

**Mathematik für Studierende technischer Fächer
und Studierende der Chemie**
Lösungen zum Vorkurs WS 15/16

Prof. Dr. Margareta Heilmann
Katharina Baumann, M.Sc.
Marco Milano, M.Sc.

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

Wuppertal, 17. September 2015

Aufgabe 1

- a) wahr b) wahr c) wahr d) wahr e) wahr

Aufgabe 2

- a) wahr b) wahr c) wahr d) wahr

Aufgabe 3

- a) Es existiert ein im März 2013 in Wuppertal zugelassenes Auto der Marke Fiasko, das höchstens 10 Liter Benzin pro 100 km Autobahnfahrt verbraucht.
- b) Für alle zukünftigen Maschinenbaustudenten im Vorkurs Mathematik für Ingenieure an der Uni Wuppertal gilt, dass sie weder aus Köln noch aus Dortmund stammen.

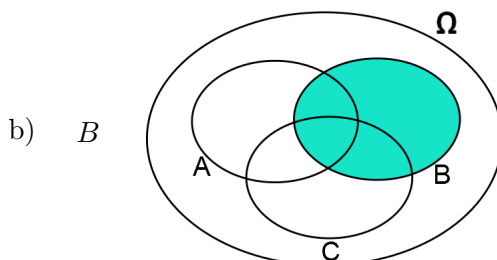
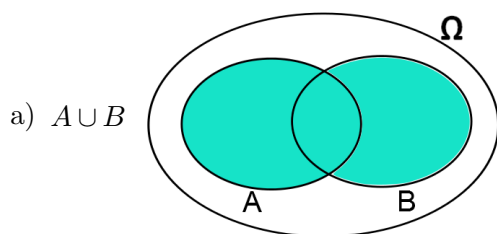
Aufgabe 4

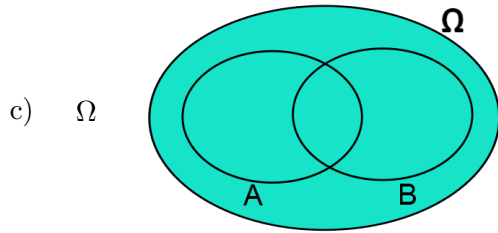
- a) $A \cap B = \{2\}$ b) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ c) $A \setminus B = \{3, 4\}$ d) $B \setminus A = \{5, 6\}$
e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{3, 4, 5, 6\}$ f) $A \cap D = \{ \}$ g) $A \cup B \cup C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Aufgabe 5

- a) $\Omega \setminus M$: Schülerinnen und Schüler, die nicht Mathe als Lieblingsfach haben
- b) $M \cup C$: Schülerinnen und Schüler, die Mathe als Lieblingsfach haben und im Schulchor singen
- c) $F \cap T$: Schülerinnen, die Tennis spielen
- d) $M \setminus (B \cap T)$: Schülerinnen und Schüler mit Lieblingsfach Mathe, die nicht sowohl Bio nicht mögen als auch Tennis spielen

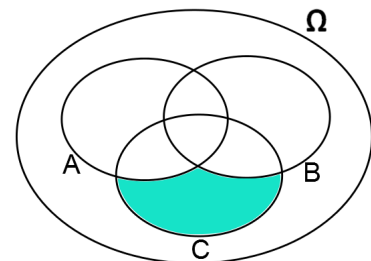
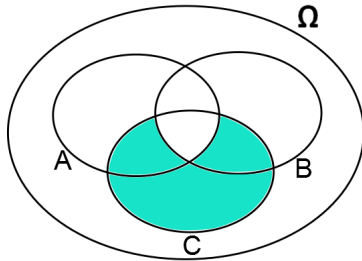
Aufgabe 6





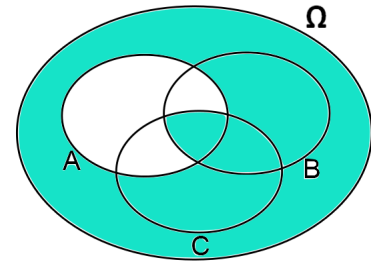
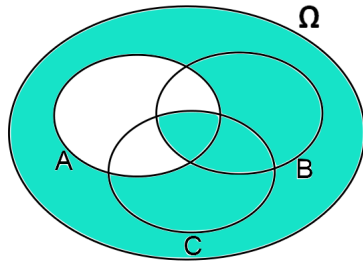
Aufgabe 7

a) $(\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) = \overline{(A \cup B)} \cap C$



Die Aussage ist falsch.

b) $\bar{A} \cup (B \cap C) = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup C)$



Die Aussage ist wahr.

