

Aufgabensammlung Vorkurs Mathematik für Studierende technischer Fächer und für Studierende der Chemie

Aufgabe 1

Es seien A, B, C Aussagen. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen die Gültigkeit der folgenden Regeln.

- a) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$
- b) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- c) $\neg(\neg A) \iff A$ (Doppelte Verneinung)
- d) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
- e) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$

Aufgabe 2

Seien A, B, C Aussagen. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen, ob die folgenden zusammengesetzten Aussagen Tautologien sind.

- a) $(A \wedge (A \implies B)) \iff (A \wedge B)$
- b) $(\neg(A \vee B)) \iff ((\neg A) \wedge (\neg B))$
- c) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
- d) $((A \wedge B) \implies C) \iff (A \implies (B \implies C))$

Aufgabe 3

Verneinen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Alle im März 2015 in Wuppertal zugelassenen Autos der Marke Fiasko verbrauchen mehr als 10 l Benzin pro 100 km Autobahnfahrt.
- b) Im Vorkurs Mathematik für Ingenieure an der Uni Wuppertal gibt es einen (zukünftigen) Maschinenbaustudenten, der aus Köln oder Dortmund kommt.

Aufgabe 4

Es seien die Mengen $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ und $D = \{6\}$ gegeben. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $A \setminus B$
- d) $B \setminus A$
- e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- f) $A \cap D$
- g) $A \cup B \cup C \cup D$

Aufgabe 5

Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums X-Schlau. F sei die Menge aller Schülerinnen, M die Menge aller Schülerinnen und Schüler, deren Lieblingsfach Mathematik ist, C die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die im Schulchor singen, B die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die das Fach Biologie nicht mögen und T die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Freizeit Tennis spielen.

Beschreiben Sie die folgenden Mengen:

$$\text{a) } \Omega \setminus M \quad \text{b) } M \cup C \quad \text{c) } F \cap T \quad \text{d) } M \setminus (B \cap T)$$

Aufgabe 6

Stellen Sie die folgenden Mengen möglichst einfach dar. Verwenden Sie Venn-Diagramme und die Rechenregeln aus der Vorlesung.

A, B, C seien Teilmengen der Grundmenge Ω .

$$\begin{aligned} \text{a) } M_1 &= [(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)] \cup (A \cap \bar{B}) & \text{b) } M_2 &= [(A \cap (\bar{A} \cup B)) \cup (B \cap (B \cup C))] \cup (B \cap C) \\ \text{c) } M_3 &= \overline{(A \cup B)} \cup (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Stellen Sie die beiden Seiten der Gleichung jeweils in einem Venn-Diagramm dar und entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

A, B, C seien dabei Teilmengen der Grundmenge Ω .

$$\text{a) } (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) = \overline{(A \cup B)} \cap C \quad \text{b) } \bar{A} \cup (B \cap C) = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup C)$$

Aufgabe 8

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an.

$$\text{a) } \{n^2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 8\} \quad \text{b) } \{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 5\} \quad \text{c) } \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 9

Geben Sie die folgenden Mengen in beschreibender Darstellung an.

$$\text{a) } \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{b) } \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \right\} \quad \text{c) } \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \right\}$$

Aufgabe 10

Erstellen Sie eine Liste aller möglichen verschiedenen Teilmengen der Menge $\{a, b, c\}$.

Wie viele gibt es, wenn die leere Menge und die Menge selbst dazu gehören?

Ebenso für die Menge $\{a, b, c, d\}$.

Aufgabe 11

Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 4\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 19\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 13 \leq x < 27\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 44\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : -33 < x < \infty\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

Aufgabe 12

Seien $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Bilden Sie das Kreuzprodukt $A \times B$.

Aufgabe 13

Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

- a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{11}$

Aufgabe 14

Wandeln Sie die Dezimalzahlen in Brüche um.

- a) 0.75 b) 0.35 c) 1.24

Aufgabe 15

Multiplizieren Sie aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

- a) $2x^2(3x - 7y) + 3y^2(x^2 - 2y) + 2xy(7x + 3xy)$
b) $(3x + 5y^2z)xy + (2x + 4xy)2z^2 - x(3xy + 5y^3z + 4z^2 + 8yz^2)$
c) $-cd^2(-c + d) + c^2d(c - d)$
d) $t(6u + 7s + 3t^2) - s(7t + 2s - 3u^2) + (-4u^2 - 3su + 6t)u$

Aufgabe 16

Fassen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln zusammen.

- a) $x^2 + 14xy + 49y^2$ b) $4a^2 - 9b^2$ c) $4a^4 - 20a^2b^2 + 25b^4$ d) $2x^4 - 18y^2$

Aufgabe 17

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie an, welche Werte die Variablen nicht annehmen dürfen.

