8. Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Wir hatten bereits gesehen, dass bei der m-maligen Verzinsung mit einem jährlichen Zinssatz von p% und jeweils weiterer Mitverzinsung des Kapitals nach t Jahren das Kapital auf

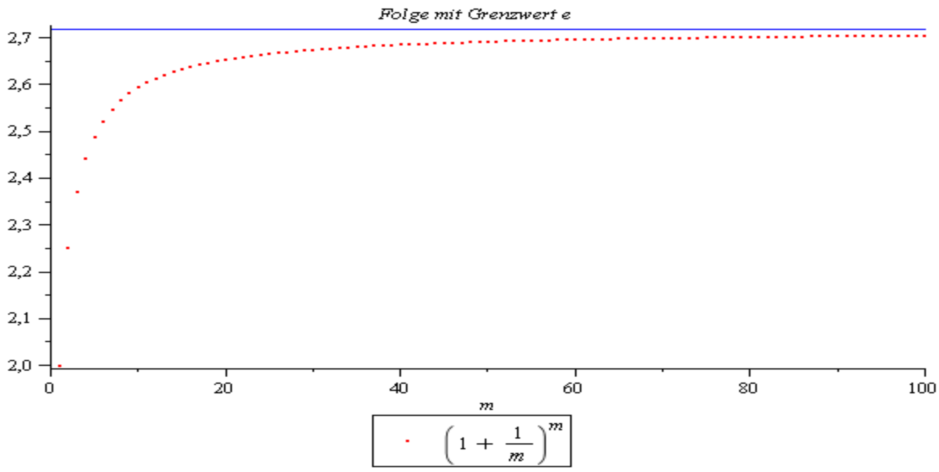
$$K_t = K_0\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^{m\cdot t}$$

angewachsen ist.

Für den Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ hatten wir festgehalten, dass

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 2{,}71828\ldots \quad \text{ist.}$$

Das bedeutet, dass sich der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für wachsende m dem Wert e nähert.



Diese Zusammenhänge wollen wir nun allgemeiner betrachten.

Definition: Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\} = f(n)$ ist eine Funktion, $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{N}$.

Man kann Folgen durch Angabe des Bildungsgesetzes (Funktionsvorschrift) oder durch Auflisten der Folgenglieder (Funktionswerte) angeben.

Beispiel: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Bei der Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ kann man beobachten, dass sich mit wachsendem n die Folgenglieder immer weniger von 0 unterscheiden,

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Allgemein halten wir fest:

Definition: Gegeben sei eine unendliche Folge $\{a_n\}$. Nähert sich a_n mit wachsendem n genau einer reellen Zahl G an, so heißt G der Grenzwert der Folge. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = G$$

und sagt, die Folge $\{a_n\}$ ist konvergent gegen G.

Hat die Folge keinen Grenzwert, so heißt sie divergent.

Beispiel: $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = -1, +1, -1, +1, \ldots$ ist divergent.

Die Folgenglieder wechseln zwischen den Werten -1 und $+1$.

$\{2^n\} = 2, 4, 8, 16, \ldots$ ist divergent. Mit wachsendem n werden die Folgenglieder immer größer, sie wachsen über jede beliebige Schranke. In einem solchen Fall schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

$\{-n^2\} = -1, -4, -9, -16, -25, \ldots$ ist divergent. Mit wachsendem n fallen die Folgenglieder unter jede beliebige Schranke und man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty$.

Bevor wir uns mit einigen, für Anwendungen wichtige Folgen beschäftigen, fassen wir noch einige Rechenregeln für Grenzwerte zusammen.

Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G_a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = G_b$ mit $G_a, G_b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot G_a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = G_a + G_b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = G_a - G_b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = G_a \cdot G_b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{G_a}{G_b}, \text{ falls } G_b \neq 0.$$

Wir befassen uns nun mit zwei Typen von Folgen, deren Bildungsgesetze eine bestimmte festgelegte Struktur aufweisen.

Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt arithmetisch, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, d.h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{mit } d \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich also stets um eine additive Konstante.

Beispiel: Lineare Abschreibung

Eine Maschine wird für 25 000 € angeschafft. Es wird angenommen, dass der Wertverlust jährlich jeweils 10% ihres Anschaffungswertes beträgt. Der Restwert veringert sich also jedes Jahr um 2500 €. Bezeichnen wir mit R_n den Restwert nach n Jahren, so erhalten wir:

$R_0 = 25000$, $R_1 = 22500$, $R_2 = 20000$, $R_3 = 17500$, $R_4 = 15000$, $R_5 = 12500$, $R_6 = 10000$, $R_7 = 7500$, $R_8 = 5000$, $R_9 = 2500$, $R_{10} = 0$.