Aufgabe 8

- a) $\{9, 16, 25, 36, 49, 64\}$ b) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ c) $\{1\}$

Aufgabe 9

- a) $\{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 10\}$ b) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 8 \right\}$ c) $\left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 5 \right\}$

Aufgabe 10

- a) $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \rightarrow$ Anzahl Teilmengen: $2^3 = 8$
 b) $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$
 \rightarrow Anzahl Teilmengen: $2^4 = 16$

Aufgabe 11

- a) $A = [3, 4)$ b) $B = [13, 19)$ c) $C = [2, 44]$ d) $D = (-\infty, -33]$ e) $E = (5, \infty)$

Aufgabe 12

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$

Aufgabe 13

a) 0.1 b) 0.01 c) 0.6 d) 1.75 e) $0.\overline{3}$ f) $0.\overline{09}$

Aufgabe 14

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{31}{25}$

Aufgabe 15

a) $6x^3 - 6y^3 + 9x^2y^2$ b) 0 c) $c^3d - cd^3$ d) $12tu + 3t^3 - 2s^2 - 4u^3$

Aufgabe 16

a) $(x + 7y)^2$ b) $(2a + 3b)(2a - 3b)$ c) $(2a^2 - 5b^2)^2$ d) $2(x^2 - 3y)(x^2 + 3y)$

Aufgabe 17

a) $a = 0$ nicht erlaubt, ab^8 b) $t = 0$ nicht erlaubt, $t^{p+q-r-s}$ c) alle Werte erlaubt, $\frac{1}{100}$
 d) $k = 0$ nicht erlaubt, k^4 e) $x = -1$ nicht erlaubt, $\frac{1}{x+1}$

Aufgabe 18

a) $\{a, b, c \in \mathbb{R} : a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0\}, \frac{c^2 + b^2}{bc}$
 b) $\{x, y \in \mathbb{R} : x \neq y \wedge x \neq -y\}, \frac{1}{2}$
 c) $\{s, t \in \mathbb{R} : s \neq 0 \wedge t \neq 0 \wedge s \neq -t\}, \frac{1}{4s + 4t}$

Aufgabe 19

a) $K_{15} = 12000 \cdot 1.04^{15} \approx 21611.32$ b) $K_0 = 50000 \cdot 1.06^{-5} \approx 37362.91$

Aufgabe 20

a) G: Gewinn in 2000, Gewinn in 2002: $0.996 \cdot G$ b) circa 20.48% c) circa 16.67%

Aufgabe 21

a) $a \in [-4, \infty)$ b) $y \in (-\infty, -1]$ c) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ d) ex. für kein $x \in \mathbb{R}$ e) $a \in [-1, 1]$

Aufgabe 22

a) $\frac{1}{5}$ b) $\sqrt{1+x}$ c) $2(b+5)$ d) $|3a-1|$ e) $\frac{4}{\sqrt{1-2x}}$ f) $|a-5|$

Aufgabe 23

a) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ b) $\frac{7}{3}\sqrt{6t}$ c) $\frac{\sqrt{a(a+b)} - \sqrt{b(a+b)}}{a-b}$ d) 0

Aufgabe 24

a) $y \geq 0$, $\sqrt[4]{|x|} \cdot \sqrt{y}$ b) $x \geq -1$, $\sqrt[4]{(x+1)^9}$ c) $s \geq 0 \wedge s \neq \frac{9}{25}, 2$

Aufgabe 25

a) 2 b) -3 c) 0 d) $\frac{14}{15}$ e) $-\frac{1}{2}$

Aufgabe 26

a) $1 + \log_3 x$ b) $1 + \log_5 |a| - \log_5 |y|$ c) $\frac{1}{2} \lg a + 2 \lg |b| - \frac{1}{4} \lg c$
 d) $10 \lg (\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}) - \lg c$ e) $\lg 5 + \lg |x| + \frac{1}{2} \lg y - \frac{1}{2} \lg a - \frac{1}{4} \lg b$

Aufgabe 27

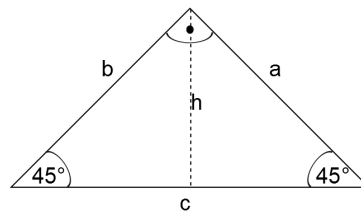
a) $\log_5 (u^2 v^3)$ b) $\lg \left(\frac{(a+b)^3}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}} \right)$ c) $\log_2 \sqrt[3]{4x}$
 d) $\log_4 \frac{1}{x+1} = -\log_4 (x+1)$ e) 0 f) $-\log_{\frac{1}{2}} 6$ g) $\lg \frac{a^2 + 1}{a^2}$

