Kapitel I: Reelle Funktionen einer Variablen

Die Darstellung und Untersuchung ökonomischer Zusammenhänge und Problemstellungen erfolgt häufig durch Modelle, die durch mathematische Funktionen beschrieben werden. Beispiele hierfür sind:

- Nachfrage- und Angebotsfunktionen
- Kostenfunktionen
- Produktionsfunktionen
- Konsumfunktionen
- Gewinnfunktionen

In diesem Kapitel werden Funktionen einer reellen Variablen behandelt. Neben der Einführung grundlegender Begriffe werden einige, im Zusammenhang mit ökonomischen Fragestellungen häufig auftretende mathematische Grundfunktionen eingeführt, wobei einige mögliche Anwendungen in Beispielen skizziert werden.

Empfehlung: Studieren Sie insbesondere die Abschnitte zu Potenzen, Logarithmen und Funktionen aus dem Vorkurs!

Definition: Eine reelle Funktion f einer reellen Variablen ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus einer Menge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert $f(x)$, zuordnet.

D_f heißt Definitionsbereich von f, die Menge W_f aller Funktionswerte heißt Wertebereich von f.

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow W_f \subseteq \mathbb{R}, \; x \longmapsto f(x)$

Bezeichnung: Ist f eine Funktion, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle x mit $y=f(x)$.
x heißt dann unabhängige Variable oder Argument von f und y abhängige Variable.

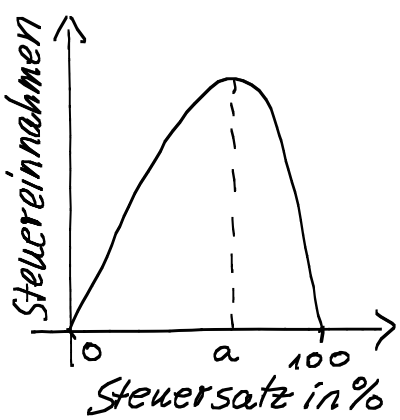
Bemerkung: Wichtig bei der Definition des Funktionsbegriffs ist die Forderung nach der Eindeutigkeit der Zuordnung.
Die Zuordnung selbst kann auf unterschiedliche Art gegeben sein, z.B. durch eine Formel, eine Tabelle oder auch durch eine Kurve.

Beispiel: Die folgende Tabelle ordnet jeder Jahreszahl zwischen 1998 und 2004 den durchschnittlichen persönlichen Konsum in Dollar in den USA zu.

Jahr	1198	1999	2000	2001	2002	2003	2004
pers. Konsum	5879.5	6282.5	6739.4	7055.0	7376.1	7760.9	8231.1

Der durchschnittliche persönliche Konsum ist hier eine Funktion der Jahreszahl.

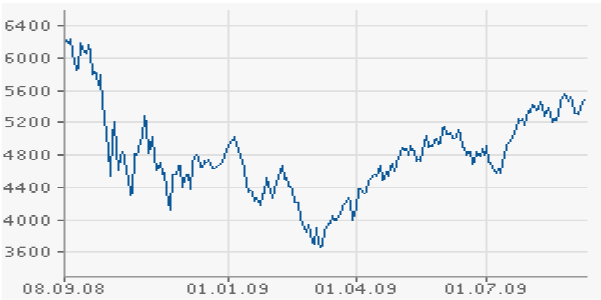
Beispiel: Die sogenannte "Laffer-Kurve" zeigt ein Modell für die Steuereinnahmen als Funktion des Steuersatzes. Offensichtlich sind die Steuereinnahmen Null, wenn der Steuersatz 0% beträgt. Ein Steuersatz von 100% lässt die Arbeitsmotivation auf (nahezu) Null sinken, da das gesamte Einkommen abgeführt werden müsste.



(Das Modell ist allerdings heftig umstritten.)

Beispiel: DAX in Abhängigkeit vom Datum

1 Jahr



10 Jahre

Bevor wir uns mit einigen mathematischen Grundfunktionen näher befassen, betrachten wir einige einfache Anwendungsbeispiele.

Beispiel: Konsumfunktion

In der makroökonomischen Theorie wird angenommen, dass der Gesamtkonsum C für Güter und Dienstleistungen eine Funktion des Volkseinkommens Y ist. Ein einfaches Modell ist eine affin-lineare Konsumfunktion $C(Y) = a + b \cdot Y$.

Die Steigung b (üblicherweise zwischen 0 und 1) gibt an, um wie viele Einheiten der Konsum zunimmt, wenn das Volkseinkommen um 1 Einheit steigt. Die Steigung ist die sogenannte Grenzneigung zum Konsum.

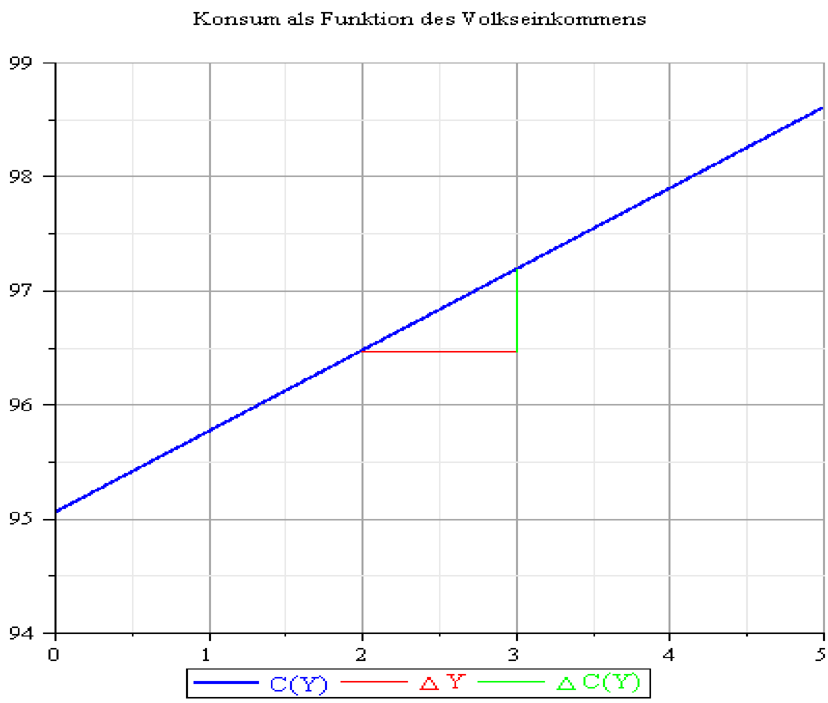
Aus einer Untersuchung der US-Wirtschaft für 1929 – 1941:

Konsumfunktion

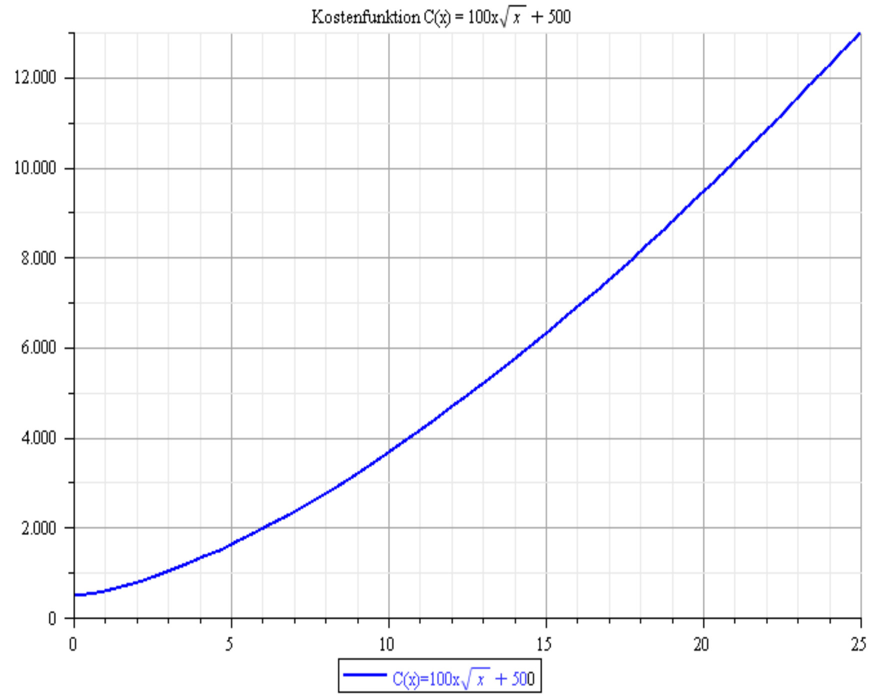
$C(Y) = 95.05 + 0.712\,Y$

Grenzneigung zum Konsum:

$$b = \frac{\Delta C(Y)}{\Delta Y} = 0.712$$



Beispiel: Die Kosten für die Herstellung von x Einheiten eines Produktes seien gegeben durch $C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$.



