3. Vektoren

Im letzten Kapitel hatten wir bereits bei Matrizen mit nur einer Zeile bzw. bei Matrizen mit nur einer Spalte in Klammern die Begriffe Zeilenvektor bzw. Spaltenvektor verwendet. Beide werden wir auch als Vektoren bezeichnen. Wir bezeichnen Vektoren in der Regel mit kleinen Buchstaben mit einem Pfeil darüber.

Für einen Spaltenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Der zugehörige transponierte Vektor ist dann der Zeilenvektor $\vec{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen Komponenten oder auch Koordinaten des Vektors. Insbesondere Vektoren des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ haben recht anschauliche geometrische Interpretationen, mit denen wir uns im Anschluss an die Rechenoperationen beschäftigen wollen.

Rechenoperationen für Vektoren

Da wir hier Vektoren als spezielle Typen von Matrizen behandeln, gelten die für Matrizen angegebenen Rechenoperationen auch für Vektoren. Zur Übersicht fassen wir dies für die spezielle Situation noch einmal zusammen.

a) Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sind gleich, wenn sie in ihren jeweiligen Komponenten übereinstimmen, d.h. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_i = b_i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ werden addiert (subtrahiert), indem die jeweiligen Komponenten addiert (subtrahiert) werden, d.h.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

c) Ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ wird mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jede Komponente mit α multipliziert wird.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: Ein Unternehmen verkauft 5 verschiedene Güter. Die Preise in Euro sind in dem Preisvektor $\vec{p}^T = (7.00, 3.00, 9.00, 4.00, 2.00)$ gegeben, wobei $p_i, i = 1, 2, \ldots, 5$, den Preis für das i-te Gut bezeichnet. Es wird nun folgende Preiserhöhung beschlossen. Bei allen Gütern mit einem Preis bis zu 5€ werden die Preise um jeweils 0.30 € erhöht, bei denen ab 5€ um 0.50€. Weiter werden auf den ursprünglichen Preis noch 5% aufgeschlagen. Der Preisvektor mit den neuen Preisen berechnet sich somit zu:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)\begin{pmatrix}7.00\\3.00\\9.00\\4.00\\2.00\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.50\\0.30\\0.50\\0.30\\0.30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7.35\\3.15\\9.45\\4.20\\2.10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.50\\0.30\\0.50\\0.30\\0.30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7.85\\3.45\\9.95\\4.50\\2.40\end{pmatrix}$$

Das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren

Bei der Übertragung der Rechenoperation zweier Matrizen erinnern wir uns zunächst daran, dass das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

Ist A nun speziell eine $(1 \times n)$-Matrix (d.h. ein Zeilenvektor), so können wir mit einer $(n \times 1)$-Matrix (d.h. einem Spaltenvektor) und auch umgekehrt multiplizieren, d.h.

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix}b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n\\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

bzw.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

Im Zusammenhang mit Vektoren führt das zweite Produkt auf die Definition des inneren Produktes bzw. Skalarproduktes zweier Vektoren.

Definition: Seien $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Dann ist das **innere Produkt (Skalarprodukt)** $<\vec{a},\vec{b}>$ definiert durch

$$<\vec{a},\vec{b}> = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Achtung! Das innere Produkt zweier Vektoren ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl!

Beispiel: Der Preisvektor $\vec{p}^T = (3.20, 2.90, 4.10, 3.50, 5.20)$ gebe die Preise in € pro kilo für verschiedene Obstsorten an. In dem Warenvektor $\vec{x}^T = (0.5, 1.5, 2.2, 0.7, 3.5)$ sind die gekauften Mengen in kg angegeben. Das innere Produkt $<\vec{p},\vec{x}>$ gibt somit den für die Waren insgesamt zu zahlenden Preis an:

$$<\vec{p},\vec{x}> = <\begin{pmatrix}3.20\\2.90\\4.10\\3.50\\5.20\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.5\\1.5\\2.2\\0.7\\3.5\end{pmatrix}> = 3.20\cdot 0.5 + 2.90\cdot 1.5 + 4.10\cdot 2.2 + 3.50\cdot 0.7 + 5.20\cdot 3.5$$

$$= 35.62$$

Rechenregeln für das innere Produkt

Seien $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$ und $\vec{0}\in\mathbb{R}^n$ derjenige Vektor, dessen Komponenten alle Null sind. Dann gilt:

a) $<\vec{a},\vec{b}> = <\vec{b},\vec{a}>$

b) $<\vec{a},\vec{b}+\vec{c}> = <\vec{a},\vec{b}> + <\vec{a},\vec{c}>$

c) $<\alpha\vec{a},\vec{b}> = <\vec{a},\alpha\vec{b}> = \alpha\cdot<\vec{a},\vec{b}>$

d) $<\vec{a},\vec{a}> > 0 \iff \vec{a}\neq\vec{0}$

Begründung

zu a) $<\vec{a},\vec{b}> = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = <\vec{b},\vec{a}>$

zu b) $<\vec{a},\vec{b}+\vec{c}> = \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i+c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = <\vec{a},\vec{b}> + <\vec{a},\vec{c}>$

zu c) $<\alpha\vec{a},\vec{b}> = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) b_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha b_i)}_{=<\vec{a},\alpha\vec{b}>} = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \alpha<\vec{a},\vec{b}>$

zu d) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \iff a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0 \iff a_i \neq 0$ für mindestens ein i

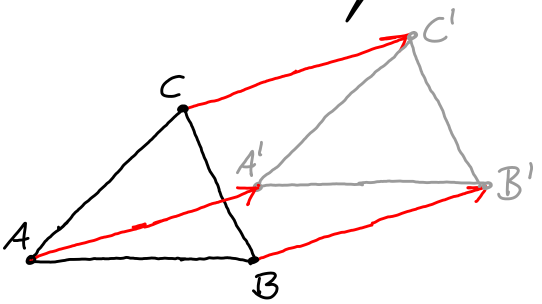
$\iff \vec{a} \neq \vec{0}$

Geometrische Interpretation von Vektoren

Im Folgenden wollen wir uns zunächst mit der geometrischen Interpretation von Vektoren befassen. Dazu beachten wir zunächst, dass die Angabe bestimmter Größen wie Kraft und Geschwindigkeit nicht nur die Angabe einer skalaren Größe (Zahl) erfordern, sondern auch die Angabe einer Richtung. Anschaulich entspricht dies einem Pfeil mit einer bestimmten Länge und einer bestimmten Richtung.