Aufgabe 28

a) $\frac{\lg 130}{\lg 4} - \frac{\lg 20}{\lg 3}$ b) $\frac{\lg 234}{\lg \frac{1}{3}} + \lg 93 - \frac{\lg 92}{\lg 2}$

Aufgabe 29

a) $\frac{3}{4} \lg (a) + \frac{1}{4} \lg (b) - \frac{1}{2} \lg (c) - \frac{1}{4} \lg (d)$ b) $\frac{7}{8} \ln (x)$

Aufgabe 30

Gleichseitiges Dreieck, d.h. $a = b$ und Höhe $h = \frac{c}{2}$.

Mit Pythagoras gilt also:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{c^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}c$$

$$\Rightarrow \sin(45) = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und } \cos(45) = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 31

a) $\sum_{i=1}^{10} i^2$ b) $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^3}$ c) $\sum_{i=2}^9 \frac{1}{i}(-1)^i$ d) $\sum_{i=2}^9 (-1)^{i+1} \frac{1}{i}$

Aufgabe 32

a) 328 b) -22 c) 6 d) $4 + 6x + 4x^2 + x^3$

Aufgabe 33

a) 6 b) 24 c) 120 d) 15.504 e) 10.827.401 f) -2.520 g) $\frac{3434}{675}$

Aufgabe 34

a) $32 + 80a + 80a^2 + 40a^3 + 10a^4 + a^5$ b) $81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$

Aufgabe 35

a) 0 b) 0 c) 2^n d) 13^{10} e) 3^n

Aufgabe 36

a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5} \right\}$ b) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$
 c) $\mathbb{L} = \{ \}$ d) $\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{8}{7} \right\}$ e) $\mathbb{L} = \{1\}$ f) $\mathbb{L} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$

Aufgabe 37

a) i) genau eine Lösung: $a = \frac{9}{4}$, zwei Lösungen: $a < \frac{9}{4}$, keine Lösung: $a > \frac{9}{4}$
 ii) genau eine Lösung: $a = \pm 4$, zwei Lösungen: $a > 4 \vee a < -4$, keine Lösung: $a \in (-4, 4)$
 b) $x^2 - 2x - 1 = 0$

Aufgabe 38

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, $\mathbb{L} = \{2\}$ b) $\mathbb{D} = [-1, 1]$, $\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$ c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \{0\}$
 d) $\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{10}{3} \right\}$, $\mathbb{L} = \{5\}$ e) $\mathbb{D} = [-2, \infty)$, $\mathbb{L} = \{30\}$
 f) $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, $\mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe 39

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathbb{L} = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\mathbb{L} = \{ \}$ c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\mathbb{L} = \{5\}$

Aufgabe 40

a) $x = 1000$ b) $x = \sqrt[3]{10}$ c) $x = \sqrt{8}$ d) $x = \sqrt[3]{10}$ e) $x = \frac{\sqrt{10}}{3}$ f) $x = \frac{3}{2}$ g) $x = 5$
 h) $x = 16$

Aufgabe 41

- a) $x = 3$ b) $x = \log_5(10)$ c) $x = \log_3(7) + 1$ d) keine Lösung e) $x = 4$

Aufgabe 42

- a) $\mathbb{L} = \{-2, 2, -3, 3\}$ b) $\mathbb{L} = \{-1, 1, -2, 2\}$ c) $\mathbb{L} = \{\}$ d) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$ e) $\mathbb{L} = \{0\}$
 f) $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{e^3}, e^7\right\}$

Aufgabe 43

- a) $\mathbb{L} = \{5, 9\}$ b) $\mathbb{L} = \{\}$ c) $\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{5}, 9\right\}$ d) $\mathbb{L} = [2, 4]$

Aufgabe 44

- a) Beide Determinanten haben den Wert 22. b) $x = 2 \vee x = -2$

Aufgabe 45

- a) $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ b) $\mathbb{L} = \{\}$ c) $\mathbb{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 2x - y = 7\}$

Aufgabe 46

- a) $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, 10\right)\right\}$

Aufgabe 47

- a) $\mathbb{L} = \{(1, -1, 2)\}$ b) $\mathbb{L} = \{\}$ c) $\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 48