Für $x=0$ haben wir Kosten von $C(0)=500$. Dies sind die Fixkosten, während der Term $100x\sqrt{x}$ die variablen Kosten beschreibt.

Wir nehmen an, dass das Unternehmen x Einheiten produziert und bestimmen den Zuwachs der Kosten bei Herstellung einer weiteren Einheit.

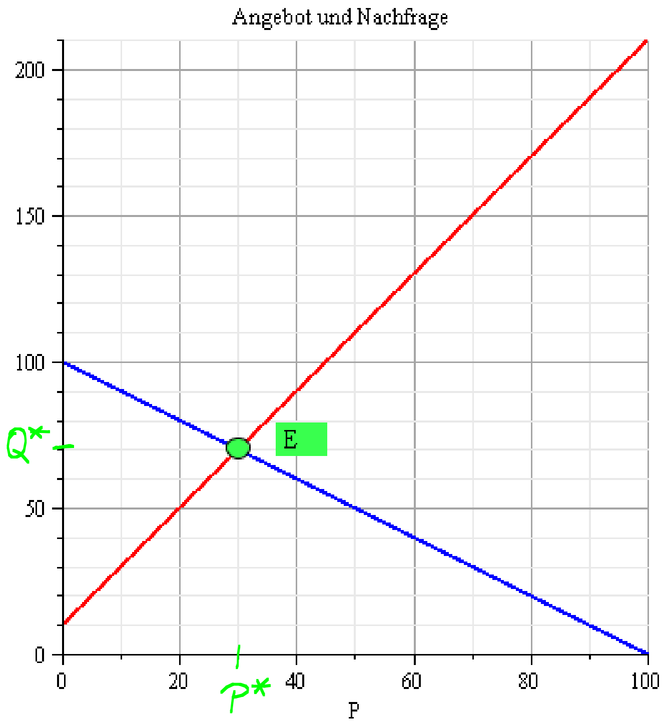
Kosten Produktion x Einheiten: $C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$

Kosten Produktion $x+1$ Einheiten: $C(x+1) = 100(x+1)\sqrt{x+1} + 500$

Zuwachs der Kosten: $C(x+1) - C(x) = 100\left[(x+1)\sqrt{x+1} - x\sqrt{x}\right]$

Beispiel: Die Nachfrage von Verbrauchern nach einem Gut in einer bestimmten Periode ist abhängig vom Preis. Üblicherweise geht die Nachfrage bei steigendem Preis zurück. Das Angebot der Hersteller des Produktes ist ebenfalls abhängig vom Preis, der erzielt werden kann, wobei das Angebot üblicherweise steigt, wenn der Preis steigt. In einem (sehr einfachen) Modell mit der Bezeichnung P für den Preis könnte dies z.B. so aussehen.

Nachfrage: $N(P) = 100 - P$ Angebot: $A(P) = 10 + 2P$



Der Schnittpunkt E der beiden Kurven ist derjenige Punkt, bei dem die Nachfrage gleich dem Angebot ist, d.h. Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht sind.

$$100 - P = 10 + 2P$$

$$\Longleftrightarrow \quad P = 30$$

Der zugehörige Preis $P^* = 30$ heißt Gleichgewichtspreis, die zugehörige Menge $A(P^*) = N(P^*)$ ist die Gleichgewichtsmenge $Q^* = 70$

(In der Praxis der Preistheorie wird P üblicherweise auf der vertikalen Achse aufgetragen.)

Allgemeiner kann das Modell linearer Nachfrage- und Angebotsfunktionen folgendermaßen beschrieben werden.

$$N(P) = a - b \cdot P \,, \quad A(P) = \alpha + \beta \cdot P$$

mit positiven Parametern a, b, α, β.

Angebot und Nachfrage sind im Gleichgewicht, wenn

$$N(P) = A(P) \Longleftrightarrow a - b \cdot P = \alpha + \beta \cdot P$$

$$\Longleftrightarrow P = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$$

Der Gleichgewichtspreis ist also $P^* = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$, die zugehörige Gleichgewichtsmenge beträgt

$$N(P^*) = A(P^*) = Q^* = a - b \cdot \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{a\beta + \alpha b}{b+\beta}$$

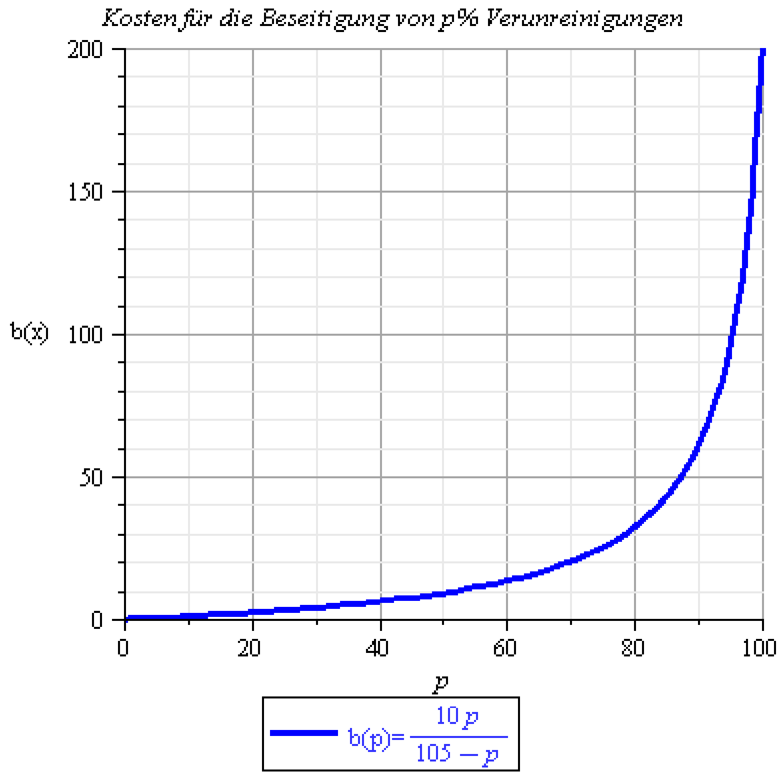
Beispiel: Die Kosten für die Beseitigung von p% der Verunreinigungen in einem See seien $b(p) = \frac{10p}{105-p}$.
Der Definitionsbereich ist hier sinnvollerweise auf $D_b = [0, 100]$ einzuschränken.