- a) $a^2b^3a^{-1}b^5$ b) $\frac{t^p t^q - 1}{t^r t^s - 1}$ c) $\frac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10^0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}$ d) $\frac{(k^2)^3 \cdot k^4}{(k^3)^2}$ e) $\frac{(x+1)^2(x+1)^{-2}}{(x+1)^4(x+1)^{-3}}$

Aufgabe 18

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Welche Werte dürfen die Variablen annehmen?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{c(3b-2a)}{6ab} + \frac{4b-5c}{10a} - \frac{b(4c-5a)}{10ac} + \frac{3b^2+8c^2}{6bc} & \text{b) } \frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}} \\ \text{c) } \frac{3s+t}{2s^2+2st} - \frac{s^2+t^2}{2s^2t+2st^2} + \frac{2s-5t}{4st+4t^2} & \end{array}$$

Aufgabe 19

- a) 12000 Euro werden mit 4 % Zinsen pro Jahr auf einem Konto angelegt, wobei die am Jahresende fälligen Zinsen jeweils dem Guthaben zugeschlagen werden. Wie hoch ist das Guthaben nach 15 Jahren?
- b) Wie viel Geld hätten Sie vor 5 Jahren bei einer Bank mit 6% pro Jahr anlegen müssen, um heute einen Betrag von 50.000 Euro zu erhalten?

Aufgabe 20

- a) Der Gewinn eines Unternehmens stieg von 2000 auf 2001 um 20 % und nahm dann von 2001 auf 2002 um 17 % ab. In welchem der Jahre 2000 und 2002 war der Gewinn höher?
- b) Bei welcher prozentualen Zunahme von 2000 auf 2001 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?
- c) Bei welcher prozentualen Abnahme von 2001 auf 2002 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?

Aufgabe 21

Für welche Werte von $a, x, y \in \mathbb{R}$ existiert die jeweils angegebene Wurzel?

$$\text{a) } \sqrt{4+a} \quad \text{b) } \sqrt{-3-3y} \quad \text{c) } \sqrt{x^2-1} \quad \text{d) } \sqrt{-x^2-1} \quad \text{e) } \sqrt{1-a^2}$$

Aufgabe 22

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. a, b, x und y seien dabei so gewählt, dass alle auftretenden Terme definiert sind.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y} & \text{b) } \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}} & \text{c) } (\sqrt{b}-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{b}+\sqrt{5})^2 \\ \text{d) } \sqrt{9a^2-6a+1} & \text{e) } \frac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}} & \text{f) } \sqrt{a^2-10a+25} \end{array}$$

Aufgabe 23

Machen Sie die jeweils auftretenden Nenner rational und vereinfachen Sie.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{b) } 4\sqrt{6t} - \frac{5t\sqrt{2}}{\sqrt{3t}} \text{ für } t > 0 \\ \text{c) } \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ für } a, b > 0 & \end{array}$$

Aufgabe 24

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen. Zum Teil sind die binomischen Formeln zu verwenden. Geben Sie an, für welche Werte der Variablen der Term definiert ist.

$$\text{a) } \sqrt[8]{x^2 y^4 \sqrt[4]{y^{12}}} \quad \text{b) } \sqrt[4]{(x+1)^8} \cdot \sqrt[4]{x+1} \quad \text{c) } \frac{12 - 20\sqrt{s}}{\sqrt{36 + 120\sqrt{s} + 100s}} \cdot \frac{(3 + 5\sqrt{s})^2}{9 - 25s}$$

Aufgabe 25

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\text{a) } \log_5 25 \quad \text{b) } \lg 0.001 \quad \text{c) } \log_{17} 1 \quad \text{d) } \log_2 (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3}) \quad \text{e) } \log_8 \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \right)$$

Aufgabe 26

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Summen bzw. Differenzen und Produkte bzw. Quotienten.

$$\text{a) } \log_3 (3x) \quad \text{b) } \log_5 \left(\frac{5a}{y} \right) \quad \text{c) } \lg \left(\frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}} \right) \quad \text{d) } \lg \left[\left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}} \right)^{10} \right] \quad \text{e) } \lg \left(\frac{5\sqrt{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \right)$$

Aufgabe 27

Schreiben Sie die folgenden Terme mit nur einem Logarithmus auf.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 \log_5 u + 3 \log_5 v & \quad \text{b) } \lg(a+b) + \lg(a+b)^2 - \frac{1}{2} \lg a - \frac{1}{3} \lg b \\ \text{c) } \frac{1}{3} \log_2 x + \frac{2}{3} & \quad \text{d) } \log_4(x^2 - 1) - \log_4(x - 1) - \log_4(x + 1)^2 \\ \text{e) } [(\log_4 x^2) : (\log_4 x)] - 2 & \quad \text{f) } \left[(\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{b}) : \left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{b} \right) \right] \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{g) } 2 \lg a - \lg \frac{a}{a^2 + 1} - \lg a^3 & \end{aligned}$$

Aufgabe 28

Formen Sie die folgenden Terme so um, dass sie mit einem Taschenrechner berechnet werden können.

$$\text{a) } \log_4 130 - \log_3 20 \quad \text{b) } \log_{\frac{1}{3}} 234 + \lg 93 - \log_2 92$$

Aufgabe 29

Schreiben Sie die folgenden Terme als Summe.

$$\text{a) } \ln \left(\sqrt[4]{\frac{a^3 b}{c^2 d}} \right) \quad \text{mit } a, b, c, d > 0 \quad \text{b) } \ln \left(\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}} \right) \quad \text{mit } x > 0$$

Aufgabe 30

Überlegen Sie, wie man die Werte $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mit Hilfe geeigneter geometrischer Überlegungen ermitteln kann.