Dies ist eine (endliche) arithmetische Folge $\{R_n\}_{n=0}^{10}$ mit

$$R_{n+1} = R_n - 2500, \quad n = 0, \dots, 9.$$

Definition: Eine Folge $\{a_n\}$ heißt geometrisch, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist, d.h. wenn gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{mit } q \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Aufeinanderfolgende Folgenglieder unterscheiden sich also stets um eine multiplikative Konstante.

Beispiel: Die Zinseszinsformel $K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n$ definiert eine geometrische Folge $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $K_{n+1} = K_n\,(1+\frac{p}{100})$.

Aus der Definition kann man direkt den folgenden Aufbau einer geometrischen Folge ablesen.

$a_1,\ a_2 = a_1\cdot q,\ a_3 = a_2\cdot q = a_1\cdot q^2,\ a_4 = a_3\cdot q = a_1\cdot q^3, \ldots,$

d.h. allgemein: $a_{n+1} = a_1\cdot q^n$.

Wir machen uns nun Gedanken über das Konvergenzverhalten von $\{q^n\}$.

Beispiel:

$\{0.1^n\} = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, \ldots$

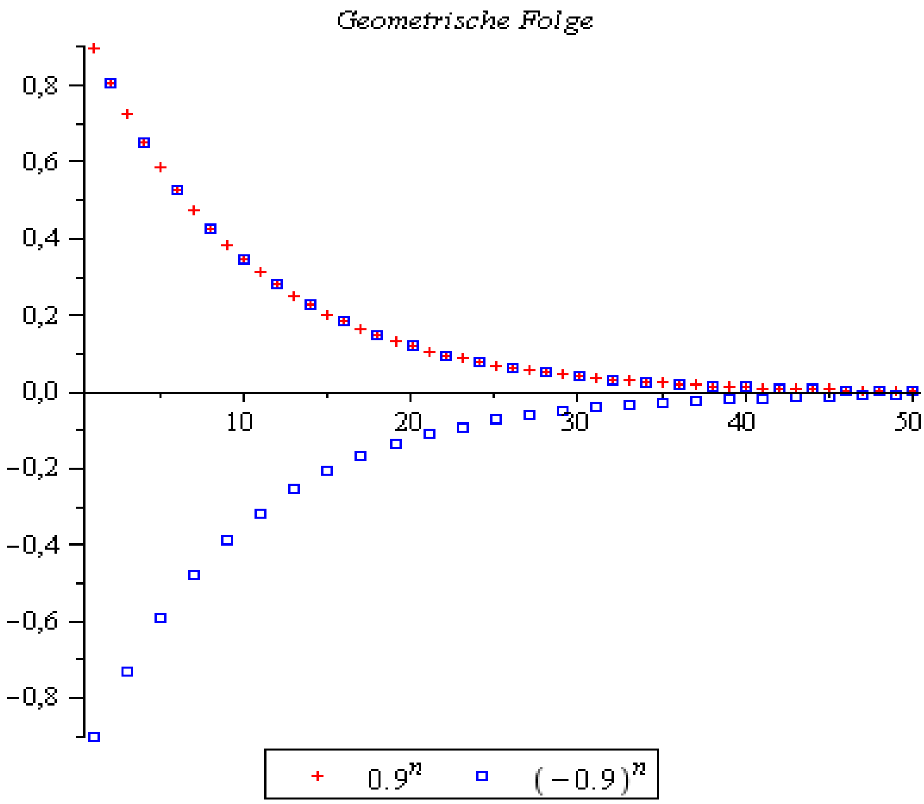
$\{0.9^n\} = 0.9, 0.81, 0.729, 0.6251, 0.59049, \ldots$ $(0.9^{25} = 0.071789\ldots)$

$\{1.1^n\} = 1.1, 1.21, 1.331, 1.4641, 1.61051, \ldots$ $(1.1^{25} = 10.834705\ldots)$

$\{(-0.1)^n\} = -0.1, 0.01, -0.001, 0.0001, -0.00001, \ldots$

$\{(-0.9)^n\} = -0.9, 0.81, -0.729, 0.6251, -0.59049, \ldots$

$\{(-1.1)^n\} = -1.1, 1.21, -1.331, 1.4641, -1.61051, \ldots$



Die Beispiele untermauern folgende allgemeine Aussage.

