15 Optimierung mit Restriktionen

In Kapitel 13 haben wir uns damit beschäftigt, Extrema von Funktionen zu bestimmen, d.h. Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen / Restriktionen zu lösen. In vielen ökonomischen Problemstellungen müssen die Variablen aber gewisse Nebenbedingungen/Restriktionen erfüllen.

Beispiel: Ein Verbraucher möchte Mengen x und y für zwei Güter so bestimmen, dass die Nutzenfunktion $u(x,y)$ maximal wird. Dabei muss er seine Budgetbeschränkung $px+qy \leq m$ beachten.

Beispiel: Ein Unternehmen möchte seine Produktionskosten in einer bestimmten Zeitspanne möglichst gering halten. Auf Grund von Vorbestellungen muss aber eine Mindestmenge produziert werden.

Da die Suche nach dem Maximum einer Funktion f äquivalent zu der Suche nach dem Minimum von $-f$ ist, beschränken wir uns häufig auf die Betrachtung von Minimierungsproblemen.
Speziell werden wir das sogenannte Lagrangsche Multiplikatorverfahren für die Problemstellung

$$\min f(x,y),$$

$$\text{so dass } g(x,y) = 0$$

behandeln.

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Wir erläutern zunächst anschaulich an einem Beispiel, auf welchen Überlegungen dieses Verfahren beruht.

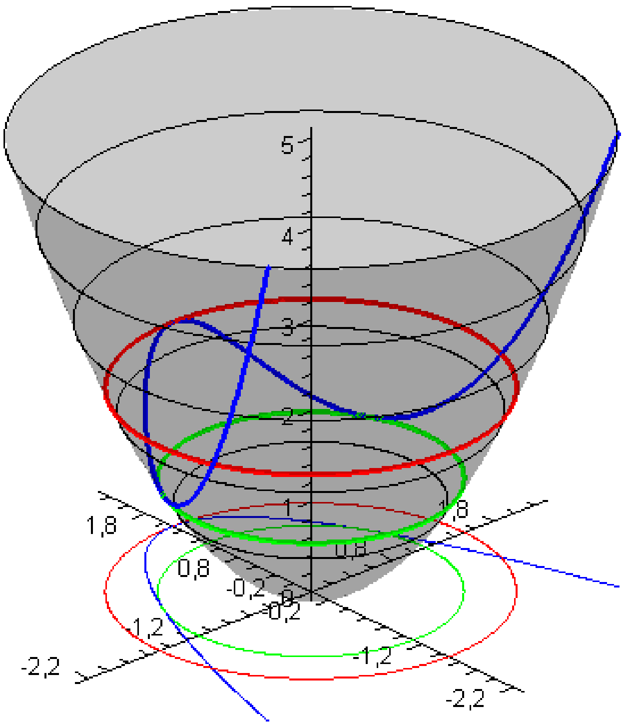
Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\text{so dass } g(x,y) = y + x^2 - \tfrac{3}{2} = 0$$

zunächst an Hand einer Graphik.

Die Funktion f beschreibt die grau schaftierte Fläche im $\mathbb{R}^3$.

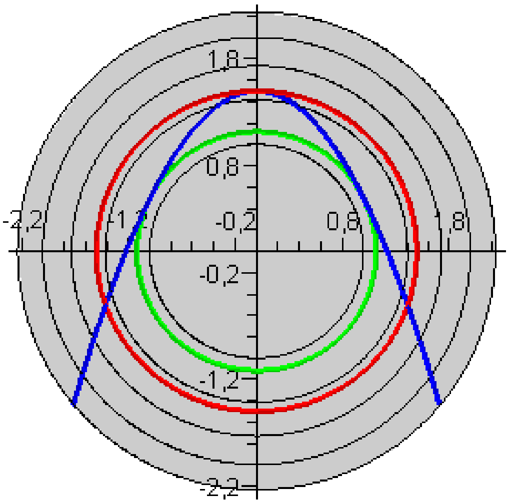


Extrema mit Restriktionenen

Zur Verdeutlichung sind einige Niveaulinien von f schwarz eingezeichnet. Durch $g(x,y) = 0$ wird die in der xy-Ebene eingezeichnete blaue Parabel beschrieben. Schränkt man f auf diejenigen (x,y) ein, die die Restriktion erfüllen, so erhält man die auf der Fläche in blau hervorgehobene Kurve. Längs dieser Kurve sollen nun lokale Extrema bestimmt werden. Die lokalen Minima und das lokale Maximum sind in der Graphik deutlich zu erkennen. Die zugehörigen Niveaulinien sind auf der Fläche und in der xy-Ebene in grün bzw. rot dargestellt.

Man sieht, dass die blaue Kurve auf der Fläche die rote bzw. grüne Niveaulinie berührt.

Wir betrachten die Situation in der xy-Ebene noch einmal genauer.