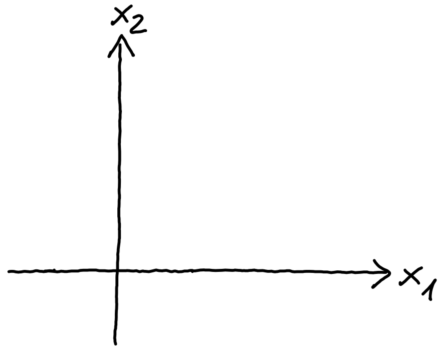
Alle Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung werden zu einem Vektor zusammengefasst. Jeder Pfeil eines Vektors heißt Repräsentant des Vektors. "Wenn man einen kennt, dann kennt man alle"!

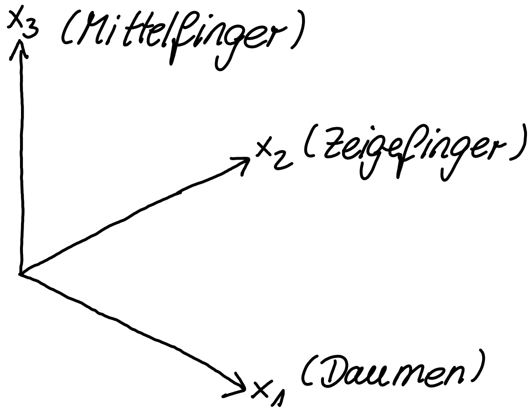
Anschaulich entsprechen Vektoren z.B. Verschiebungen.



Die Punkte A, B, C heißen Angriffspunkte, die Punkte A', B', C' heißen Zielpunkte des Vektors

Vektoren lassen sich mit Hilfe rechtwinkliger Koordinatensysteme veranschaulichen. Im $\mathbb{R}^2$ verwendet man das Koordinatensystem mit Achsen x_1, x_2, die senkrecht aufeinander stehen. Im $\mathbb{R}^3$ benutzt man sogenannte rechtshändige Systeme, d.h. die jeweils senkrecht aufeinander stehenden Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3 werden in der gleichen Reihenfolge gewählt, wie Daumen, Zeige-, Mittelfinger der rechten Hand.

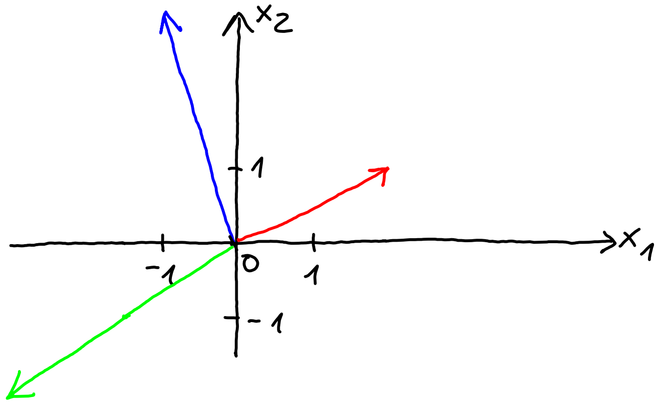




Pfeile mit Angriffspunkt im Nullpunkt heißen Ortsvektoren. Dadurch wird ein bestimmter Repräsentant eines Vektors festgelegt. Die Festlegung eines Vektors geschieht daher durch die Angabe der Koordinaten des Zielpunktes des Ortsvektors.

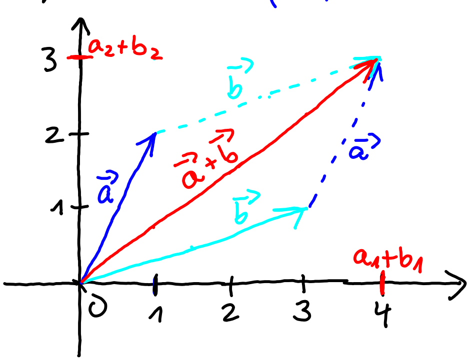
Beispiel: Zeichnen der Ortsvektoren

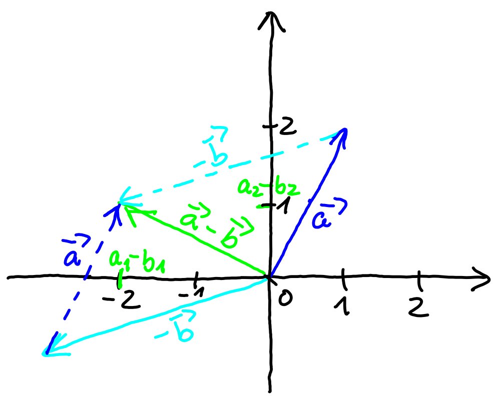
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$



Wir können nun die Addition und Subtraktion von Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar geometrisch veranschaulichen.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

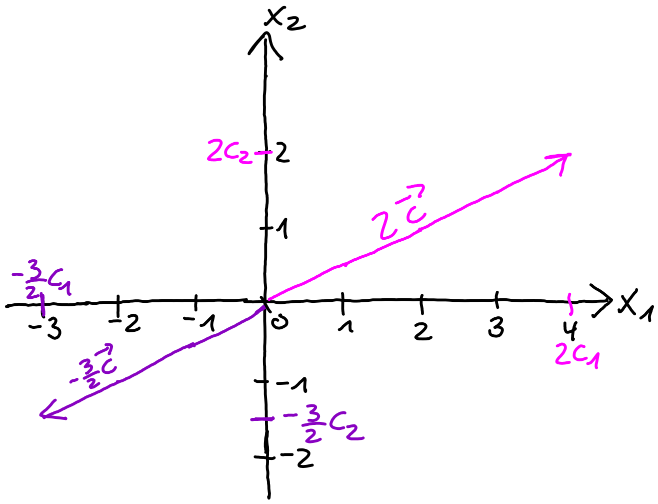




$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2 \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$-\frac{3}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$