Satz: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, falls $q \notin (-1, 1]$.

In vielen, insbesondere auch finanzmathematischen Anwendungen, wie z.B. bei der Berechnung von Annuitäten oder Hypothekenrückzahlungen stößt man auf geometrische Summen oder Reihen. Diese werden aus den Gliedern geometrischer Folgen gebildet.

Definition: Summiert man die ersten n Glieder einer geometrischen Folge $\{q^m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ auf, so erhält man

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j.$$

S_n heißt geometrische Summe.

Beispiel: Ein Unternehmer erwartet in diesem Jahr einen Umsatz von 10 Millionen €. Nach einer Prognose für die nächsten 9 Jahre sind Umsatzsteigerungen von 5% pro Jahr im Vergleich zum Vorjahr zu erwarten. Welcher Gesamtumsatz wird in den betrachteten 10 Jahren insgesamt erwartet? Der Gesamtumsatz lässt sich mittels einer geometrischen Summe darstellen:

$$10 + 10(1+0.05) + 10(1+0.05)^2 + \dots + 10(1+0.05)^9$$

$$= 10(1 + 1.05 + 1.05^2 + \dots + 1.05^9) = 10 \cdot \sum_{j=0}^{9} 1.05^j \approx 10 \cdot 12.58$$

Je mehr Summanden vorkommen, desto mühseliger ist es, alle Summanden einzeln zu berechnen und anschließend zu addieren. Wir überlegen daher, wie man für geometrische Summen eine einfache Berechnungsformel angeben kann.

Für $q = 1$ ist dies ganz einfach, denn

$$\sum_{j=0}^{n-1} 1^j = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = n$$

Für $q \neq 1$ berechnen wir:

$$\left.\begin{array}{rl} S_n = & 1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} \\ q \cdot S_n = & \quad\;\; q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} + q^n \end{array}\right\} -$$

$$(1-q)\, S_n = 1 \qquad\qquad\qquad - q^n$$

Nun gilt, da $q \neq 1$: $(1-q) S_n = 1 - q^n \iff S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Insgesamt halten wir fest die

Formel für geometrische Summen

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

Beispiel: Xaver Fidelius möchte für die Zukunft vorsorgen und überlegt sich folgendes Modell: Über einen Zeitraum von 20 Jahren will er jeweils zu Jahresbeginn 1000€ anlegen, die am Jahresende mit 3% verzinst werden. Die Zinsen werden dem Kapital zugeschlagen. Wie viel hat er nach 20 Jahren gespart?

Das Kapital nach 20 Jahren beträgt:

$$1000(1+0.03)^{20} + 1000(1+0.03)^{19} + 1000(1+0.03)^{18} + \ldots + 1000(1+0.03)$$

$$= 1000\{1.03 + 1.03^2 + \ldots + 1.03^{19} + 1.03^{20}\}$$

$$= 1000 \cdot 1.03 \sum_{j=0}^{19} 1.03^j = 1030 \cdot \frac{1 - 1.03^{20}}{1 - 1.03} \approx 27676.49$$

In manchen Zusammenhängen ist es wichtig zu wissen, was passiert, wenn die Summation nicht bei einer festen Zahl aufhört, sondern beliebig fortgesetzt wird. Dies ist gleichbedeutend mit der Fragestellung, unter welchen Bedingungen der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + q + q^2 + \ldots$$

existiert und was gegebenenfalls herauskommt.

Für $q=1$ ist $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, d.h. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist divergent.

Für $-1<q<1$ gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, da $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$,

d.h. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist konvergent mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-q}$.

Für $q\in(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$ ist $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

Statt $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} q^j$ schreibt man auch $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ und spricht von der geometrischen Reihe.

Für die geometrische Reihe gilt also: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$, falls $-1<q<1$.

Beispiel: Eine Schätzung der Ölreserven eines Landes belaufe sich im Jahr 2010 auf 12.5 Milliarden Tonnen. Die Förderung in 2010 betrage 250 Millionen Tonnen. Die Fördermenge soll künftig um p% im Vergleich zum Vorjahr gesenkt werden. Wie groß muss p mindestens sein, damit die Ölreserven (theoretisch) für einen beliebig langen Zeitraum ausreichen?

Wir können davon ausgehen, dass $0<p<100$,

d.h. $0<\frac{p}{100}<1 \Leftrightarrow 0<1-\frac{p}{100}<1$ gilt.