Extrema mit Restriktionenen

Die Restriktionskurve und die zu den lokalen Extremalstellen gehörenden Niveaulinien berühren sich an den lokalen Extremalstellen. Anders ausgedrückt, haben diese Niveaulinien und die Restriktionskurve an den Extremalstellen jeweils dieselbe Steigung.

In Kapitel IV (vgl. Abschnitt Grenzrate der Substitution) haben wir gesehen, wie man die Steigungen der implizit gegebenen Kurven $f(x,y)=c$ (Niveaulinien) und $g(x,y)=0$ (Restriktion) berechnet.

Dies führt auf die Gleichung

$$-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$$

(Steigung Niveaulinie) (Steigung Restriktion)

bzw. anders aufgeschrieben

$$\frac{f_x(x,y)}{g_x(x,y)} = \frac{f_y(x,y)}{g_y(x,y)}$$

Diese Gleichheit kann man nun auch so beschreiben, dass für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die beiden Gleichungen

$$\frac{f_x(x,y)}{g_x(x,y)} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{f_y(x,y)}{g_y(x,y)} = \lambda$$

bzw.

$$f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$

erfüllt sein müssen. Zusammen mit der Restriktion haben wir für unser Beispiel die drei Gleichungen:

1) $f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 2x - 2\lambda x = 0 \iff x(1-\lambda) = 0$

2) $f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 2y - \lambda \quad = 0 \iff \lambda = 2y$

3) $\qquad g(x,y) = y + x^2 - \frac{3}{2} = 0$

Wegen 1) $x(1-\lambda) = 0 \iff x = 0 \vee \lambda = 1$, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $\underline{x = 0}$

Einsetzen in 3) liefert $\underline{y = \frac{3}{2}}$

Einsetzen in 2) liefert $\underline{\lambda = 3}$

2. Fall: $\underline{\lambda = 1}$

Einsetzen in 2) liefert $\underline{y = \frac{1}{2}}$

Einsetzen in 3) liefert $\underline{x = 1 \vee x = -1}$

Die Punkte $P_1(0, \frac{3}{2})$, $P_2(1, \frac{1}{2})$, $P_3(-1, \frac{1}{2})$ kommen also als Kandidaten für Extremalstellen in Frage.

Es gilt: $f(0, \frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$ ist lokales Maximum, $f(1, \frac{1}{2}) = f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ sind lokale Minima von f unter der gegebenen Restriktion.

Bevor wir die Methode, die uns notwendige Bedingungen für lokale Extrema bei Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen liefert, in allgemeiner Form angeben, schauen wir die obigen Bedingungen noch einmal formal aus einem anderen Blickwinkel an.

Zu dem Problem aus unserem Beispiel definieren wir eine Hilfsfunktion (Lagrangefunktion) durch

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Die Forderung, dass $\operatorname{grad} L(x,y;\lambda) = \vec{0}$ führt auf

$$L_x(x,y;\lambda) = f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0$$
$$L_y(x,y;\lambda) = f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0$$
$$L_\lambda(x,y;\lambda) = g(x,y) = 0$$

Dies sind genau dieselben Gleichungen, die wir aus der zunächst anschaulichen Argumentation hergeleitet haben.
Mit Hilfe der Lagrangefunktion lässt sich nun die Lagrangesche Multiplikatormethode sehr allgemein formulieren.
Wir geben die Methode zunächst für den speziellen Fall einer Funktion mit zwei Variablen mit einer Nebenbedingung an.

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen in den Variablen x und y. (x^*, y^*) sei ein innerer Punkt von $D_f \cap D_g$. Für den Gradienten von g gelte: $\operatorname{grad} g(x^*, y^*) \neq \vec{0}$.
Eine notwendige Bedingung dafür, dass f an der Stelle (x^*, y^*) eine lokale Extremalstelle unter Berücksichtigung der Restriktion $g(x^*, y^*) = 0$ besitzt, ist, dass der Gradient der Lagrangefunktion

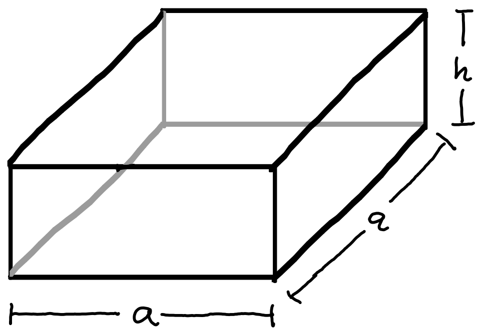
$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y)$$

verschwindet. D. h. es muss eine reelle Zahl λ (den sogenannten Lagrange-Multiplikator) existieren, so dass

$$\begin{aligned} L_x(x, y; \lambda) &= 0 \\ L_y(x, y; \lambda) &= 0 \\ L_\lambda(x, y; \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bedingung $L_\lambda(x, y; \lambda) = 0$ entspricht gerade der Nebenbedingung des Optimierungsproblems.