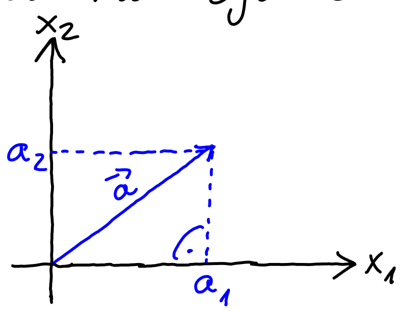
Ist $\alpha > 0$, so ist $\alpha \cdot \vec{a}$ der Vektor mit derselben Richtung wie $\vec{a}$, dessen Länge das α-fache der Länge von $\vec{a}$ beträgt. Ist $\alpha < 0$, so ist $\alpha \cdot \vec{a}$ der Vektor mit entgegengesetzter Richtung wie $\vec{a}$, dessen Länge das $(-\alpha)$-fache der Länge von $\vec{a}$ beträgt.

Die bisherigen geometrischen Interpretationen für die Rechenoperationen lassen sich (dann allerdings nicht mehr anschaulich) für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Dies führt im Ergebnis auf die bereits zu Beginn des Kapitels angegebenen Definitionen.

Im Folgenden werden wir uns mit der Länge (Betrag, Norm) eines Vektors und dem Begriff der Orthogonalität beschäftigen. Dazu erläutern wir den Sachverhalt zunächst im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ und verallgemeinern dann die Begriffe auf den $\mathbb{R}^n$.

Betrag (Länge, Norm) eines Vektors

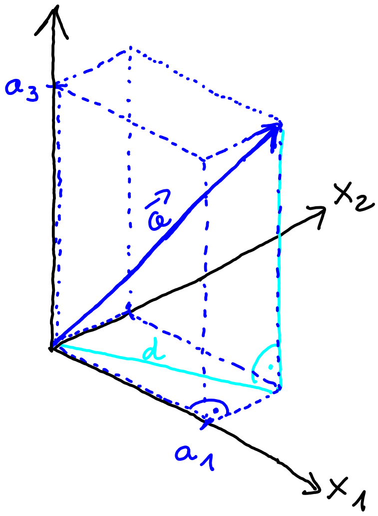
Unter dem Betrag (der Länge, der Norm) $\|\vec{a}\|$ eines Vektors $\vec{a}$ versteht man den Abstand des Zielpunktes des Ortsvektors zum Ursprung des Koordinatensystems.



Im $\mathbb{R}^2$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$, also $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



Im $\mathbb{R}^3$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt zunächst für die Diagonale d des Rechtecks in der x_1x_2-Ebene: $d^2 = a_1^2 + a_2^2$

Ebenfalls nach Pythagoras gilt für das rechtwinklige Dreieck  :

$$\|\vec{a}\|^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \text{, also}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist $\|\vec{a}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Der Betrag von $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist $\|\vec{b}\| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$.

Die anschauliche Herleitung und Interpretation wird nun folgendermaßen verallgemeinert.

Definition: Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist der Betrag (die Länge, die Norm) von $\vec{a}$ definiert durch

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right\}^{1/2}$$

Der Betrag eines Vektors steht mit dem inneren Produkt eines Vektors in folgender Beziehung:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \|\vec{a}\|^2$$

Weiter gelten für den Betrag eines Vektors Gesetze, die völlig analog zu denen für den Betrag einer reellen Zahl sind.

Rechengesetze für den Betrag eines Vektors

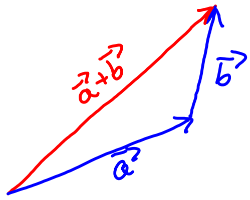
Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) $\|\vec{a}\| \geq 0$ und $(\|\vec{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0})$ (Positivität)

b) $\|\alpha \vec{a}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\|$ (Homogenität)

c) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Dreiecksungleichung)

Während a) und b) direkt aus der Definition folgen, machen wir uns c) anschaulich im $\mathbb{R}^2$ klar.



Anschaulich ist klar, dass die Länge des Summenvektors $\vec{a}+\vec{b}$ höchstens gleich der Summe der Längen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Anschaulich ist auch klar, dass das Gleichheitszeichen in c) genau dann angenommen wird, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, d.h. wenn $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b}$ ist für ein $\alpha\in\mathbb{R}$.

Eine besondere Bezeichnung erhalten Vektoren, deren Betrag gleich 1 ist. Sie heißen Einheitsvektoren.

Ist $\vec{a}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$, so erhält man den Einheitsvektor $\vec{a}^{\,0}$ in Richtung durch: $\quad \vec{a}^{\,0}=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\cdot\vec{a}$

Denn: $\vec{a}^{\,0}$ hat die Richtung von $\vec{a}$, da $\frac{1}{\|\vec{a}\|}>0$ gilt.

Für den Betrag von $\vec{a}^{\,0}$ gilt:

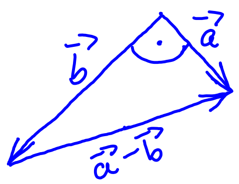
$$\|\vec{a}^{\,0}\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}a_i^2\right\}^{1/2}=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right\}^{1/2}=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\cdot\|\vec{a}\|=1$$

Beispiel: Sei $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Es gilt: $\|\vec{a}\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Also ist $\vec{a}^{\,0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$.

Sei $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Dann ist $\|\vec{b}\|=\sqrt{16+4+1+9}=\sqrt{30}$; $\vec{b}^{\,0}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Orthogonalität von Vektoren. Wir überlegen zunächst wieder im Anschauungsraum, wie sich die Orthogonalität zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ charakterisieren lässt.