Es soll also gelten:

$$\underbrace{250\cdot10^6}_{\substack{\text{Fördermenge}\\2010}}+\underbrace{250\cdot10^6\left(1-\tfrac{p}{100}\right)}_{\substack{\text{Fördermenge}\\2011}}+\underbrace{250\cdot10^6\left(1-\tfrac{p}{100}\right)^2}_{\substack{\text{Fördermenge}\\2012}}+\underbrace{\ldots\ldots}_{\ldots\ldots}\le\underbrace{12.5\cdot10^9}_{\text{Gesamtreserve}}$$

$$\Leftrightarrow\quad 250\cdot10^6\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\left(1-\tfrac{p}{100}\right)^j}_{=\frac{1}{1-\left(1-\frac{p}{100}\right)}=\frac{100}{p}}\le125\cdot10^8$$

Geometrische Summe mit $q=1-\frac{p}{100}$

$$\Leftrightarrow\quad 250\cdot10^6\cdot\frac{100}{p}\le125\cdot10^8$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\overset{2}{\cancel{250}}\cdot\cancel{10^6}}{\cancel{125}\cdot\cancel{10^8}}\cdot\cancel{100}\le p$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\le p$$

Die Fördermenge muss also jährlich um mindestens 2% gedrosselt werden, damit die Ölreserven (theoretisch) beliebig lange reichen.

Wir wenden uns nun dem Grenzwertbegriff für reelle Funktionen zu. Es handelt sich dabei um einen der zentralen Begriffe, ohne den sich wichtige Eigenschaften von Funktionen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit nicht vernünftig erklären lassen.

Beispiel: Gegeben sei die rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Wir untersuchen, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ verhalten, wenn x in der Nähe von 1 liegt.

x	0.9	0.99	0.999	...	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.71	2.9701	2.997001	...	3.003001	3.121	3.31

Die Tabelle legt nahe, dass bei immer weiterer Annäherung von x an den Wert 1 der Funktionswert immer näher an 3 heranrückt. Schaut man sich den Funktionsterm genauer an, so stellt man fest, dass $x=1$ nicht nur eine Nullstelle des Nenners, sondern auch des Zählers ist. Mittels Polynomdivision kann man den Zähler faktorisieren.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 1) : (x-1) = x^2 + x + 1 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad x^2 - 1 \\
\quad \underline{x^2 - x} \\
\qquad x - 1 \\
\qquad \underline{x - 1} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also gilt: $x^3 - 1 = (x^2+x+1)\cdot(x-1)$

und damit $f(x) = \frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}$

Daraus lässt sich nun der Grenzwert für x gegen 1 wie folgt bestimmen:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Wir fassen nun den Grenzwertbegriff mathematisch genauer.

Definition: Seien f eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $(x_0-\varepsilon, x_0) \subseteq \mathbb{D}_f$ und $(x_0, x_0+\varepsilon) \subseteq \mathbb{D}_f$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

(Das bedeutet, dass die Funktion mindestens in einem kleinen Bereich um x_0 definiert sein soll. x_0 selbst muss nicht im Definitionsbereich liegen.)

Streben nun zu beliebigen Folgen $\{x_n\}$, die von links oder von rechts immer näher an x_0 heranrücken, die zugehörigen Funktionswerte $f(x_n)$ gegen eine Zahl G, dann heißt G Grenzwert oder Limes von f für x gegen x_0. Man schreibt dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G.$$

Betrachtet man nur die Näherung von rechts bzw. links an die Stelle x_0, so spricht man vom rechtsseitigen Grenzwert G_R bzw. vom linksseitigen Grenzwert G_L und schreibt dann

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = G_R \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = G_L.$$

Stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert überein, d.h. gilt $G_R = G_L = G$, dann gilt auch insgesamt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = G$.

Die Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen sind analog zu denen für Folgen.