Wertetabelle

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$b(p)$	0	$\frac{20}{19}$	$\frac{40}{17}$	4	$\frac{80}{13}$	$\frac{100}{11}$	$\frac{40}{3}$	20	32	60	200

Was ist der Zuwachs an Kosten, wenn statt p% der Verunreinigungen (p+1)% beseitigt werden sollen?

$$b(p+1) - b(p)$$
$$= \frac{10(p+1)}{105-(p+1)} - \frac{10p}{105-p}$$
$$= \frac{10(p+1)(105-p) - 10p(104-p)}{(104-p)(105-p)}$$
$$= \frac{1050}{(104-p)(105-p)}$$



Allgemeiner: Was ist der Zuwachs an Kosten, wenn statt p% der Verunreinigungen (p+h)%, h>0, beseitigt werden sollen?

$$b(p+h) - b(p) = \frac{10(p+h)}{105-(p+h)} - \frac{10p}{105-p} = \frac{1050h}{(105-p-h)(105-p)}$$

z.B. Zuwachs an Kosten für die Beseitigung von

30% statt 20% : $b(30) - b(20) = \frac{28}{17} \approx 1.647$

60% statt 50% : $b(60) - b(50) = \frac{140}{33} \approx 4.242$

90% statt 80% : $b(90) - b(80) = 28$

100% statt 90% : $b(100) - b(90) = 140$

Die Beispiele sollten zunächst klarmachen, dass funktionale Zusammenhänge als Modelle vieler Problemstellungen auftreten. Die Aufgabe der Mathematik ist es, zunächst einen geeigneten Vorrat an Grundfunktionen zur Verfügung zu stellen und Methoden anzugeben, mit deren Hilfe man aus diesen Grundfunktionen zusammengesetzte Funktionen untersuchen kann.
In diesem Kapitel werden wir zunächst Grundfunktionen mit einigen wesentlichen Eigenschaften angeben.

Grundfunktionen
- Potenz- und Wurzelfunktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eigenschaften
- Definitions- und Wertebereich
- Monotonie
- Beschränktheit
- Symmetrien
- Umkehrfunktion

Zunächst benötigen wir einige Vereinbarungen und Definitionen. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$.

Definitionsbereich: Wir vereinbaren, dass der Definitionsbereich einer Funktion aus allen reellen Zahlen bestehen soll, für die die Funktion berechnet werden kann, es sei denn, dass ein anderer Definitionsbereich angegeben ist.

Monotonie: Eine Funktion f heißt $\left\{\begin{matrix}\text{monoton}\\ \text{streng monoton}\end{matrix}\right\}$ wachsend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $\left\{\begin{matrix} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \end{matrix}\right\}$ gilt.

Eine Funktion f heißt $\left\{\begin{matrix}\text{monoton}\\ \text{streng monoton}\end{matrix}\right\}$ fallend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $\left\{\begin{matrix} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{matrix}\right\}$ gilt.

Beschränktheit: Eine Funktion f heißt nach $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkt, wenn es eine Konstante C gibt, so dass $\left\{\begin{matrix} f(x) \leq C \\ f(x) \geq C \end{matrix}\right\}$ gilt für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Sie heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Symmetrien: Eine Funktion f heißt gerade, wenn ihr Graph (achsen-)symmetrisch zur y-Achse ist, d.h. wenn gilt:
(1) $x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow -x \in \mathbb{D}_f$ und (2) $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$
Eine Funktion heißt ungerade, wenn ihr Graph (punkt)-symmetrisch zum Ursprung ist, d.h. wenn gilt:
(1) $x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow -x \in \mathbb{D}_f$ und (2) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.
Wenn für ein festes $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $a + x \in \mathbb{D}_f \Rightarrow a - x \in \mathbb{D}_f$ und (2) $f(a+x) = f(a-x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$,
dann ist der Graph der Funktion symmetrisch zur Geraden $x = a$ (Parallele zu y-Achse durch $(a,0)$).

Bevor wir den Begriff der Umkehrfunktion definieren, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

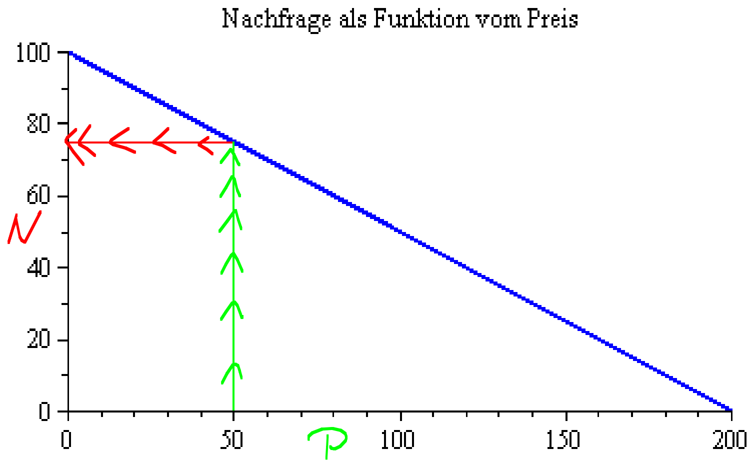
Beispiel: Wir betrachten die lineare Nachfragefunktion

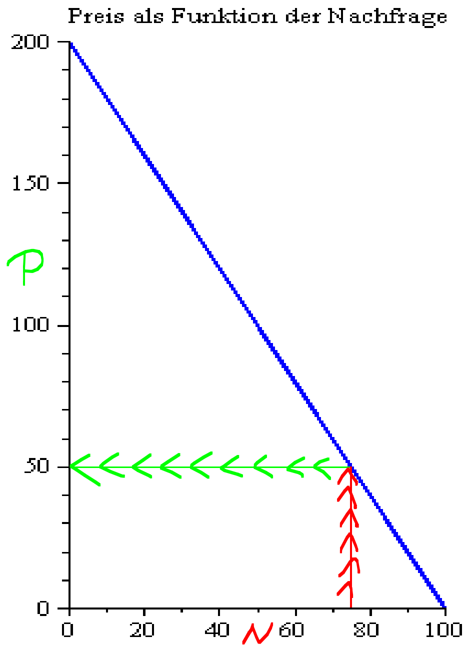
$$N = 100 - 0.5P$$

in Abhängigkeit vom Preis P.

Aus der Sicht des Herstellers ist es möglicherweise zweckmäßig, die herzustellende Menge als wählbare Größe anzusehen, um den daraus resultierenden Preis zu betrachten, d.h. der Hersteller ist an der inversen Funktion (Umkehrfunktion) interessiert. Diesen funktionalen Zusammenhang erhält man, wenn man die Nachfragefunktion nach P auflöst, d.h.

$$N = 100 - 0.5P \iff P = 200 - 2N$$





$N = 100 - 0.5P$ gibt zu gegebenem Preis P die Nachfrage N an. Umgekehrt gibt $P = 200 - 2N$ zu gegebener Nachfrage N den Preis P an.

In beiden Fällen handelt es sich um Funktionen!

Die beiden Funktionen sind invers zueinander!

Umkehrfunktion (Inverse Funktion): Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ und Wertebereich $\mathbb{W}_f$. f ist umkehrbar eindeutig, wenn es zu jedem $y \in \mathbb{W}_f$ genau ein $x \in \mathbb{D}_f$ gibt, so dass $y = f(x)$ gilt.

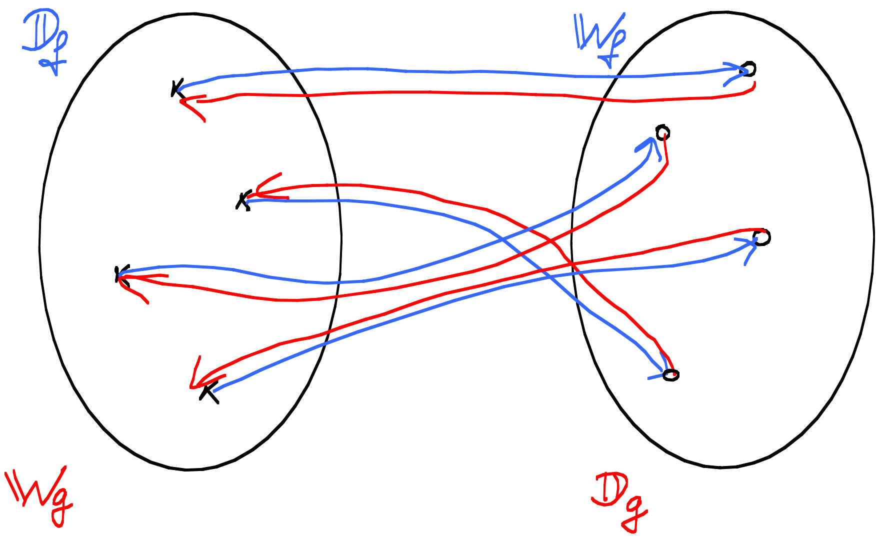
Äquivalent dazu ist die Bedingung, dass zu verschiedenen Elementen aus dem Definitionsbereich stets verschiedene Funktionswerte gehören müssen, d. h. wenn für $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.