- a) $\mathbb{L} = [-8, \infty)$ b) $\mathbb{L} = (-\infty, -9)$ c) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{25}{2}\right]$ e) $\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{19}{7}\right]$ f)
 $\mathbb{L} = \left(-\frac{17}{12}, \infty\right)$

Aufgabe 49

- a) $\mathbb{L} = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ b) $\mathbb{L} = \{\}$ c) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Aufgabe 50

- a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \mathbb{L} = (-\infty, -5) \cup [-4, \infty)$
 b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, \mathbb{L} = (-5, -4]$
 c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \mathbb{L} = (-\infty, -4] \cup (-3, 5]$

Aufgabe 51

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{L} = [\ln 2, \ln 3]$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ c) $\mathbb{D} = (1, \infty), \mathbb{L} = [e, e^4]$

Aufgabe 52

a) $\mathbb{L} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ b) $\mathbb{L} = (-\infty, -2]$ c) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ d) $\mathbb{L} = (-\infty, -6) \cup (2, \infty)$ e) $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-3, -1]$

Aufgabe 53

a) Ja, denn $x + 1 > x \Leftrightarrow 1 > 0$

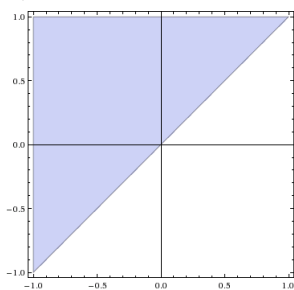
b) Nein, denn z.B. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

c) Nein, denn $x + x > x \Leftrightarrow x > 0$

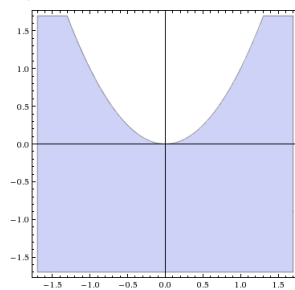
d) Ja, denn $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 0$

Aufgabe 54

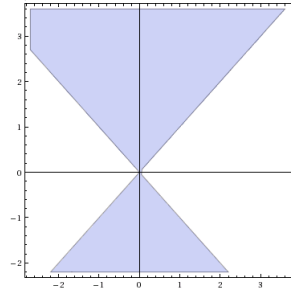
a) $x - y < 0 \Leftrightarrow x < y$, ohne Rand



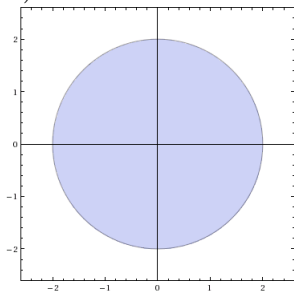
b) mit Rand



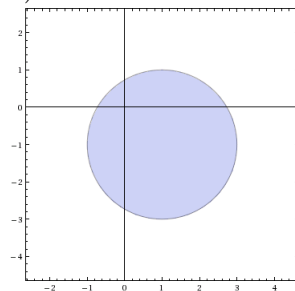
c) mit Rand



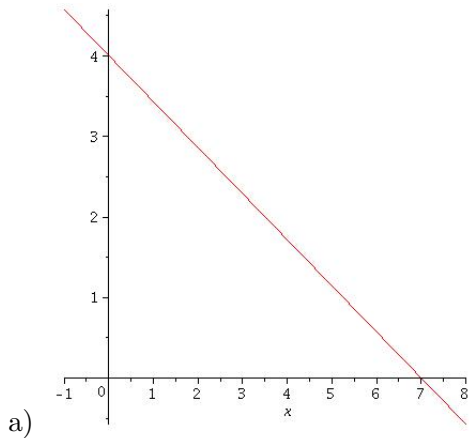
d) mit Rand



e) mit Rand



Aufgabe 55



b) Die Gerade schneidet die x -Achse bei $x = 7$, die y -Achse bei $y = 4$.

c) $\frac{y}{4} + \frac{x}{7} = 1$. Allgemein: Eine Gerade mit der Gleichung $\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1$ (Achsenabschnittsform) schneidet die x -Achse bei $x = a$, die y -Achse bei $y = b$.

