# Grundzüge der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

**Wintersemester 2014/15**

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften, Arbeitsgruppe Optimierung & Approximation
Prof. Dr. M. Heilmann, T. Schnepper M.Sc., M. Milano M.Sc.

Bei den folgenden Aufgaben handelt es sich ausschließlich um Übungsaufgaben zur Wiederholung, die Sie während der vorlesungsfreien Zeit über den Jahreswechsel bearbeiten und lösen sollten. Die Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben zur Korrektur in ihrer Übung abzugeben. Ihre Lösungsvorschläge erhalten Sie dann im Laufe der nächsten Wochen korrigiert zurück. Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Abgabe mit Ihrem Namen und der zugehörigen Übungsgruppe versehen ist. Abgabetermin ist die erste Vorlesungswoche des neuen Jahres in der Übungsgruppe, für die Sie zugelassen wurden.

**Aufgabe 1**
Gegeben seien drei Vektoren aus $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linear unabhängig ist.

b) Überprüfen Sie, ob $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise senkrecht zueinander stehen.

c) Ergänzen Sie $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, wobei alle Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen.

**Aufgabe 2**

a) Überprüfen Sie mithilfe der Determinantenm, für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ die Matrix $A$ regulär bzw. singulär ist. Welche Aussagen können Sie in diesen Fällen über den Rang von $A$ machen?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 2 \\ 0 & -5 & 3 & a \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Invertieren Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 3**

a) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaft der quadratischen Form

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3.$$

b) Für welche Wahl des Parameters $b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & b & b \\ -2 & b & -3 \end{pmatrix}$$

negativ definit?

**Aufgabe 4**

a) Bestimmen Sie mit der Regel von L'Hospital den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{16x} + 3x - 1}{2x}$$

b) Begründen Sie, warum die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{16x} + 3x - 1}{2x} & , \text{ für } x > 0 \\ \dfrac{\frac{1}{3}x + 4c}{2} & , \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$$

mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig ist.

c) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

**Aufgabe 5**
Bestimmen Sie alle Nullstellen von $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$.

**Aufgabe 6**
Differenzieren Sie die folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^{-2}(x^3 + 1)\sqrt{x}$ b) $f(x) = (\ln(x^2 - 1))^2$ c) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(\sqrt{x})$

d) $f(t) = 4\left(\ln(t) + \sqrt{t}\right)^{101}$ e) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 5)}$ f) $f(x) = 8\,\mathrm{e}^{x^2 - \sqrt{x}}$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$ h) $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x}) + 2$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{3x + 1}}$

**Aufgabe 7**
Führen Sie für die folgenden Funktionen vollständige Kurvendiskussionen durch. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen.

$$\textbf{a)}\ f(x) = x^2 \cdot e^{-x}, \quad \textbf{b)}\ g(x) = x[\ln(x^2)]^2, \quad \textbf{c)}\ h(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5}$$

**Aufgabe 8**
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \left(\sqrt{w} + \sqrt[3]{w} + \frac{1}{\sqrt[5]{w}}\right) dw$ b) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int 4 \cdot e^{-2x + \frac{1}{2}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \ln(3t + 1)\,dt$ e) $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 8x + 2}{x^3 - 2x^2 + x + 30}\,dx$ f) $\displaystyle\int 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3 + 4}\,dx$

g) $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ i) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$

*Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten*

★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★ ⋆ ★

*und ein erfolgreiches Jahr 2015!*