Nach dem Satz von Pythagoras ist der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel genau dann ein rechter Winkel, wenn gilt $\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2=\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$.

Da $\|\vec{a}\|^2=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle$, $\|\vec{b}\|^2=\langle\vec{b},\vec{b}\rangle$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle-2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+\langle\vec{b},\vec{b}\rangle$, ist dies äquivalent zu $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle+\langle\vec{b},\vec{b}\rangle=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle-2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+\langle\vec{b},\vec{b}\rangle$, also äquivalent zu $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$.

Wenn zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen rechten Winkel einschließen, nennt man sie orthogonal. Dies wird für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ allgemein nun so formuliert.

Definition: Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen orthogonal, wenn ihr inneres Produkt den Wert 0 hat, d.h.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Beispiel: Welche der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal?

Wir berechnen die inneren Produkte

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$, $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$,

$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

Also gilt: $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$; $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht orthogonal.

Beispiel: Wir betrachten die speziellen Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$. Die beiden Einheitsvektoren zeigen in Richtung der beiden Koordinatenachsen und es gilt:

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$, d.h. $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$.

Entsprechend zeigen im $\mathbb{R}^3$ die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung der Koordinatenachsen.

Da $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = 0$, falls $i \neq k$, gilt: $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$.

Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis

Im Folgenden werden wir uns mit einigen sehr zentralen Begriffen der Linearen Algebra befassen. Wir werden dabei so vorgehen, dass wir die Sachverhalte zunächst (anschaulich) im $\mathbb{R}^2$ erläutern, um dann entsprechende Verallgemeinerungen im $\mathbb{R}^n$ anzugeben.

Nach Einführung der Rechenoperationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar zu Beginn dieses Kapitels können wir nun zu

m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ und m reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m$$

bilden. Einen solchen Ausdruck nennt man Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$.

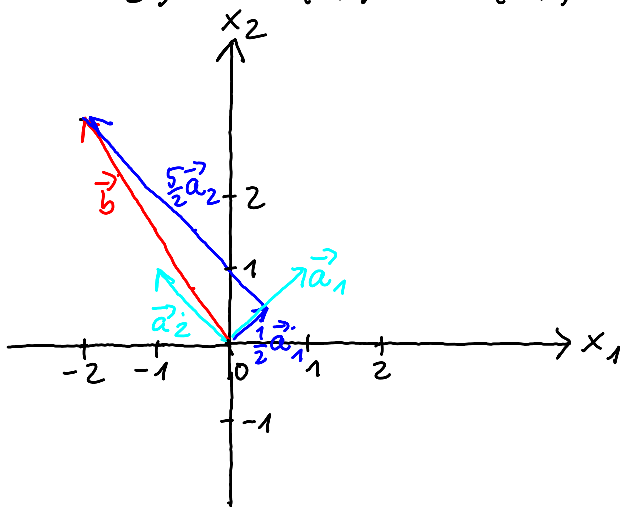
Gibt es für einen Vektor $\vec{b}$ reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, so dass

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i$$

gilt, so heißt $\vec{b}$ aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ linear kombinierbar. Man sagt auch, $\vec{b}$ lässt sich als Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ darstellen.

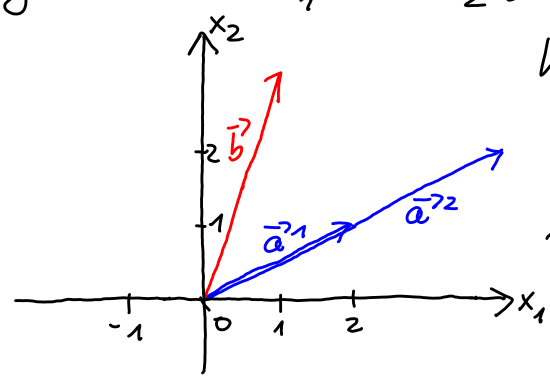
Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist keine Linearkombination von $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Egal wie man $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear kombiniert, es kommt immer ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ heraus, da wegen $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$



$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = (\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot \vec{a}_1$$

Da $\vec{b}$ aber kein skalares Vielfaches von $\vec{a}_1$ ist, ist $\vec{b}$ nicht als Linearkombination von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ darstellbar.

Beispiel: Der Nullvektor $\binom{0}{0}$ ist sowohl Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = \binom{1}{3}$, $\vec{a}_2 = \binom{3}{1}$, als auch der Vektoren $\vec{c}_1 = \binom{2}{1}$ und $\vec{c}_2 = \binom{-4}{-2}$.

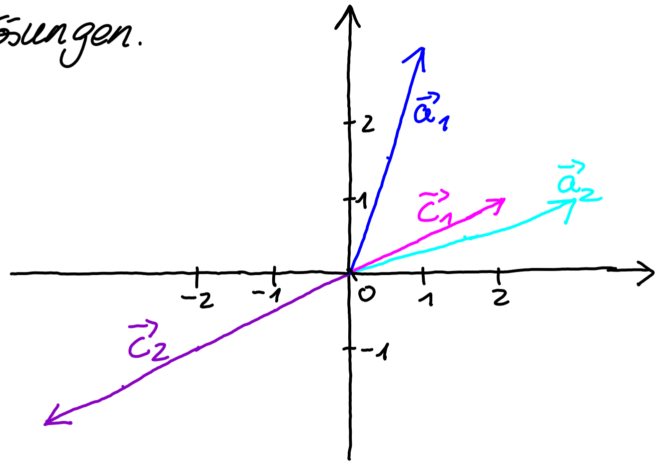
Bei den beiden Fällen besteht jedoch ein wesentlicher, grundsätzlicher Unterschied.

1) $\alpha_1 \binom{1}{3} + \alpha_2 \binom{3}{1} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Es gibt nur eine Lösung, nämlich $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; die sogenannte triviale Lösung.

2) $\alpha_1 \binom{2}{1} + \alpha_2 \binom{-4}{-2} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2$

Es gibt unendlich viele Lösungen; neben der trivialen Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sind auch alle Kombinationen von α_1 und α_2, für die $\alpha_1 = 2\alpha_2$ ist, Lösungen.