Aufgabe 56

a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{85}{99}$ b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ c) $y = \frac{5}{6}x$

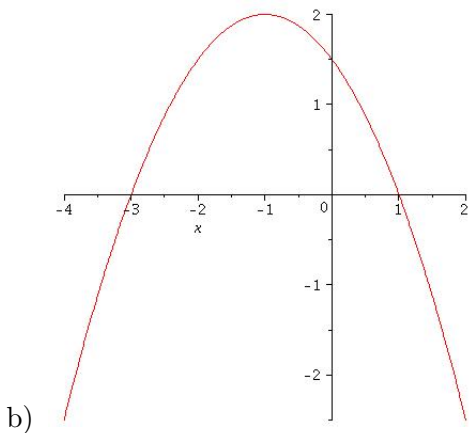
Aufgabe 57

a) Schnittpunkt $S(3, 2)$ b) kein Schnittpunkt c) unendlich viele Schnittpunkte

Aufgabe 58

a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$



c) Nullstellen bei $x = -3$ und $x = 1$.

d) Scheitelpunkt in $S(-1, 2)$.

Aufgabe 59

a) $f_1(x) = (x + 2)^2 - 4 = x(x + 4)$

b) $f_2(x) = (x + 3)^2 + 9$

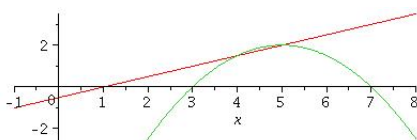
c) $f_3(x) = -3(x - 5)^2 + 45 = -3(x - (5 + \sqrt{15}))(x - (5 - \sqrt{15}))$

d) $f_4(x) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - 45 = 9\left(x - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{5}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1}{3} - \sqrt{5}\right)\right)$

e) $f_5(x) = -(x + 100)^2 + 40000 = -(x + 300)(x - 100)$

f) $f_6(x) = (x + 50)^2 - 22500 = (x + 200)(x - 100)$

Aufgabe 60



a)

b) Schnittpunkte bei $P\left(4, \frac{3}{2}\right)$ und $Q(5, 2)$.

Aufgabe 61 $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

$P(x) > 0$ für $x \in (-1, 1) \cup (2, \infty)$; $P(x) < 0$ für $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

Aufgabe 62 $P(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2$

$P(x) \geq 0$ für $x \in [1, \infty)$; $P(x) \leq 0$ für $x \in (-\infty, 1]$

Aufgabe 63 Nullstellen bei $x = 3$, $x = -4$, $x = \frac{1}{2}$ und bei $x = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 64

a) $f(x) = \frac{2(x - 1)^2(x + \frac{1}{2})(x - 3)^2}{-2(x - 1)(x - 3)(x + 1)}$

$$g(x) = -\frac{(x - 1)(x + \frac{1}{2})(x - 3)}{x + 1}$$

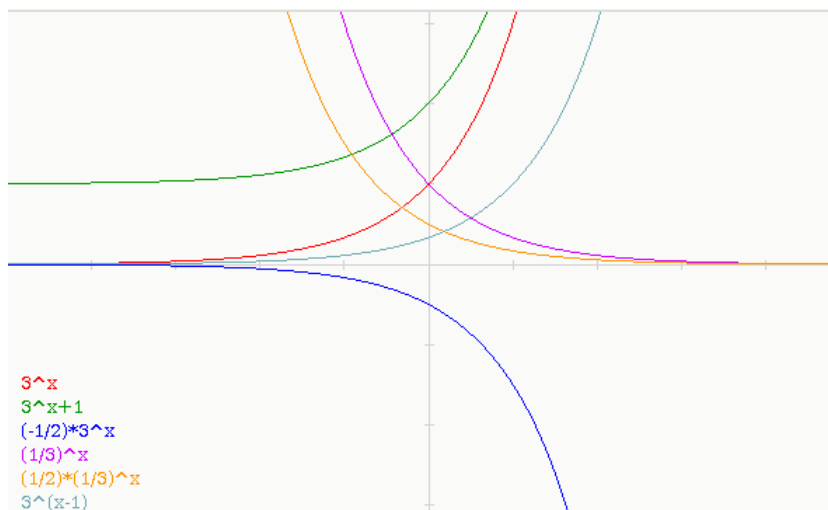
- b) Nullstellen bei $x = 1$, $x = -1/2$ und bei $x = 3$
 Polstelle bei $x = -1$

c) $g(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{2} + \frac{4}{x+1}$

Aufgabe 65

- a) $N(x) = 2x$ b) $N(x) = x^2 - 2x + 5$

Aufgabe 66



- $g_1(x) = 3^x + 1$: Verschiebung um 1 in positiver y-Richtung
 $g_2(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3^x$: Ordinatenhalbierung mit anschließender Spiegelung an der x-Achse
 $g_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$: Spiegelung an der y-Achse
 $g_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$: Ordinatenhalbierung mit anschließender Spiegelung an der y-Achse
 $g_5(x) = 3^{x-1}$: Ordinatendrittelung bzw. Verschiebung um 1 in pos. x-Richtung

Eigenschaften von Exponentialfunktionen (zusätzliche Infos): Die Graphen von Funktionen mit $f(x) = a^x$ verlaufen immer oberhalb der x-Achse. Da $a > 0$ gehen alle Graphen durch den Punkt $P(1, 0)$.

