9, 0.81, 0.729, 0.6251, 0.59049, \ldots$

und $0.9^{25} \approx 0.071789\ldots$

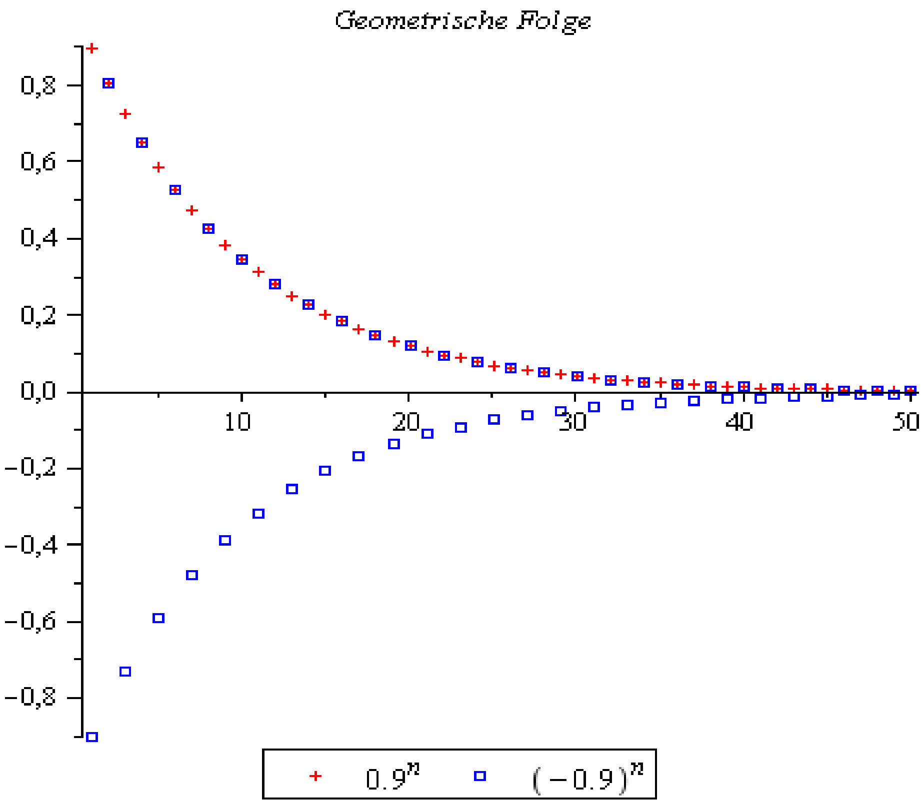
$\{1.1^n\} = 1.1, 1.21, 1.331, 1.4641, 1.61051, \ldots$

und $1.1^{25} \approx 10.834705\ldots$

$\{(-0.1)^n\} = -0.1, 0.01, -0.001, 0.0001, \ldots$

$\{(-0.9)^n\} = -0.9, 0.81, -0.729, 0.6251, -0.59049, \ldots$

$\{(-1.1)^n\} = -1.1, 1.21, -1.331, 1.4641, -1.61051, \ldots$



Die Beispiele untermauern folgende allgemeine Aussage.

Satz: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

und $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, falls $q \notin (-1, 1]$.

Wir wenden uns nun dem Grenzwertbegriff für reelle Funktionen zu. Es handelt sich dabei um einen der zentralen Begriffe der Analysis, ohne den sich wichtige Eigenschaften von Funktionen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit nicht vernünftig erklären lassen.

Beispiel: Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Wir untersuchen, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ verhalten, wenn $x$ in der Nähe von 1 liegt.

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | ... | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2.71 | 2.9701 | 2.997001 | ... | 3.003001 | 3.121 | 3.31 |

Die Tabelle legt nahe, dass bei immer weiterer Annäherung von $x$ an den Wert 1 der Funktionswert immer näher an 3 heran rückt.

Schaut man sich den Funktionsterm genauer an, so stellt man fest, dass $x = 1$ nicht nur eine Nullstelle des Nenners, sondern auch des Zählers ist.

Mittels Polynomdivision kann man den Zähler faktorisieren.

$$\begin{array}{l} (x^3 \quad -1):(x-1) = x^2+x+1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ \quad\quad x^2 - 1 \\ \quad\quad \underline{x^2 - x} \\ \quad\quad\quad\quad x - 1 \\ \quad\quad\quad\quad \underline{x - 1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Also gilt $x^3-1 = (x^2+x+1)(x-1)$

und damit $f(x) = \dfrac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}$

Daraus lässt sich nun der Grenzwert für x gegen 1 wie folgt bestimmen.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Wir fassen nun den Grenzwertbegriff mathematisch genauer.

Definition: Seien $f$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$(x_0-\varepsilon, x_0) \subseteq D_f$ und $(x_0, x_0+\varepsilon) \subseteq D_f$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. (Das bedeutet, dass die Funktion mindestens in einem kleinen Bereich um $x_0$ definiert sein soll. $x_0$ selbst muss nicht im Definitionsbereich liegen.)