Die Überlegungen in den letzten Beispielen führen auf einen wichtigen Begriff in der Linearen Algebra, nämlich der Linearen Unabhängigkeit, den wir zunächst für Vektoren im $\mathbb{R}^2$ angeben wollen.

Definition: m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\binom{0}{0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i$ nur die triviale Lösung, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ besitzt.

Gibt es außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen, so heißen sie linear abhängig.

Offenbar ist die Eigenschaft der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ verknüpft mit der Lage der Vektoren zueinander. Wir untersuchen dies nun genauer.

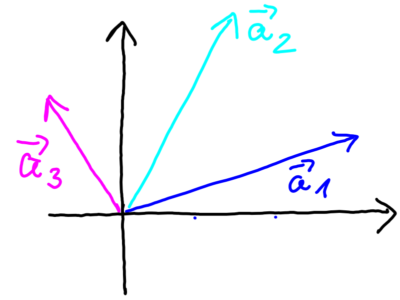
Zunächst halten wir folgendes fest: Ist einer der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ der Nullvektor, d.h. $\vec{a}_i = \binom{0}{0}$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, dann sind die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ linear abhängig, da für jede Wahl von $\alpha_i \neq 0$ und alle $\alpha_j = 0$ mit $j \neq i$ stets $\binom{0}{0} = \alpha_i \vec{a}_i$ gilt, d.h. die Gleichung $\binom{0}{0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i$ besitzt eine nichttriviale Lösung.

Im Folgenden betrachten wir nur noch den Fall $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.

$m = 1$: Zu untersuchen ist die Gleichung $\binom{0}{0} = \alpha_1 \binom{a_{11}}{a_{12}}$.
Für $\vec{a}_1 \neq \binom{0}{0}$ ist dies nur lösbar für $\alpha_1 = 0$, d.h. ein Vektor, der ungleich dem Nullvektor ist, ist stets linear unabhängig.

$m = 2$: Zu untersuchen ist die Gleichung $\binom{0}{0} = \alpha_1 \binom{a_{11}}{a_{12}} + \alpha_2 \binom{a_{21}}{a_{22}}$
Hat die Gleichung eine nichttriviale Lösung, so muss $\alpha_1 \neq 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ gelten. Die Gleichung ist dann äquivalent zu $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2$, d.h. $\vec{a}_1$ ist ein skalares Vielfaches von $\vec{a}_2$.
Die beiden Vektoren haben also dieselbe oder entgegengesetzte Richtung, sie sind linear abhängig. Die zugehörigen Ortsvektoren liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.

$m = 3$: Liegen bereits zwei Ortsvektoren auf einer Geraden, so brauchen wir nicht weiter zu untersuchen, es liegt lineare Abhängigkeit vor. Was passiert, wenn dies nicht der Fall ist, machen wir uns mit einer Skizze klar.



$\vec{a}_1 = \binom{3}{1}$ $\quad \vec{a}_2 = \binom{1}{2}$ $\quad \vec{a}_3 = \binom{-1}{1}$

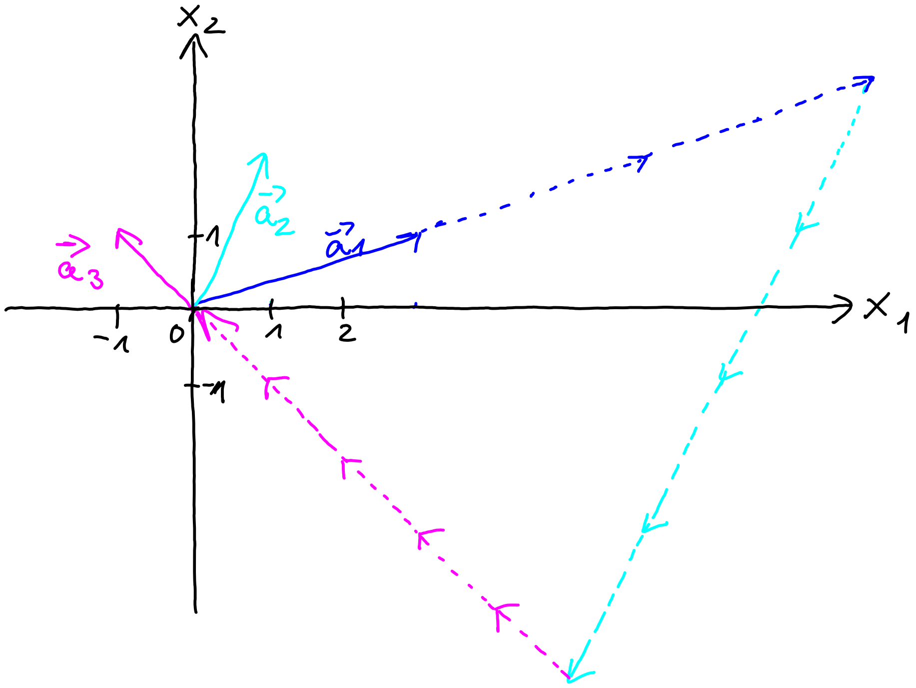
Die Gleichung $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a} + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$ ist äquivalent zu dem linearen

Gleichungssystem: $3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

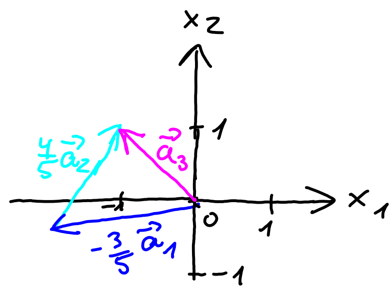
mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(\frac{3}{5}t, -\frac{4}{5}t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

Wählen wir z.B. $t = 5$, d.h. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -4, 5)$, so ergibt sich die in der Skizze dargestellte Situation.



Insgesamt gilt, dass je drei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ immer linear abhängig sind. Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ist also 2.