Ist f umkehrbar eindeutig, dann besitzt sie eine Umkehrfunktion (inverse Funktion) g mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_g = \mathbb{W}_f$ und Wertebereich $\mathbb{W}_g = \mathbb{D}_f$. Dabei ist für jedes $y \in \mathbb{D}_g$ der Wert $g(y)$ die eindeutig bestimmte Zahl $x \in \mathbb{W}_g$ mit $f(x) = y$.

Es gilt dann für $x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{W}_g$, $y \in \mathbb{W}_f = \mathbb{D}_g$:

$$g(y) = x \iff y = f(x)$$

Veranschaulichung:



Häufig bezeichnet man die Umkehrfunktion zu f mit f^{-1}.

Achtung: f^{-1} ist nicht dasselbe wie $\frac{1}{f}$!!

Wichtig ist, dass es sich bei der Umkehrung wieder um eine Funktion handeln muss, wenn man von einer Umkehrfunktion spricht. Wie man am Beispiel der Normalparabel sehen kann, ist dies nicht selbstverständlich.

Aus der Definition wird klar, dass streng monotone Funktionen stets umkehrbar eindeutig sind.

Eigenschaften inverser Funktionen

Ist g Umkehrfunktion von f, dann ist auch f Umkehrfunktion von g. Es gilt dann:

$g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$ und
$f(g(y)) = y$ für alle $y \in D_g$.

Potenzfunktionen

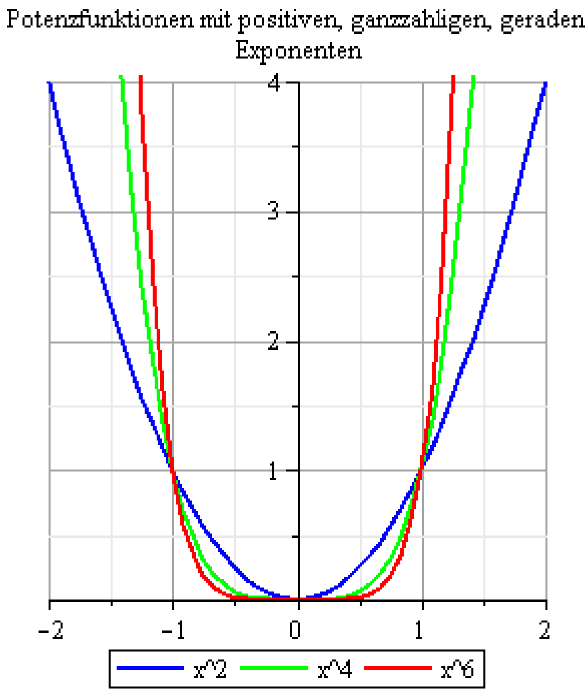
Definition: Seien $r \in \mathbb{R}$ und $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion
$f(x) = x^r$ heißt Potenzfunktion.

Definitions-, Wertebereich und weitere Eigenschaften hängen von r ab.
Wir betrachten daher verschiedene Fälle.

1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n gerade

z.B. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$

- $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_+$
- nach unten durch Null beschränkt
- gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achse
- streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$
  streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.
- umkehrbar eindeutig nur bei eingeschränktem Definitionsbereich, z.B. $D = [0, \infty)$



Beispiel: Sei $y = f(x) = x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}_+$, $W_f = \mathbb{R}_+$.

Bestimmung der Umkehrfunktion:

$(y = x^2 \wedge x \geq 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

Also ist $g(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ die zugehörige Umkehrfunktion.

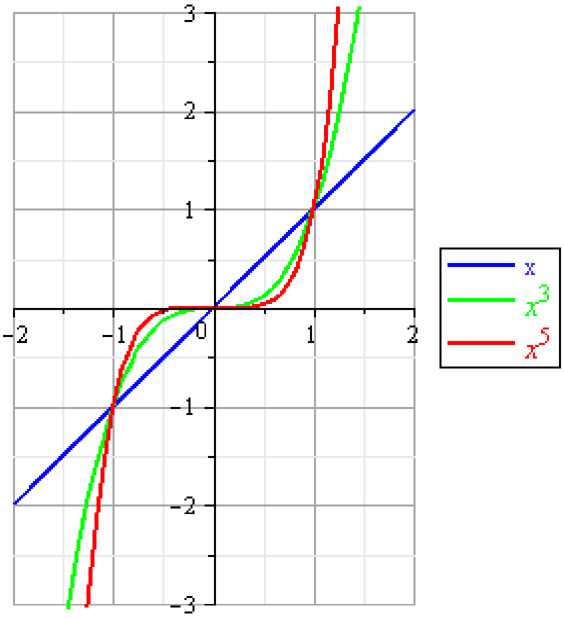
Oft vertauscht man noch die Variablennamen: $g(x) = \sqrt{x}$.

Zeichnet man die Graphen einer Funktion $f(x)$ und der zugehörigen Umkehrfunktion $g(x)$ in ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen gleich skaliert sind, so ist der Graph von $g(x)$ die Spiegelung des Graphen von $f(x)$ an der ersten Winkelhalbierenden.

Allgemein ist für $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, n gerade und $D_f=\mathbb{R}_+$ die zugehörige Umkehrfunktion $g(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$

2) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, n ungerade

z.B. $f(x)=x$, $f(x)=x^3$, $f(x)=x^5$

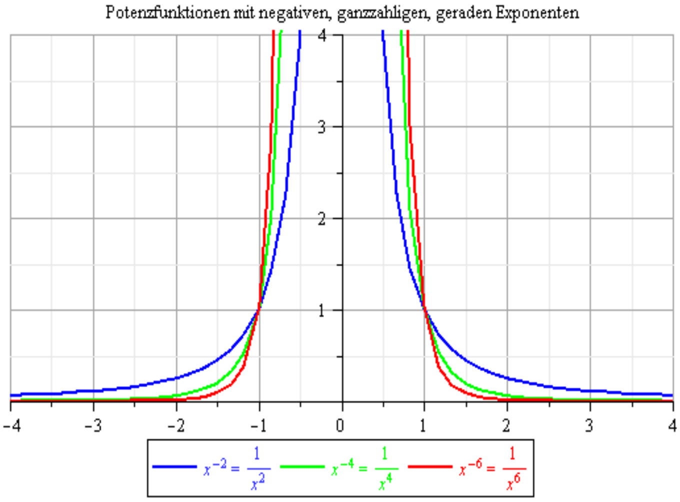


- $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, $\mathbb{W}=\mathbb{R}$
- unbeschränkt
- ungerade, d.h. symmetrisch zum Ursprung
- streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$
- wegen der strengen Monotonie auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar; die Umkehrfunktion lautet:

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt[n]{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt[n]{-x}, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^{\frac{1}{n}}, & x\geq 0\\ -(-x)^{\frac{1}{n}}, & x<0\end{cases}$$