Streben nun zu beliebigen Folgen $\{x_n\}$, die von links oder rechts immer näher an $x_0$ heranrücken, die zugehörigen Funktionswerte $f(x_n)$ gegen eine Zahl $G$, dann heißt $G$ Grenzwert oder Limes von $f$ für $x$ gegen $x_0$. Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = G$.

Betrachtet man nur die Näherung von rechts bzw. links an die Stelle $x_0$, so spricht man vom rechtsseitigen Grenzwert $G_R$ bzw. vom linksseitigen Grenzwert $G_L$ und schreibt dann $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = G_R$ bzw. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = G_L$.

Stimmen der rechts- und der linksseitige Grenzwert überein, d.h. gilt $G_R = G_L = G$, dann gilt auch insgesamt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = G$.

Die Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen sind analog zu denen für Folgen.

## Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Seien $f$ und $h$ Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = G_f$ und $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = G_h$ und $c\in\mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c\cdot G_f$$

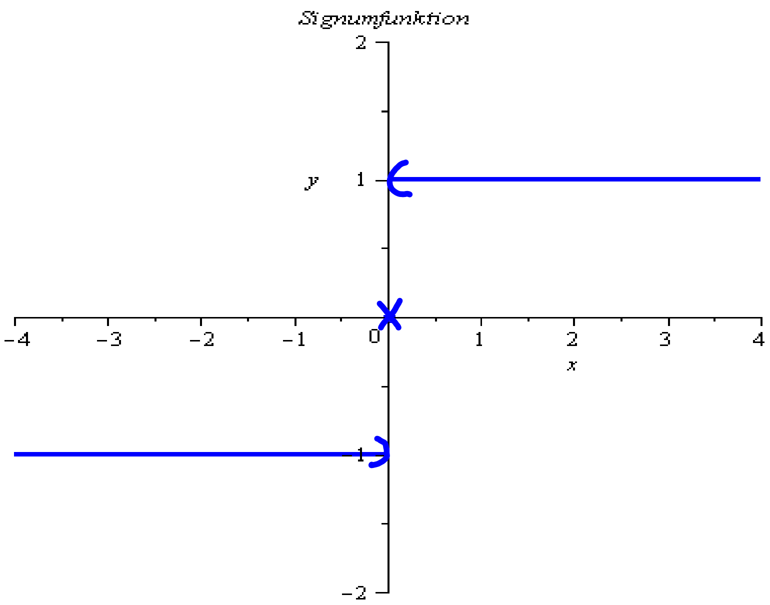
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+h(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} h(x) = G_f + G_h$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-h(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} h(x) = G_f - G_h$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot h(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} h(x) = G_f \cdot G_h$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} h(x)} = \frac{G_f}{G_h}, \text{ falls } G_h \neq 0.$$

**Beispiel:** Sei $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ die Signumfunktion.




Hier gilt:

$$\lim_{x\to x_0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

$$\lim_{x\to x_0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert für $x\to 0$ stimmen nicht überein, der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht!

Außerdem sind die einseitigen Grenzwerte auch noch vom Funktionswert an der Stelle $0$ verschieden.

Man kann die Signumfunktion nicht zeichnen, ohne den Stift abzusetzen. Man sagt auch: Die Signumfunktion ist nicht stetig an der Stelle $x=0$.

Häufig werden stetige Funktionen dadurch "beschrieben", dass man ihre Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Diese sehr anschauliche Beschreibung ist allerdings unter mathematischen Gesichtspunkten unzureichend. Wir definieren daher den Begriff der Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten.

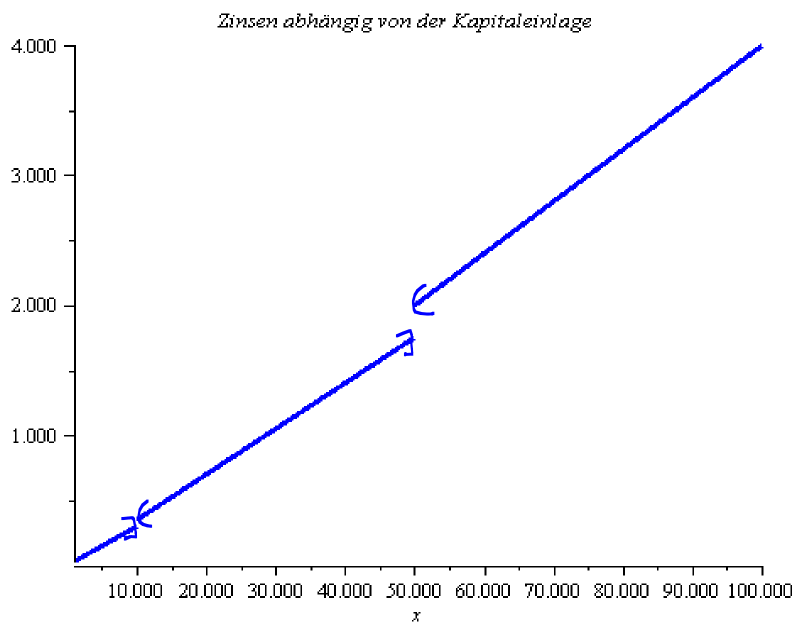
Definition: Seien $f(x)$ eine Funktion und $x_0 \in D_f$. $f$ heißt stetig in $x_0$, wenn gilt, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren, gleich sind und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle $x_0$ übereinstimmen, d.h. kurz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel: Für Kapitaleinlagen von 1000 € bis 100 000 € mit einem Anlagezeitraum von 1 Jahr bietet eine Bank folgende Konditionen an.