Wenn wir uns das oben stehende Beispiel noch einmal anschauen, sehen wir auch, dass sich z.B. der Vektor $\vec{a}_3$ (aber auch jeder andere Vektor des $\mathbb{R}^2$) als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ schreiben lässt: $\vec{a}_3 = -\frac{3}{5}\vec{a}_1 + \frac{4}{5}\vec{a}_2$



Die oben angestellten Betrachtungen geben für den $\mathbb{R}^2$ (d.h. geometrisch die Ebene) Anlass zu folgenden Begriffsbildungen.

Im Hinblick auf anschließende Verallgemeinerungen für den $\mathbb{R}^n$ sind die folgenden Formulierungen "etwas komplizierter" als dies für den $\mathbb{R}^2$ nötig wäre.

Definition: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in der Ebene, d.h. 2, heißt Dimension der Ebene.

Je zwei linear unabhängige Vektoren der Ebene bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. (Zwei linear unabhängige Vektoren spannen die Ebene auf.)

Für k linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^2$ heißt die Menge $U = \{\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$ k-dimensionaler Teilraum (Unterraum) von $\mathbb{R}^2$. (Im $\mathbb{R}^2$ sind nur $k=1$ oder $k=2$ sinnvoll).

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

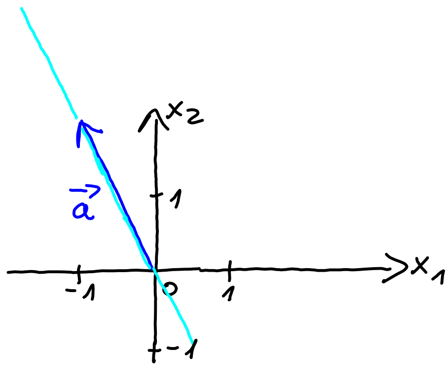
Wegen $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ gilt, dass die sogenannten kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ linear unabhängig sind und eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Jeder beliebige Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich sehr einfach als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Beispiel: Wir überlegen, was ein 1-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^2$ geometrisch darstellt. Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten

$$U = \{\alpha \cdot \vec{a} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



Durch den Ortsvektor $\vec{a}$ ist zunächst eine bestimmte Richtung vorgegeben. Durch den Faktor α kann die Länge beliebig verändert und bei negativem α die Richtung umgekehrt werden.

Geometrisch entsprechen 1-dimensionale Teilräume somit Geraden durch den Ursprung. Sie ist durch den Ursprung und den Zielpunkt des Ortsvektors $\vec{a}$ eindeutig festgelegt.

Wir werden nun die für den $\mathbb{R}^2$ hergeleiteten Begriffe und Zusammenhänge auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Dabei lassen sich leider nur die Spezialfälle $n=2$ bzw. $n=3$ geometrisch veranschaulichen.
Zunächst lässt sich der Begriff der Linearkombination in analoger Formulierung angeben.

Definition: Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Jeder Ausdruck der Form $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{a}_m$
heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$.
Gibt es für einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so dass $\vec{b} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i$, so heißt $\vec{b}$ aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ linear kombinierbar.

Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear kombinierbar, da

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nicht linear kombinierbar, was man folgendermaßen einsieht.
Schreibt man die Gleichung $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_4 \vec{a}_4 = \vec{b}$ komponentenweise auf, so ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \phantom{{}-\alpha_4} &= 1 \\ \alpha_2 - \alpha_4 &= 1 \\ 2\alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2} + 2\alpha_4 &= 1 \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 0 & 1 & (-2) \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 2 & 0 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & (2) \\ & -2 & 2 & -1 & \\ \hline & & 0 & 1 & \end{array}$$

Aus der letzten Zeile des Gauß-Schemas sieht man, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.
$\vec{b}$ ist also nicht Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_4$.

Beispiel: Der Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = t,\ \alpha_2 = -t,\ \alpha_3 = t,$$

$t \in \mathbb{R}$ frei wählbar

Betrachten wir nun $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$$

Im Gegensatz zu vorher gibt es hier nur die triviale Lösung.

Wir können nun die Begriffe der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit allgemein formulieren.

Definition: m Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{O}$ nur die triviale Lösung, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ besitzt.

Gibt es außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen, so heißen sie linear abhängig.

In dem vorstehenden Beispiel sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig, die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ linear unabhängig. Der Unterschied ist, dass geometrisch betrachtet, die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ eine Ebene aufspannen. In dieser Ebene ist auch der Vektor $\vec{a}_3$, durch Linearkombinationen "kommt man nicht aus dieser Ebene heraus". Da $\vec{a}_4$ nicht in der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ aufgespannten Ebene liegt, "kommt man mit Hilfe von $\vec{a}_4$ aus der Ebene heraus".

Bezüglich der Maximalzahl möglicher linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ kann man nun folgendes Ergebnis formulieren.

Satz: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist n.

Weiter übertragen wir die Begriffe Dimension, Basis und Teilraum auf die allgemeine Situation.

Definition: Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$, d.h. n, heißt Dimension.
Je n linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
Für k linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1,2,\ldots k\}$ heißt die Menge

$$U = \{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

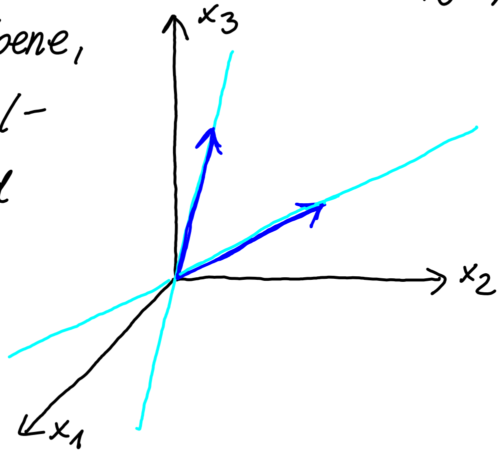
k-dimensionaler Teilraum (Unterraum) von $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Wir betrachten die Vektoren $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, die dadurch definiert sind, dass ihre i-te Komponente 1, alle anderen 0 sind. (Im $\mathbb{R}^3$ sind dies die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$).
Wegen $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ gilt, dass die sogenannten kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ linear unabhängig sind und eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. (Im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ zeigen die Vektoren in Richtung der Koordinatenachsen.)
Jeder beliebige Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in einfacher Weise als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ darstellen:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i \,.$$