Für $a > 1$ ist mit $x_2 > x_1$ auch $a^{x_2} > a^{x_1}$; der Graph von f wächst. Für $a < 1$ folgt aus $x_2 > x_1$ stets $a^{x_2} < a^{x_1}$; der Graph von f fällt.

Für $a > 1$ gilt: $a^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$; die x-Achse ist waagerechte Asymptote. Für $0 < a < 1$ und $x \rightarrow +\infty$ ist die x-Achse ebenfalls Asymptote.

Aufgabe 67

$k = \ln(a)$

Aufgabe 68

Symmetrisch zueinander sind a,c und e,f.

Aufgabe 69

Seien $f_a(x) = x - ae^x$ und $f_b(x) = x - be^x$ mit $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Durch Berechnung der Nullstellen von $x - ae^x = x - be^x$ ergibt sich $a = b$. Somit gibt es für $a \neq b$ keinen Schnittpunkt.

Aufgabe 70

$$f_1(x) : \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

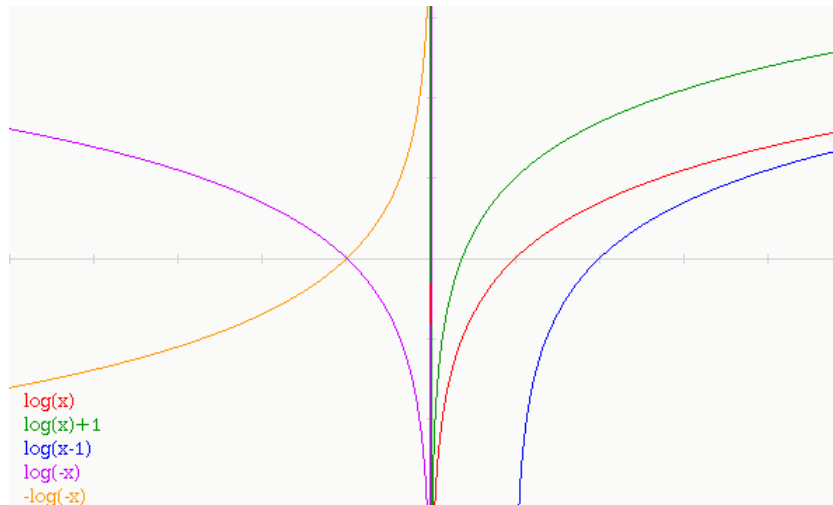
$$f_2(x) : \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$$

$$f_3(x) : \frac{x}{x+1} > 0 \text{ wenn } \{x > 0 \wedge x+1 > 0\} \text{ oder } \{x < 0 \wedge x+1 < 0\} \Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x > 0\}$$

$$f_4(x) : \frac{1-x}{1+x} > 0 \text{ wenn } \{1-x > 0 \wedge 1+x > 0\} \text{ oder } \{1-x < 0 \wedge 1+x < 0\} \Rightarrow \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$$