3) $f(x)=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, n gerade

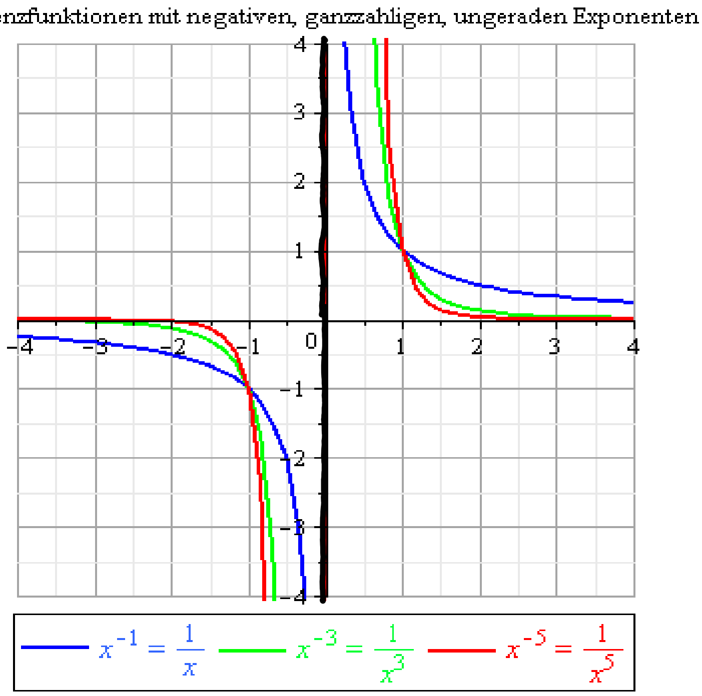
z.B. $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$



- $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{W}=\mathbb{R}_+^*=(0,\infty)$
- nach unten durch 0 beschränkt
- gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achse
- streng monoton wachsend auf $(-\infty,0)$
  streng monoton fallend auf $(0,\infty)$
- nur auf eingeschränktem Definitionsbereich, z.B. $(0,\infty)$ umkehrbar.
  Für $\mathbb{D}=(0,\infty)$ ist die Umkehrfunktion $g(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{x}}=x^{-\frac{1}{n}}$

4) $f(x)=x^{-n},\ n\in\mathbb{N},\ n$ ungerade

z.B. $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x},\ f(x)=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$

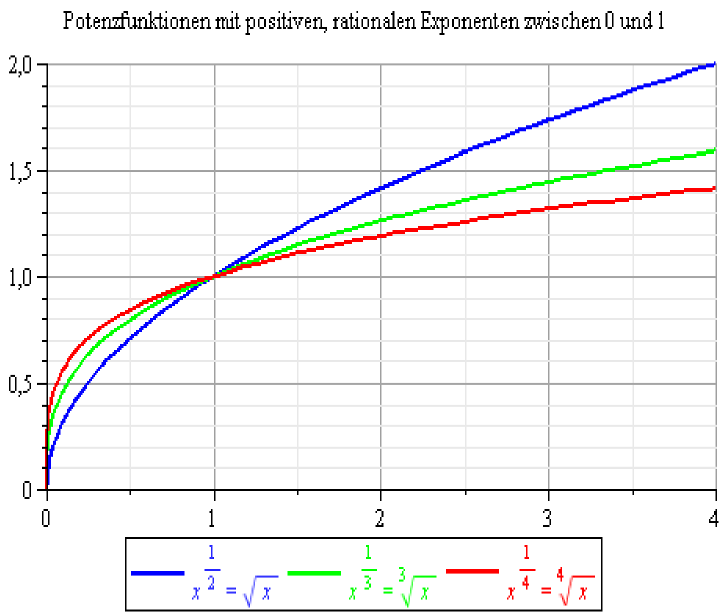


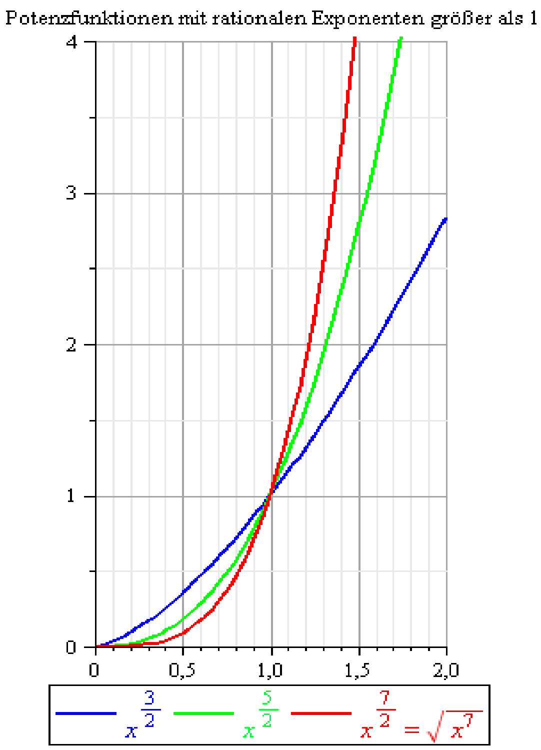
- $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathbb{W}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- unbeschränkt
- ungerade, d.h. symmetrisch zum Ursprung
- streng monoton fallend auf $(-\infty,0)$ und auf $(0,\infty)$
- auf ganzem Definitionsbereich umkehrbar; Umkehrfunktion

$$g(x)=\begin{cases} x^{-\frac{1}{n}}, & x\geq 0\\ -(-x)^{-\frac{1}{n}}, & x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}, & x\geq 0\\ -\frac{1}{\sqrt[n]{-x}}, & x<0\end{cases}$$

5) $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m},\ \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}_+^*$

z.B. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3},\ f(x)=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$





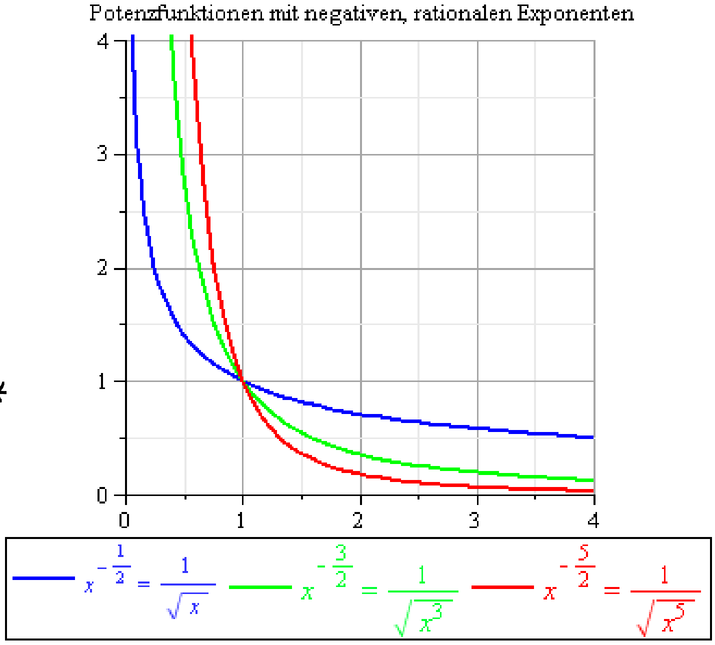
- $\mathbb{D}=\mathbb{R}_+,\ \mathbb{W}=\mathbb{R}_+$
- nach unten durch 0 beschränkt
- streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$
- auf gesamtem Definitionsbereich umkehrbar; Umkehrfunktion

$$g(x)=x^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{x^n}$$

6) $f(x)=x^{\frac{m}{n}},\ \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^*_-$

z.B. $f(x)=x^{-\frac{7}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$

- $\mathbb{D}=\mathbb{R}^*_+,\ \mathbb{W}=\mathbb{R}^*_+$
- nach unten durch 0 beschränkt
- streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^*_+$
- auf gesamtem Definitionsbereich umkehrbar; Umkehrfunktion $g(x)=x^{\frac{n}{m}}$



Irrationale Potenzen

Frage: Was versteht man z.B. unter $3^{\sqrt{2}}$?

Das Problem ist, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, d.h. eine unendliche, nichtperiodische Dezimalzahl.