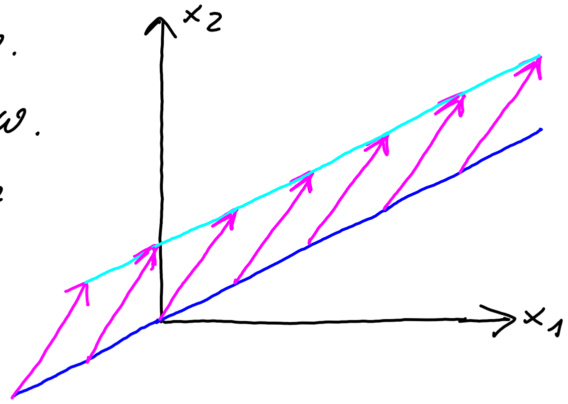
Beispiel: Wir überlegen, was 1- bzw. 2-dimensionale Teilräume im $\mathbb{R}^3$ geometrisch darstellen.
Analog zu den Überlegungen im $\mathbb{R}^2$ sieht man, dass den 1-dimensionalen Teilräumen im $\mathbb{R}^3$ geometrisch wieder Geraden durch den Ursprung entsprechen.
Seien nun $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Wir betrachten $U = \{\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$. Wählt man z.B. $\alpha_2 = 0$, so erhält man mit $\alpha_1 \vec{a}_1$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, alle Punkte, die auf der Geraden durch den Ursprung liegen, deren Richtung durch $\vec{a}_1$ vorgegeben ist.

Entsprechendes gilt für die Wahl $\alpha_1 = 0$ für $\alpha_2 \vec{a}_2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Die beiden Geraden sind wegen der linearen Unabhängigkeit verschieden.
Alle weiteren Wahlen für α_1 und α_2 führen in der Kombination $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$ zu einem Punkt "in der von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aufgespannten Ebene". Wir erhalten somit eine Ebene, die durch den Ursprung und die Zielpunkte der Ortsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ eindeutig festgelegt ist.



Geraden- und Ebenengleichungen

Zum Schluss dieses Kapitels überlegen wir noch, wie man mit Hilfe von Vektoren auch andere als durch den Ursprung verlaufende Geraden bzw. Ebenen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ darstellt.
Ein analoges, abstraktes Vorgehen gilt auch allgemein für den $\mathbb{R}^n$, was aber hier nicht weiter vertieft werden soll.
Nach unseren vorangegangenen Überlegungen wissen wir schon, wie man Geraden bzw. Ebenen, die durch den Ursprung verlaufen, darstellen kann. Wir können nun im Prinzip solche Geraden bzw. Ebenen mit Hilfe eines Vektors verschieben.
Dadurch erhält man Geraden bzw. Ebenen, die zu den ursprünglichen parallel verlaufen.



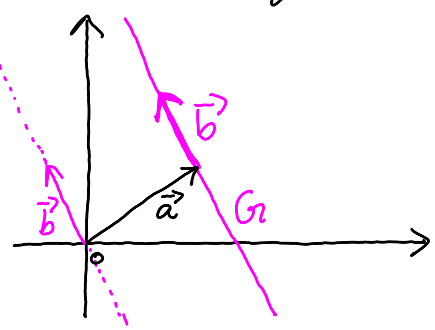
Konkret ergeben sich folgende Situationen.

Parameterdarstellung von Geradengleichungen

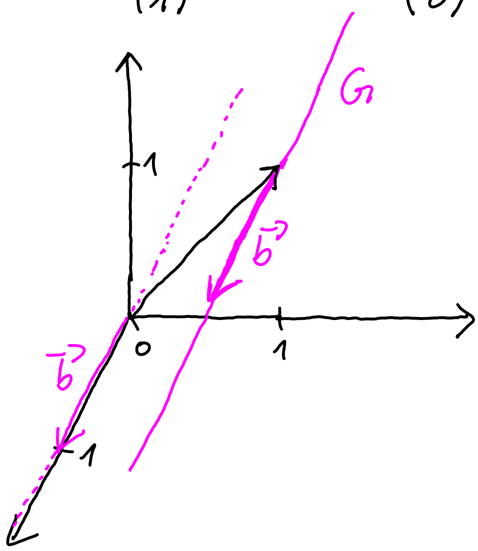
1) Punkt-Richtungsform einer Geradengleichung

Sei G eine Gerade, $\vec{a}$ ein Ortsvektor mit Zielpunkt auf G und $\vec{b}$ ein Vektor, der in Richtung von G zeigt. Dann ist jeder Punkt von G durch $\vec{a}+t\cdot\vec{b}$ mit einem geeigneten Parameter $t\in\mathbb{R}$ darstellbar, d.h. $G: \vec{x}=\vec{a}+t\cdot\vec{b}, t\in\mathbb{R}$ (genauer $G=\{\vec{x}: \vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}, t\in\mathbb{R}\}$) ist Parameterdarstellung der Geraden G.

Durch Addition von $\vec{a}$ werden die Zielpunkte von $t\cdot\vec{b}$ (Gerade durch den Ursprung) "an die richtige Stelle verschoben".

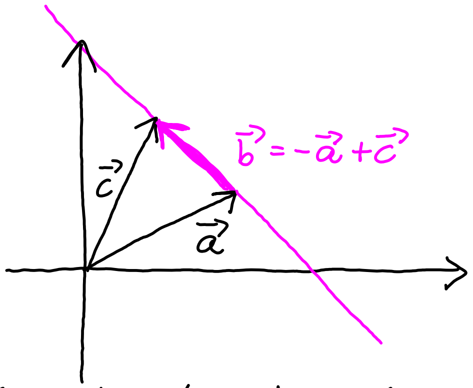


Beispiel: Seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $G: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$.