Beispiel: Das Unternehmen Zack-und-Pack hat von der Bäckerei Knack-und-Back einen Auftrag zur Herstellung von Keksschachteln erhalten. Die oben offenen Schachteln sollen ein Fassangsvermögen von $V = 2048\,cm^3$ haben und eine quadratische Grundfläche besitzen. Ansonsten bleibt die Wahl der Abmessungen dem Hersteller überlassen.



$$V = a^2 \cdot h = 2048\,cm^3$$

Zack-und-Pack möchte die Materialkosten zur Herstellung der Schachteln minimieren. Zu lösen ist also das Problem

$$\min f(a,h) = a^2 + 4ah$$
so dass $a^2 h - 2048 = 0$

Die Lagrangefunktion ist

$$L(a,h;\lambda) = f(a,h) - \lambda g(a,h) = a^2 + 4ah - \lambda(a^2h - 2048).$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$L_a(a,h;\lambda) = 2a + 4h - 2\lambda ah = 2(a + 2h - \lambda ah)$$
$$L_h(a,h;\lambda) = 4a - \lambda a^2$$
$$L_\lambda(a,h;\lambda) = -(a^2h - 2048)$$

Die notwendigen Bedingungen lauten also:

1) $a + 2h - \lambda ah = 0$
2) $4a - \lambda a^2 = 0$
3) $a^2 h = 2048$

Aus 3) folgt zunächst: $a \neq 0 \wedge h \neq 0$.

Division von 2) durch $a \neq 0$ liefert: 2)' $\lambda a = 4$

Einsetzen von $\lambda a = 4$ in 1) liefert: 1)' $a + 2h - 4h = 0 \iff a = 2h$

Einsetzen von $a = 2h$ in 3) liefert: 3)' $4h^3 = 2048 \iff \underline{h^* = 8}$

Mit 1)' und 2)' ergibt sich daraus: $\underline{a^* = 16}$, $\underline{\lambda^* = \frac{1}{4}}$.

Als Minimalstelle kommt also nur $(a^*, h^*) = (16, 8)$ mit $\lambda^* = \frac{1}{4}$ in Frage.

Der Gradient von g ist $\operatorname{grad} g(a,h) = (2ah, a^2)^T$ und $\operatorname{grad} g(a^*, h^*) = 16^2(1,1)^T$.

Die Bedingung $\operatorname{grad} g(a^*, h^*) \neq \vec{0}$ ist also erfüllt.

<u>Beispiel:</u> Ein Verbraucher bestimmt seinen Nutzen mit Hilfe einer Cobb-Douglas Funktion $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$ mit $x_1, x_2 \geq 0$.

Er unterliegt der Budgetbeschränkung $x_1 + x_2 = 10$.

Wie soll er x_1 und x_2 wählen, damit sein Nutzen $U(x_1, x_2)$ maximal wird?

Das zugehörige Optimierungsproblem lautet:

$$\max U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$$

$$\text{so dass } g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 10 = 0$$

Lagrangefunktion:

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1^2 x_2^3 - \lambda(x_1 + x_2 - 10)$$

Partielle Ableitungen der Lagrangefunktion:

$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = 2x_1 x_2^3 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = 3x_1^2 x_2^2 - \lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2; \lambda) = -(x_1 + x_2 - 10)$$

Wir erhalten somit die Bedingungen:

1) $2x_1 x_2^3 = \lambda$

2) $3x_1^2 x_2^2 = \lambda$

3) $x_1 + x_2 = 10$

Wir können in diesem Beispiel ohne Einschränkung voraussetzen, dass x_1

und x_2 von Null verschieden sind, da sonst der Nutzen Null und somit sicher nicht maximal ist.

Gleichsetzen von 1) und 2) liefert:

$$2x_1 x_2^3 = 3x_1^2 x_2^2 \quad |: 2x_1 x_2^2 \; (\neq 0)$$

$$\text{I)} \quad x_2 = \frac{3}{2} x_1$$

Einsetzen von $x_2 = \frac{3}{2}x_1$ in 3) liefert: $x_1 + \frac{3}{2}x_1 = 10 \Leftrightarrow \underline{x_1^* = 4}$

Einsetzen von $x_1 = 4$ in I) liefert: $\underline{x_2^* = 6}$

Einsetzen von $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ in 1) bzw. 2) liefert: $\underline{\lambda = 1728}$

Der Gradient von g ist $\operatorname{grad} g(x_1, x_2) = (1,1)^T = g(x_1^*, x_2^*) \neq \vec{0}$.

Die einzige mögliche (lokale) Extremalstelle von f unter der Budgetbeschränkung ist somit $(x_1^*, x_2^*) = (4, 6)$.

Da der durch die Budgetbeschränkung beschriebene Bereich eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist, hat f dort ein absolutes Maximum. Für $(4,6)$ wird also der Nutzen unter der Budgetbeschränkung maximal mit $U(4,6) = 4^2 \cdot 6^3 = 3456$.