$$f_5(x) : \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

Aufgabe 71



$g_1(x) = \ln(x) + 1$: Verschiebung um 1 in positiver y-Richtung

$g_2(x) = \ln(x - 1)$: Verschiebung um 1 in positiver x-Richtung

$g_3(x) = \ln(-x)$: Spiegelung an der y-Achse

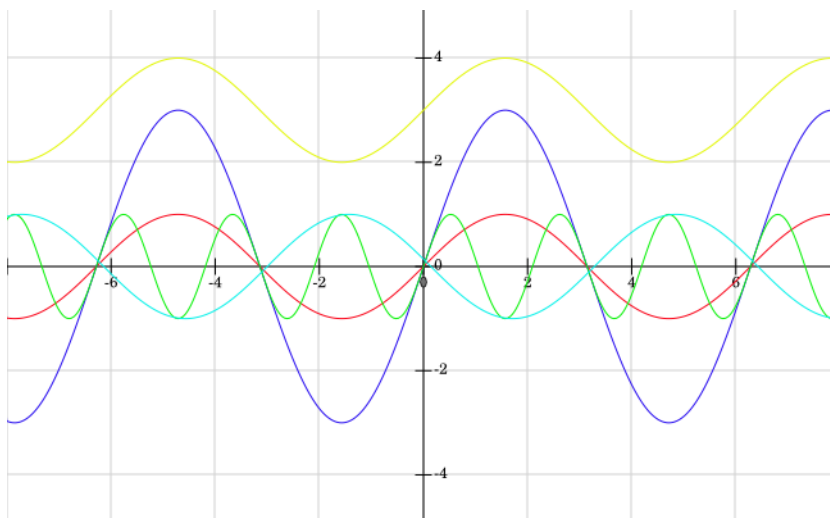
$g_4(x) = -\ln(-x)$: Spiegelung an der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse

Aufgabe 72

- a) $\mathbb{D} = (-\infty, 0]$, $x = 1 - e^{e^2}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, $x = 1 \vee x = e^3$ c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, $x = 0 \notin \mathbb{D} \vee x = 1$
d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, $x = 0 \notin \mathbb{D} \vee x = e$ e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, keine Nullstelle f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x = 1 - \frac{1}{3} \ln(2)$

Aufgabe 73

$\sin(x)$ ist der rote Graph.



$g_1(x) = 3 \sin(x)$: blau; Streckung entlang y-Achse; Ordinatenverdreifachung

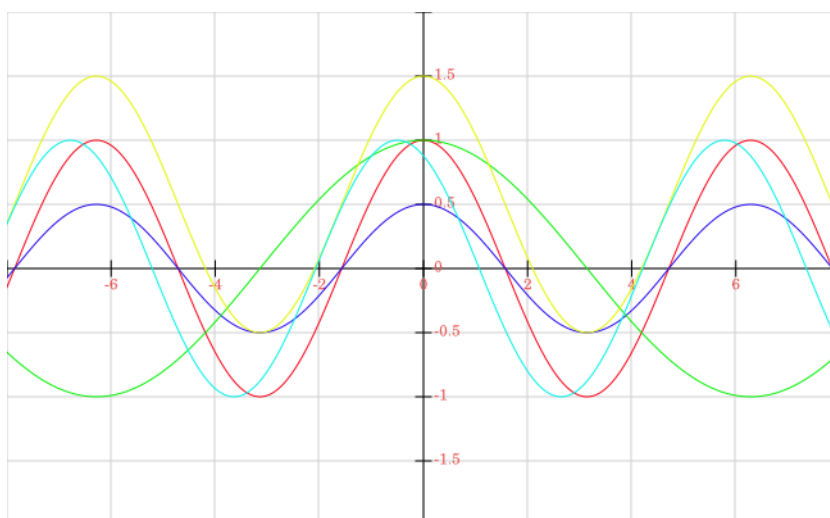
$g_2(x) = \sin(3x)$: grün; Stauchung entlang x-Achse

$g_3(x) = 3 + \sin(x)$: gelb; Verschiebung in positive y-Richtung um 3

$g_4(x) = \sin(x + 3)$: türkies; Verschiebung in negative x-Richtung um 3.

Aufgabe 74

$\cos(x)$ ist der rote Graph.



$f_1(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$: blau; Stauchung entlang y-Achse

$f_2(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$: grün; Streckung entlang x-Achse

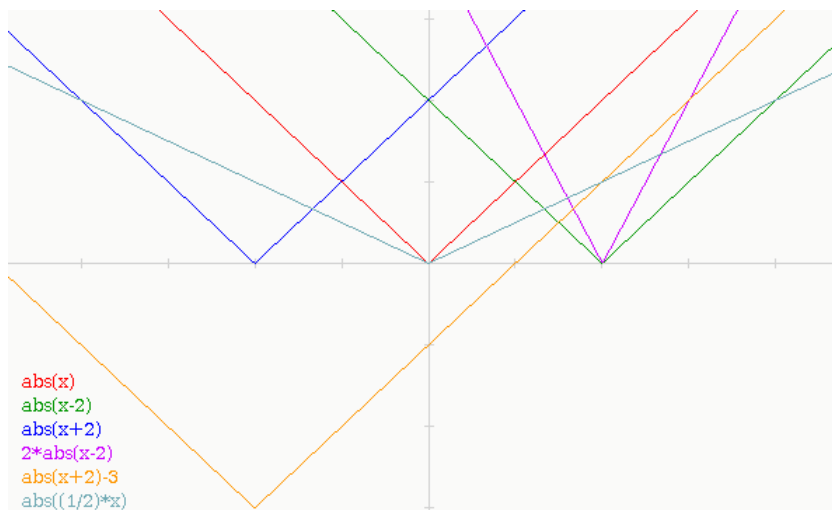
$f_3(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$: gelb; Verschiebung in positive y-Richtung um $\frac{1}{2}$