Auch wenn wir uns mit Folgen und Grenzwerten bisher nicht beschäftigt haben, versuchen wir uns folgendes vorzustellen:

Wir starten mit dem Wert $x_0=1$ und berechnen nacheinander für natürliche Zahlen n die Werte

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{x_n}\ ,\ \text{d.h.}$$

$$x_1=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}=1.41\overline{6}$$

$$x_3=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{12}+\frac{12}{17}=\frac{577}{408}\approx 1.41421568 2$$

u.s.w.

Man erhält eine Folge von Zahlen, die immer näher an $\sqrt{2}$ heranrückt, d.h. eine Folge mit Grenzwert $\sqrt{2}$. Betrachtet man dazu die Folge $3^1,\ 3^{\frac{3}{2}},\ 3^{\frac{17}{12}},\ 3^{\frac{577}{408}},\ \ldots$, so hat man eine Folge mit rationalen Exponenten. Diese Folge lässt sich als Folge immer besser werdender

Näherungen für $3^{\sqrt{2}}$ auffassen. Den Grenzwert definieren wir als $3^{\sqrt{2}}$.

Solche irrationalen Exponenten werden benötigt, um die Exponentialfunktionen auf dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ definieren zu können.

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen treten in vielen wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Modellen auf. Beispiele sind:

- wirtschaftliches Wachstum
- Bevölkerungswachstum
- stetig akkumulierter Zins
- abnehmendes Analphabetentum

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Die Funktion $f(x) = a^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion. Dabei heißt a Basis und x Exponent.

Da es sich bei der Verwendung von Exponentialfunktionen oft um die Beschreibung zeitabhängiger Vorgänge handelt, wird häufig die Variable t verwendet.

Im Unterschied zu Potenzfunktionen, bei denen die Basis die unabhängige Variable ist, ist bei den Exponentialfunktionen der Exponent die unabhängige Variable.

Bevor wir uns mit den (mathematischen) Eigenschaften näher beschäftigen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: (Bevölkerungswachstum)

Nach Schätzungen der UN wurde erwartet, dass die Bevölkerung Europas zwischen 1960 und 2000 um circa 0.72% pro Jahr zunimmt. Mit 641 Mio. im Jahr 1960 wäre nach dieser Schätzung

Jahr	Bevölkerung in Mio.
1960	641
1961	$641 \cdot (1+\frac{0.72}{100}) = 641 \cdot 1.0072$
1962	$641 \cdot 1.0072 \cdot (1+\frac{0.72}{100}) = 641 \cdot 1.0072^2$
1963	$641 \cdot 1.0072^3$
⋮	⋮

Bei einer konstant angenommenen jährlichen Wachstumsrate von 0.72 % wächst die Bevölkerung jedes Jahr um den Faktor 1.0072. Die Größe der Population zur Zeit t bezogen auf das Jahr 1960 lässt sich somit durch die Funktion

$$P(t) = 641 \cdot 1.0072^t$$

beschreiben. Nach diesem Modell wäre die Bevölkerung Europas im Jahr 2008 auf

$$P(48) = 641 \cdot 1.0072^{48} \approx 904.5 \text{ Millionen}$$

angewachsen.

Beispiel: (Zinseszins; exponentielle Verzinsung)

Wir betrachten ein zum Zeitpunkt $t=0$ (Beginn einer Zinsperiode) vorhandenes Kapital K_0. Wir überlegen, wie sich das Kapital bei einem nominellen Jahreszins $i = p\%$ entwickelt, wenn das Kapital jährlich m-malig zum relativen Zinssatz $\frac{i}{m}$ verzinst wird und die Zinsen jeweils dem Kapital gutgeschrieben werden. Zum Beispiel bedeutet:

$m=1$: jährliche Verzinsung mit i

$m=2$: halbjährliche Verzinsung mit $\frac{i}{2}$

$m=12$: monatliche Verzinsung mit $\frac{i}{12}$

m bezeichnet also die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr. Für $m>1$ spricht man von unterjähriger Verzinsung.

Wie groß ist das Kapital Km nach t Jahren?

<u>m=1</u>

$t=1: \; K1(1)=K_0(1+i)$

$t=2: \; K1(2)=K_0(1+i)^2$ $\qquad K1(t)=K_0(1+i)^t$

...

<u>m=2</u>

$t=\frac{1}{2}: \; K2(\frac{1}{2})=K_0(1+\frac{i}{2})$

$t=1: \; K2(1)=K_0(1+\frac{i}{2})^2$ $\qquad K2(t)=K_0(1+\frac{i}{2})^{2\cdot t}$

$t=\frac{3}{2}: \; K2(\frac{3}{2})=K_0(1+\frac{i}{2})^3$

....

<u>m=4</u>

$t=\frac{1}{4}: K4(\frac{1}{4})=K_0(1+\frac{i}{4})$

$t=\frac{1}{2}: K4(\frac{1}{2})=K_0(1+\frac{i}{4})^2$ $\qquad K4(t)=K_0(1+\frac{i}{4})^{4\cdot t}$

$t=\frac{3}{4}: K4(\frac{1}{2})=K_0(1+\frac{i}{4})^3$

...

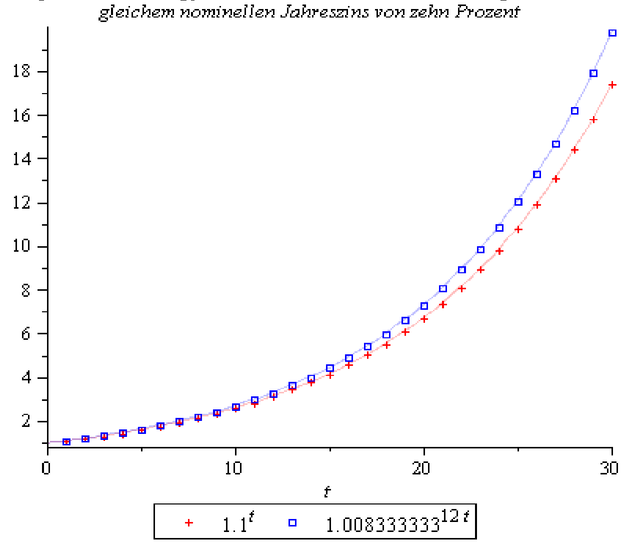
Allgemein ist $Km(t)=K_0(1+\frac{i}{m})^{m\cdot t}$, d.h. eine Exponentialfunktion der Form $K_0\cdot a^t$ mit der Basis $a=(1+\frac{i}{m})^m$. Zum Vergleich berechnen wir für einen Anlagebetrag von $K_0=1$ für m=1,2,4,12 das Kapital nach 1,2,10 Jahren für $i=p\%=\frac{5}{100}$.

t	1	2	10
K1(t)	$1+0.05 = 1.05$	$(1+0.05)^2 = 1.1025$	$1.05^{10} \approx 1.628894$
K2(t)	$(1+0.025)^2 = 1.050625$	$(1+0.025)^4 \approx 1.103813$	$1.025^{20} \approx 1.638616$
K4(t)	$(1+0.125)^4 \approx 1.050945$	$(1+0.0125)^8 \approx 1.104486$	$1.0125^{40} \approx 1.643619$
K12(t)	$(1+0.0041\bar{6})^{12} \approx 1.051162$	$(1+0.0041\bar{6})^{24} \approx 1.104913$	$1.0041\bar{6}^{120} \approx 1.647009$

Zur Veranschaulichung

Bei einem Anlagebetrag von 10 000 € ergibt sich bei p=5% nach 10 Jahren ein Unterschied von 181.15€ zwischen monatlicher und jährlicher Verzinsung.