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Seien f und h Funktionen mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = G_f$ und $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = G_h$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot G_f$$

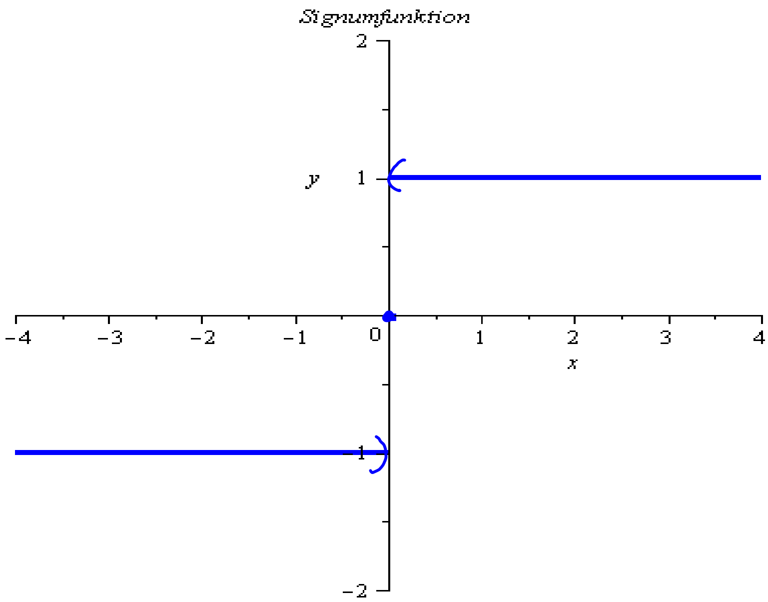
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} h(x) = G_f + G_h$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - h(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} h(x) = G_f - G_h$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} h(x) = G_f \cdot G_h$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} h(x)} = \frac{G_f}{G_h}, \text{ falls } G_h \neq 0.$$

Beispiel: Sei $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ die Signumfunktion.



Hier gilt:

$\lim_{x \to x_0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sgn}(x) = -1$

links- und rechtsseitiger Grenzwert für x gegen 0 stimmen nicht überein. Der Grenzwert $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht!

Außerdem sind die einseitigen Grenzwerte auch noch von dem Funktionswert an der Stelle 0 verschieden. "Man kann die Signumfunktion nicht zeichnen, ohne den Stift abzusetzen."

Man sagt auch: Die Signumfunktion ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.

Häufig werden stetige Funktionen dadurch "beschrieben", dass man ihre Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Dieser sehr anschauliche Beschreibungsversuch ist allerdings unter mathematischen Gesichtspunkten unzureichend. Wir definieren daher den Begriff der Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten.

Definition: Seien $f(x)$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{D}_f$. f heißt stetig in x_0, wenn gilt, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 übereinstimmen,

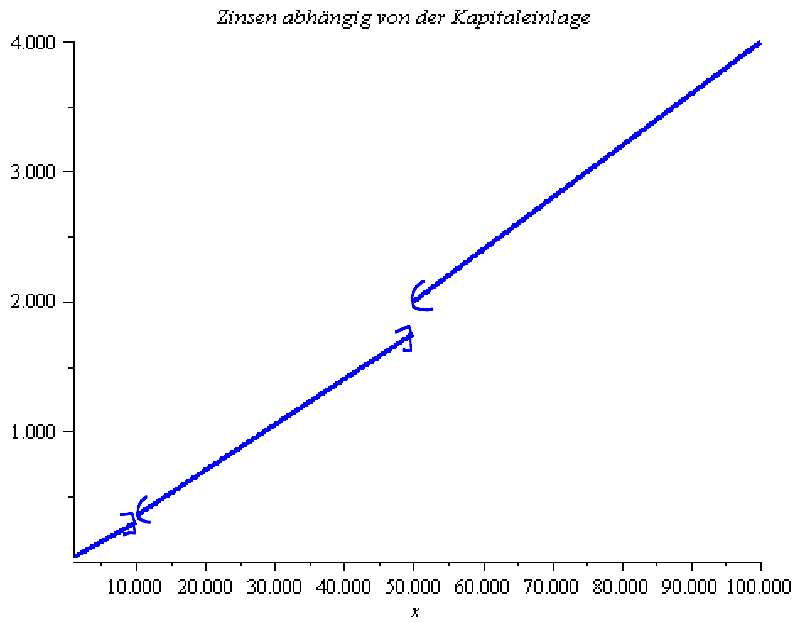
d.h. kurz $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Beispiel: Für Kapitaleinlagen von 1000 € bis 100000 € mit einem Anlagezeitraum von 1 Jahr bietet eine Bank folgende Konditionen an.