Für eine Einlage bis 10 000 €: 3.0% Jahreszins
über 10 000 € bis 50 000 €: 3.5% Jahreszins
über 50 000 € bis 100 000 €: 4.0% Jahreszins

Darstellung der am Jahresende fälligen Zinsen in Abhängigkeit von der Einlage x:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot 0.03, & 1000 \le x \le 10000 \\ x \cdot 0.035, & 10000 < x \le 50000 \\ x \cdot 0.04, & 50000 < x \le 100000 \end{cases}$$



Hier hat der Graph der Funktion offensichtlich Sprungstellen bei $x = 10\,000$ und $x = 50\,000$. Bei einer anderen Funktion könnten solche Sprungstellen aber auch kleiner ner und damit "unsichtbar" ausfallen.

Wir untersuchen das Grenzverhalten bzgl. $x = 10000$ und $x = 50000$.

$$\lim_{x \to 10000^-} f(x) = \lim_{x \to 10000^-} x \cdot 0.03 = 300$$

$$\lim_{x \to 10000^+} f(x) = \lim_{x \to 10000^+} x \cdot 0.035 = 350$$

$$\lim_{x \to 50000^-} f(x) = \lim_{x \to 50000^-} x \cdot 0.035 = 1750$$

$$\lim_{x \to 50000^+} f(x) = \lim_{x \to 50000^+} x \cdot 0.04 = 2000$$

Prinzipiell können Unstetigkeitsstellen einen sehr unterschiedlichen Charakter haben, z. B.
Sprungstellen, Polstellen, Definitionslücken.

Wir halten noch fest, dass die in Kapitel I vorgestellten Grundfunktionen stetig sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich.

Außerdem sind Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig auf dem jeweiligen Definitionsbereich.

Beispiel: Wir betrachten $f(x) = e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, und $g(x) = \sqrt{x}$ $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+$. Beide Funktionen sind auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig. Die verkettete Funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sqrt{x}}$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}_+$.

Wir beenden das Kapitel mit der exemplarischen Berechnung einiger Grenzwerte, die einige der üblichen Vorgehensweisen demonstrieren.

**Beispiel:** $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12}{x^2 + 8x + 15}$

Was ist $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ ?

Einsetzen von $x = -3$ in das Zählerpolynom liefert

$$(-3)^4 - 3 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 + 23 \cdot (-3) - 12 = 0$$

und $x = -3$ in das Nennerpolynom $(-3)^2 + 8 \cdot (-3) + 15 = 0$.

Zähler- und Nennerpolynom haben also beide an der Stelle $x = -3$ eine Nullstelle. Mit Polynomdivision berechnet man

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12) : (x+3) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\
\underline{x^4 + 3x^3} \\
\quad -6x^3 - 9x^2 \\
\quad \underline{-6x^3 - 18x^2} \\
\qquad\quad 9x^2 + 23x \\
\qquad\quad \underline{9x^2 + 27x} \\
\qquad\qquad -4x - 12 \\
\qquad\qquad \underline{-4x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also: $x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12 = (x^3 - 6x^2 + 9x - 4) \cdot (x+3)$

$$
\begin{array}{l}
(x^2 + 8x + 15) : (x+3) = x + 5 \\
\underline{x^2 + 3x} \\
\quad 5x + 15 \\
\quad \underline{5x + 15} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

Also: $x^2 + 8x + 15 = (x+5) \cdot (x+3)$

Damit findet man

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x - 4)\cancel{(x+3)}}{(x+5)\cancel{(x+3)}}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x+5} = \frac{176}{2} = 88$$

**Beispiel:** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{2h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{h+2} - \sqrt{2})(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})}{2h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + 2 - 2}{2h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{2\cancel{h}(\sqrt{h+2} + \sqrt{h})}$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \frac{4}{9}} \dfrac{16-81x^2}{3\sqrt{x}-2}$

Mit der 3. binomischen Formel gilt:

$16-81x^2 = (4+9x)(4-9x) = (4+9x)(2+3\sqrt{x})(2-3\sqrt{x})$

Somit folgt:

$$\lim_{x \to \frac{4}{9}} \frac{16-81x^2}{3\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to \frac{4}{9}} \frac{(4+9x)(2+3\sqrt{x})\cancel{(2-3\sqrt{x})}}{-\cancel{(2-3\sqrt{x})}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{4}{9}} (-1)(4+9x)(2+3\sqrt{x})$$

$$= (-1)\cdot 8 \cdot 4 = -32$$