$f_4(x) = \cos(x + \frac{1}{2})$: türkies; Verschiebung in negative x-Richtung um $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 75

- a) $x = \pm\sqrt{2k\pi}, k \in \mathbb{N}_0$ b) $x = \left(\frac{3}{4} + k\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$ c) $x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d) $x = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 76



$g_1(x) = |x - 2|$: Verschiebung um 2 in positive x-Richtung

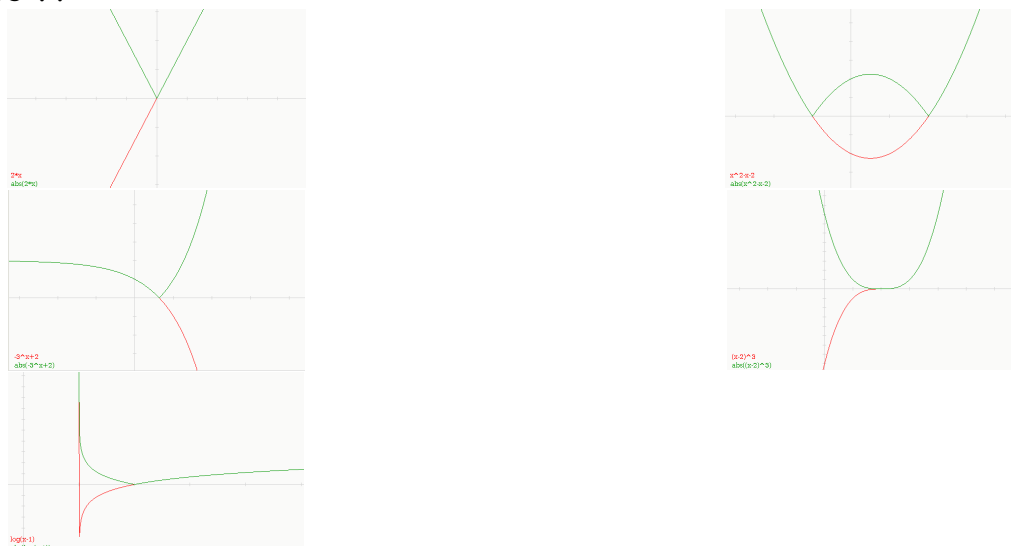
$g_2(x) = |x + 2|$: Verschiebung um 2 in negative x-Richtung

$g_3(x) = 2|x - 2|$: Verschiebung um 2 in positive x-Richtung und Ordinatenverdopplung

$g_4(x) = |x + 2| - 3$: Verschiebung um 2 in negative x-Richtung und Verschiebung um 3 in negative y-Richtung

$g_5(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$: Ordinatenhalbierung

Aufgabe 77



Die Betragsfunktionen entstehen jeweils, indem alle Teile von f unterhalb der x-Achse an der x-Achse nach oben gespiegelt werden.

Aufgabe 78

$$\text{a) } a_n = 2(-1)^{n+1} \quad \text{b) } a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \quad \text{c) } a_n = 2^n - 1 \quad \text{d) } a_n = n^n$$

Aufgabe 79

a) Die Folge ist monoton wachsend, durch -2 nach unten und durch 0 nach oben beschränkt und somit konvergent.

b) Die Folge ist streng monoton wachsend, durch 0 nach unten und nach oben nicht beschränkt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

c) Die Folge ist alternierend, nicht beschränkt und somit auch nicht konvergent.

d) Die Folge ist monoton wachsend, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Aufgabe 80

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5}{n} = \infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 20n^2 + 3}{4n^2 - 11n + 2} = -5 \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 10^{50}n^2}{n^3 + 1} = 0$$

Aufgabe 81

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16} = \frac{1}{8} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6} = \frac{108}{11} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^5 + 3x^2 - 1}{5x^5 - x + 10} = -\frac{2}{5}$$

Aufgabe 82

$a = 3$ und $b = 0$

Aufgabe 83

f ist an der Stelle $x = 0$ nicht stetig.