Kapitalentwicklung jährliche und monatliche Verzinsung bei gleichem nominellen Jahreszins von zehn Prozent



Wann hat sich das Kapital verdoppelt?
Um diese Frage zu beantworten, muss man die Gleichung

$$K_0 \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} = 2K_0 \iff \left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^m\right]^t = 2$$

nach t auflösen. Gesucht ist also diejenige Potenz t^* (die Verdopplungszeit), zu der $a=(1+\frac{i}{m})^m$ erhoben werden muss, um 2 zu erhalten. Dies werden wir an späterer Stelle mit Logarithmen lösen.

Was es bedeutet, wenn wir die Anzahl m der jährlichen Zinsperioden immer größer werden lassen, d.h. Verzinsung jeden Tag, jede Stunde, jede Minute, jede Sekunde etc. betrachten, werden wir an späterer Stelle genauer untersuchen.

Beispiel: Wir betrachten eine Gruppe von 10 000 Analphabeten. Durch spezielle Bildungsmaßnahmen soll der Anteil der Analphabeten in dieser Gruppe um jährlich 10% reduziert werden. Wie groß ist der Anteil der Analphabeten nach t Jahren?

t	0	1	2	3
Anteil Analph.	10 000	$10000(1-\frac{10}{100}) = 10000\cdot 0.9$	$10000\cdot 0.9^2$	$10000\cdot 0.9^3$ u.s.w.

Die Anzahl kann somit durch die Exponentialfunktion

$$A(t) = A_0 \cdot 0.9^t$$

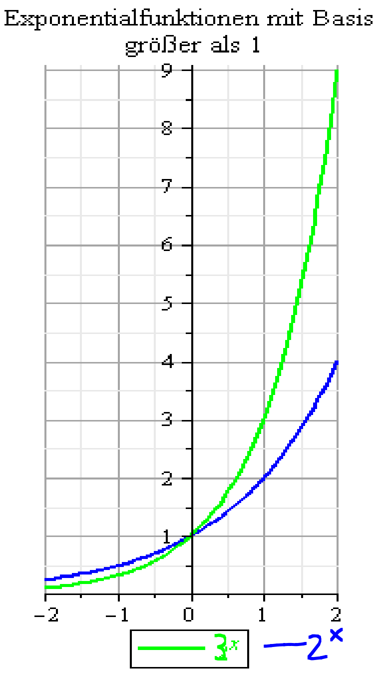
beschrieben werden. Hier ist die Basis $0.9 < 1$; mit zunehmendem t wird A(t) kleiner.

Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Analphabeten halbiert?
Zu lösen ist die Gleichung

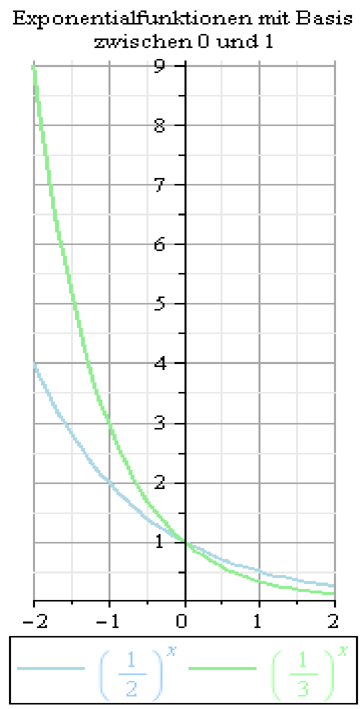
$$A_0 \cdot 0.9^t = 0.5 \cdot A_0 \iff 0.9^t = 0.5$$

Gesucht ist also diejenige Potenz t^* (die Halbwertszeit), zu der die Basis 0.9 erhoben werden muss, um 0.5 zu erhalten. Auch dies löst man mit Hilfe von Logarithmen.

Wir wenden uns nun wieder allgemein den Exponentialfunktionen, d.h. Funktionen der Form $f(x)=a^x$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, zu. Dazu schauen wir uns zunächst beispielhaft die Graphen einiger Exponentialfunktionen mit verschiedenen Basen a an. Wir betrachten im folgenden nur $a\neq 1$, da der Fall $a=1$, d.h. $f(x)=1^x=1$ nicht sonderlich interessant ist.



- $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, $\mathbb{W}=\mathbb{R}_+^*$
- nach unten durch 0 beschränkt
- $f(0)=1$
- für $a>1$ streng monoton wachsen auf $\mathbb{R}$
- für $0<a<1$ streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$



Wegen der strengen Monotonie ist $f(x)=a^x$ für jedes $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ umkehrbar eindeutig. Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind die entsprechenden Logarithmusfunktionen, die wir im Anschluss an die Exponentialfunktionen behandeln werden.

Es gilt: $\quad f(x+1)=a^{x+1}=a\cdot a^x=a\cdot f(x)$ bzw. $a=\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.
Das bedeutet, dass die Basis a denjenigen Faktor darstellt, mit dem sich $f(x)$ ändert, wenn x um 1 zunimmt.
Falls $a=1+\frac{p}{100}$, $p>0$, wächst $f(x)$ um $p\%$, wenn x um 1 zunimmt. Falls $a=1-\frac{p}{100}$, $p>0$, fällt $f(x)$ um $p\%$, wenn x um 1 wächst.

Eine besondere Bedeutung kommt der Basis e, d.h. der "natürlichen" Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ zu, wobei $e = 2.718281828459045....$ die Eulersche Zahl bezeichnet. Die Eulersche Zahl e ist eine irrationale Zahl. Um zu zeigen, wie die irrationale Zahl e in "natürlicher" Weise als Basis auftritt, greifen wir das obige Beispiel zur Kapitalverzinsung noch einmal auf.

Beispiel: Wird ein Kapital m-mal jährlich zum relativen Zinssatz von $\frac{i}{m}$ verzinst, so hatten wir für die Kapitalentwicklung die Formel $K_m(t) = K_0(1+\frac{i}{m})^{m\cdot t}$ gefunden.

Bei wachsendem m werden in immer kürzeren Abständen die relativen Zinsen dem Kapital zugeschlagen. Wir haben gesehen, dass $K_m(t)$ größer wird, wenn m größer wird. Wir illustrieren dies noch einmal mit folgenden Werten: $K_0 = 1$, $i = 100\%$, $t = 1$ (Jahr) für verschiedene Werte von m.

Anzahl m der Zinsperioden pro Jahr	Kapital $K_m(1)$ nach einem Jahr	
1 (Zinszuschlag jährlich	$(1+1)^1$	$= 2$
2 (Zinszuschlag halbjährlich)	$(1+\frac{1}{2})^2$	$= 2.25$
12 (Zinszuschlag monatlich)	$(1+\frac{1}{12})^{12}$	≈ 2.613035
365 (Zinszuschlag täglich)	$(1+\frac{1}{365})^{365}$	≈ 2.714567
8760 (Zinszuschlag stündlich)	$(1+\frac{1}{8760})^{8760}$	≈ 2.718127

Man kann nun zeigen, dass auch bei beliebig häufigem Zinszuschlag pro Jahr, d.h. $m \to \infty$, das Kapital am Jahresende einen bestimmten Betrag nicht überschreiten kann.

Betrachtet man nämlich den Ausdruck $(1+\frac{1}{z})^z$ für $z \to \infty$, so strebt dieser Ausdruck gegen die Eulersche Zahl e.

Man schreibt $\lim\limits_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^z = e$.

Setzen wir speziell $z = \frac{m}{i}$ ein und betrachten $m \to \infty$, dann erhalten wir $\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{i/m} = e$. Daraus kann man schließen, dass

$$\lim_{m \to \infty} K_m(t) = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i} \cdot it} = K_0 \cdot e^{it} \text{ ist.}$$

Wir erhalten damit die Formel für die sogenannte stetige Verzinsung (kontinuierliche Verzinsung)

$$K(t) = K_0 \cdot e^{it}.$$

Weiter oben haben wir bereits erwähnt, dass jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ umkehrbar eindeutig ist. Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen

Wir wiederholen zunächst die Definition des Logarithmus einer Zahl $u \in \mathbb{R}_+^*$ zur Basis a:

$$\log_a u = v \iff a^v = u$$

$\log_a u$ ist also diejenige Zahl v, die als Potenz von a genommen werden muss, so dass $a^v = u$ ist.