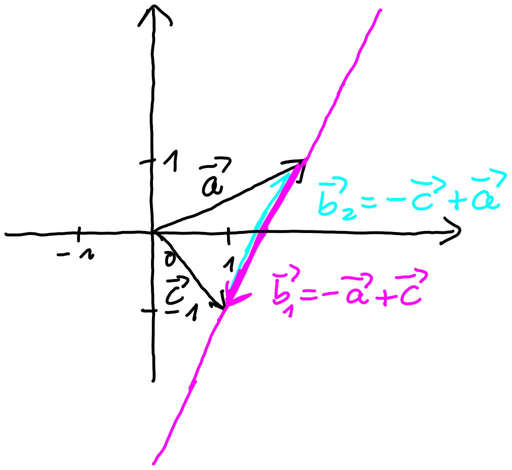
2) Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung

Sei G eine Gerade und $\vec{a}, \vec{c}$ mit $\vec{a}\neq\vec{c}$ Ortsvektoren mit Zielpunkten auf G. Dann ist $\vec{b}=-\vec{a}+\vec{c}$ Richtungsvektor der Geraden und $G: \vec{x}=\vec{a}+t(\vec{c}-\vec{a}), t\in\mathbb{R}$, Parameterdarstellung der Geraden.



An der Skizze ist bereits erkennbar, dass Parameterdarstellungen von Geraden nicht eindeutig sind.

Beispiel: Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung der Geraden G, auf der die Zielpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ liegen.



Mögliche Parameterdarstellungen:

$G: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$G: \vec{x} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

Beispiel: Liegt der Punkt $P(1,2,10)$ auf der Geraden $G: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Wenn ja, muss ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*),$$

d.h.
$$\left\{\begin{array}{l} 1 = 1 + t \\ 2 = 4t \\ 10 = 2 + t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = 8 \end{array}\right\}$$

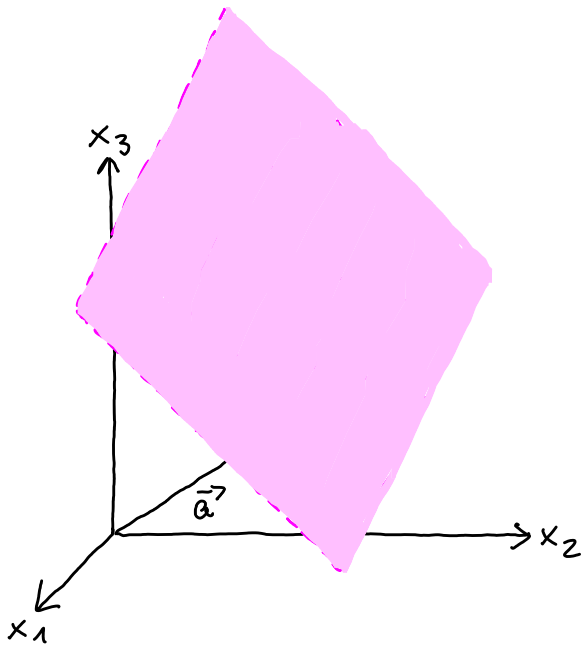
Es gibt also keine Lösung für $(*)$, d.h. P liegt nicht auf G.

Parameterdarstellungen von Ebenengleichungen

1) Punkt-Richtungsform der Ebenengleichung

Wie Ebenen durch den Ursprung (s.o.) durch einen Punkt, nämlich den Ursprung, und 2 linear unabhängige Richtungen festgelegt sind, gilt dies entsprechend auch allgemein.

Sei E eine Ebene, $\vec{a}$ ein Ortsvektor mit Zielpunkt auf der Ebene und $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene.



Dann ist jeder Punkt der Ebene E durch $\vec{a} + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2$ mit geeigneten Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ darstellbar, d.h.

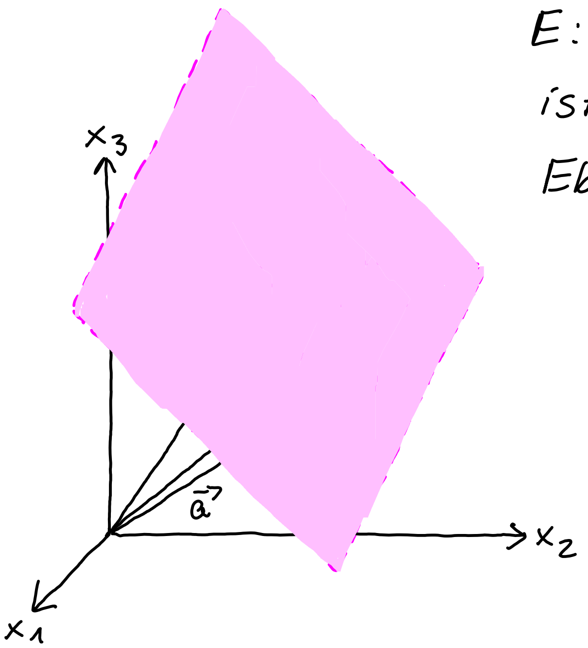
$E: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2$, $s, t \in \mathbb{R}$,

(genauer $E = \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2, s, t \in \mathbb{R}\}$)

ist Parameterdarstellung der Ebene E.

2) Drei-Punkte-Form der Ebenengleichung

So wie Geraden durch zwei verschiedene Punkte, sind Ebenen durch die Angabe von drei verschiedenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen dürfen, eindeutig festgelegt. Sind $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ Ortsvektoren mit Zielpunkten auf einer Ebene E, die nicht auf einer Geraden liegen, dann sind $\vec{b}_1 = -\vec{a} + \vec{c}$ und $\vec{b}_2 = -\vec{a} + \vec{d}$ linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene und



$E: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{c} - \vec{a}) + s(\vec{d} - \vec{a})$, $s, t \in \mathbb{R}$

ist Parameterdarstellung der Ebene E.