Für eine Einlage bis 10 000 € : 3% Jahreszins
über 10 000 € bis 50 000 € : 3.5% Jahreszins
über 50000 € bis 100 000 € : 4.0% Jahreszins

Darstellung der am Jahresende fälligen Zinsen in Abhängigkeit von der Einlage x:

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot 0.03, & 1000\le x\le 10000 \\ x\cdot 0.035, & 10000< x\le 50000 \\ x\cdot 0.04, & 50000< x\le 100000 \end{cases}$$



Hier hat der Graph der Funktion offensichtlich Sprungstellen bei x = 10000 und x = 50000. Bei einer anderen Funktion könnten solche Sprungstellen aber auch kleiner und somit "unsichtbar" ausfallen.

Wir untersuchen das Grenzverhalten bzgl. x = 10000 und x = 50000.

$$\lim_{x\to 10000^-} f(x) = \lim_{x\to 10000^-} x\cdot 0.03 = 300$$

$$\lim_{x\to 10000^+} f(x) = \lim_{x\to 10000^+} x\cdot 0.035 = 350$$

$$\lim_{x\to 50000^-} f(x) = \lim_{x\to 50000^-} x\cdot 0.035 = 1750$$

$$\lim_{x\to 50000^+} f(x) = \lim_{x\to 50000^+} x\cdot 0.04 = 2000$$

Prinzipiell können Unstetigkeitsstellen einen sehr unterschiedlichen Charakter haben, z.B. Sprungstellen, Polstellen, Definitionslücken.

Wir halten fest, dass die in Kapitel I vorgestellten Grundfunktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig sind, d.h. an allen Stellen ihres Definitionsbereichs.

Außerdem sind Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig auf dem jeweiligen Definitionsbereich.

Beispiel: Wir betrachten $f(x)=e^x$, $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$ und $g(x)=\sqrt{x}$, $\mathbb{D}_g=\mathbb{R}_+$.

Beide Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig. Somit ist die verkettete Funktion

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{\sqrt{x}}$ stetig für alle $x\in\mathbb{D}_{f\circ g}=\mathbb{R}_+$.

Wir beenden das Kapitel mit der exemplarischen Berechnung einiger Grenzwerte, die einige der üblichen Vorgehensweisen demonstrieren.

Beispiel: $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3-9x^2+23x-12}{x^2+8x+15}$. Was ist $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$?

Einsetzen von $x=-3$ in das Zählerpolynom liefert

$(-3)^4-3\cdot(-3)^3-9\cdot(-3)^2+23\cdot(-3)-12=0$

und $x=-3$ in das Nennerpolynom $(-3)^2+8\cdot(-3)+15=0$.

Zähler- und Nennerpolynom haben also beide an der Stelle $x=-3$ eine Nullstelle. Mit Polynomdivision berechnet man:

$$
\begin{array}{l}
(x^4-3x^3-9x^2+23x-12):(x+3)=x^3-6x^2+9x-4\\
\underline{x^4+3x^3}\\
\quad -6x^3-9x^2\\
\quad \underline{-6x^3-18x^2}\\
\qquad\quad 9x^2+23x\\
\qquad\quad \underline{9x^2+27x}\\
\qquad\qquad -4x-12\\
\qquad\qquad \underline{-4x-12}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also: $x^4-3x^3-9x^2+23x-12$

$=(x^3-6x^2+9x-4)\cdot(x+3)$

$$
\begin{array}{l}
(x^2+8x+15):(x+3)=x+5\\
\underline{x^2+3x}\\
\quad 5x+15\\
\quad \underline{5x+15}\\
\qquad 0
\end{array}
$$

Also: $x^2+8x+15=(x+5)\cdot(x+3)$

Damit findet man $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x^3-6x^2+9x-4)\cdot\cancel{(x+3)}}{(x+5)\cdot\cancel{(x+3)}}$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x^3-6x^2+9x-4}{x+5} = \frac{-112}{2} = -56$$

Beispiel:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+2}-\sqrt{h})(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}{2h(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h+2-2}{2h(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{2\cancel{h}(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to \frac{4}{9}} \dfrac{16-81x^2}{3\sqrt{x}-2}$

Mit der dritten binomischen Formel gilt:

$$16-81x^2 = (4+9x)(4-9x) = (4+9x)(2+3\sqrt{x})(2-3\sqrt{x})$$

Somit folgt:

$$\lim_{x\to \frac{9}{4}} \frac{16-81x^2}{3\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to \frac{9}{4}} \frac{(4+9x)(2+3\sqrt{x})\cancel{(2-3\sqrt{x})}}{-\cancel{(2-3\sqrt{x})}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{9}{4}} (-1)(4+9x)(2+3\sqrt{x})$$

$$= (-1)\cdot 8\cdot 4 = -32$$