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Die Funktion $f(x) = \log_a x$ heißt Logarithmusfunktion (zur Basis a).

Damit ist $f(x) = \log_a x$ gerade durch die Eigenschaft definiert, Umkehrfunktion zu $g(x) = a^x$ zu sein.

Daher gilt: $\log_a(a^x) = x$ und $a^{\log_a x} = x$!

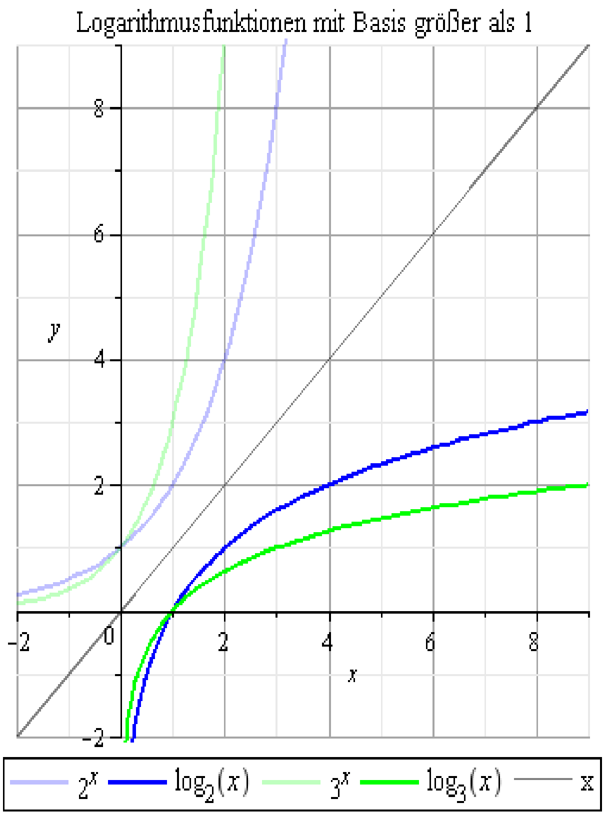
Das Logarithmieren macht sozusagen das Exponentieren rückgängig und umgekehrt.

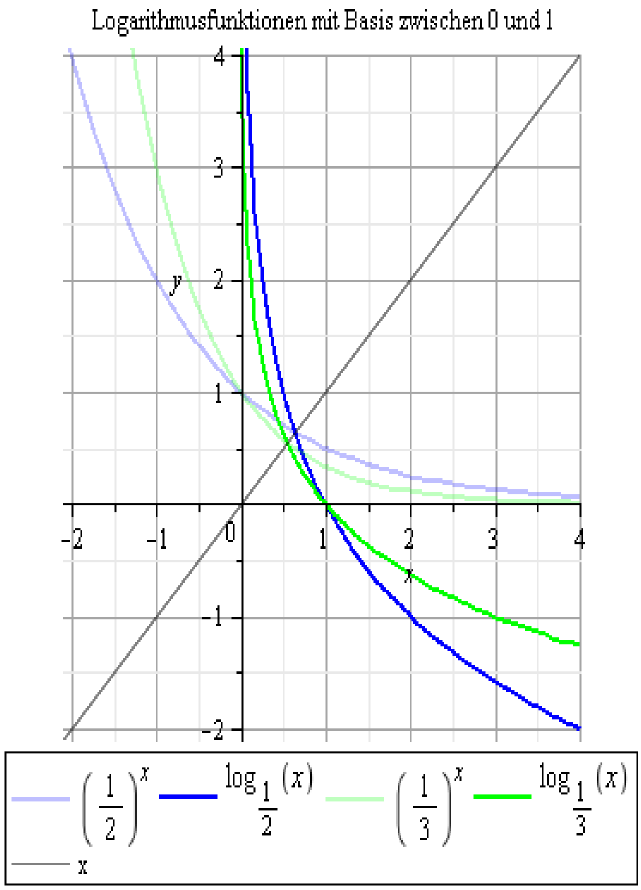
Für spezielle Basen gibt es abkürzende Bezeichnungen:

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{und} \quad \log_e x = \ln x$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen erhält man durch Spiegelung der Exponentialfunktionen an der ersten Winkelhalbierenden.

Bevor wir uns Beispielen zuwenden, betrachten wir die Graphen einiger Logarithmusfunktionen und stellen einige grundlegende Eigenschaften zusammen.





- $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- unbeschränkt
- $f(1) = \log_a 1 = 0$
- für $a > 1$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+^*$
- für $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_+^*$

Beispiel: Wir betrachten eine Population, die jährlich um 3.5% wächst. Wie groß ist die Verdopplungszeit?

Zunächst gilt $P(t) = P_0 \left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^t = P_0 \cdot 1.035^t$.

Gesucht ist t^*, so dass gilt: $P_0 \cdot 1.035^{t^*} = 2P_0$

$$\begin{aligned} P_0 \cdot 1.035^t = 2P_0 &\iff 1.035^t = 2 \\ &\iff \ln(1.035^t) = \ln 2 \\ &\iff t \cdot \ln 1.035 = \ln 2 \\ &\iff t = \frac{\ln 2}{\ln 1.035} \end{aligned}$$

Die Verdopplungszeit beträgt $t^* = \frac{\ln 2}{\ln 1.035} \approx 20{,}15$

Wir wiederholen die Rechenregeln für den Logarithmus

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3) $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x$
4) $\log_a(a^p) = p$

Aufgabe: Sei $x > 0$. Richtig oder falsch?

a) $(\ln x)^4 = 4 \cdot \ln x$?

Falsch! Für $x = e$ gilt $(\ln e)^4 = 1^4 = 1$, aber $4 \cdot \ln e = 4 \cdot 1 = 4$

b) $\lg x = 2 \lg \sqrt{x}$?

Richtig! Nach Regel 3) gilt $2 \lg \sqrt{x} = \lg(\sqrt{x})^2 = \lg x$

c) $\ln x^{10} - \ln x^4 = 3 \cdot \ln x^2$

Richtig! Mit den Regeln 2) und 3) gilt

$$\ln x^{10} - \ln x^4 = \ln\left(\frac{x^{10}}{x^4}\right) = \ln x^6 = \ln(x^2)^3 = 3 \cdot \ln x^2$$

Beispiel: Im Jahre 1990 wurde das Bruttosozialprodukt (BSP) Chinas auf $1.2 \cdot 10^{12}$ \$ und die Wachstumsrate auf $r = 0.09$ geschätzt. Das BSP der USA wurde auf $5.6 \cdot 10^{12}$ \$ mit einer Wachstumsrate $s = 0.02$ geschätzt. Wir nehmen an, dass die BSP der beiden Länder in den Folgejahren mit den gleichen Raten wachsen. Wann wären die BSP der beiden Länder gleich groß?

BSP China zur Zeit t: $B_c(t) = 1.2 \cdot 10^{12} (1 + 0.09)^t$

BSP USA zur Zeit t: $B_u(t) = 5.6 \cdot 10^{12} (1 + 0.02)^t$

Gesucht: t^*, so dass $B_c(t^*) = B_u(t^*)$

$$1.2 \cdot 10^{12} \cdot 1.09^t = 5.6 \cdot 10^{12} \cdot 1.02^t$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1.09^t}{1.02^t} = \frac{5.6}{1.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1.09}{1.02}\right)^t = \ln\left(\frac{5.6}{1.2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln\left(\frac{5.6}{1.2}\right)}{\ln\left(\frac{1.09}{1.02}\right)}$$

Also ist das BSP nach $t^* = \dfrac{\ln\left(\frac{5.6}{1.2}\right)}{\ln\left(\frac{1.09}{1.02}\right)} \approx 23$ Jahren gleich groß.