Aufgabe 31

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 & \text{b) } 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} \\ \text{c) } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} & \text{d) } -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \end{array}$$

Aufgabe 32

Berechnen Sie die folgenden Summen.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{i=3}^{10} i(i-1) & \text{b) } \sum_{j=1}^5 (-2)^j & \text{c) } \sum_{l=-2}^2 \sqrt{l^2} & \text{d) } \sum_{k=0}^3 (x+1)^k \end{array}$$

Aufgabe 33

Berechnen Sie.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 3! & \text{b) } 4! & \text{c) } 5! & \text{d) } \binom{20}{5} \\ \text{e) } \binom{403}{3} & \text{f) } \binom{10}{5} - \binom{11}{5} & \text{g) } \frac{\binom{102}{27}}{\binom{100}{26}} \end{array}$$

Aufgabe 34

Berechnen Sie die Summen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

$$\text{a) } (a+2)^5 \quad \text{b) } (2x-3)^4$$

Aufgabe 35

Verwenden Sie zur Berechnung den binomischen Lehrsatz. Dabei sind a, b jeweils speziell zu wählen.

$$\text{a) } \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} (-1)^i \quad \text{b) } \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \quad \text{c) } \sum_{l=0}^n \binom{n}{i} \quad \text{d) } \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} 2^j \quad \text{e) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

Aufgabe 36

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichungen in \mathbb{R} .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0 & \text{b) } 2x(x-1) + 6 = 4(x+1) & \text{c) } 11x - 3 = 30x^2 \\ \text{d) } 7x^2 = 8x & \text{e) } 4x^2 + 4 = 8x & \text{f) } -9x^2 = 1 + 6x \end{array}$$

Aufgabe 37

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$\text{i) } x^2 + 3x + a = 0 \quad \text{ii) } x^2 + ax + 4 = 0$$

genau eine, zwei, gar keine Lösung?

b) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ ist.

Aufgabe 38

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

$$\text{a) } \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{b) } \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{c) } \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\text{d) } x = \sqrt{3x + 10} \quad \text{e) } \sqrt{x + \sqrt{x + 6}} = 6 \quad \text{f) } \sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$$

Aufgabe 39

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

$$\text{a) } \frac{x - 2}{2x + 2} = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1} - \frac{x}{x + 1} \quad \text{b) } \frac{x^2}{x + 1} + \frac{x - 3}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{x - 1} \quad \text{c) } 2 - \frac{10x - 13}{x - 2} = \frac{x^2 + x + 1}{2 - x}$$

Aufgabe 40

Geben Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Logarithmusgleichungen an und lösen sie diese.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lg x = 3 & \text{b) } \lg x = \frac{1}{3} & \text{c) } \log_2 x = \frac{3}{2} & \text{d) } 3 \lg x = 1 \\ \text{e) } \lg(3x) = \frac{1}{2} & \text{f) } \lg x = \lg 3 - \lg 2 & \text{g) } \lg x + \lg(4x) = 2 & \text{h) } \lg x - \lg \sqrt{x} = 2 \lg 2 \end{array}$$

Aufgabe 41

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 4^x = 64 & \text{b) } 5^x = 10 & \text{c) } 3^{x-1} = 7 \\ \text{d) } 2^{x-2} - 2^{x+1} = 14 & \text{e) } 9 \cdot 2^{x+3} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 9(3^x - 2^x) & \end{array}$$

Aufgabe 42

Geben Sie für die folgenden Gleichungen jeweils den Definitionsbereich an, und bestimmen Sie die Lösungsmengen mit Hilfe geeigneter Substitutionen.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a^4 - 13a^2 + 36 = 0 & \text{b) } w^4 - 5w^2 + 4 = 0 & \text{c) } y^3 - y^6 = 1 \\ \text{d) } x^{-2} - 2x^{-1} = 15 & \text{e) } 2^{x+1} - 4^x - 1 = 0 & \text{f) } (\ln x)^2 - \ln(x^4) - 21 = 0 \end{array}$$

Aufgabe 43

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Achten Sie genau auf die nötigen Fallunterscheidungen.

$$\text{a) } |x - 7| = 2 \quad \text{b) } |3x + 6| = x \quad \text{c) } |3x - 5| = 2|x + 2| \quad \text{d) } |x - 4| + |2 - x| = 2$$

Aufgabe 44

a) Berechnen Sie den Wert der folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0?$$

Aufgabe 45 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{l} \frac{x}{2} - y = 1 \\ x + y = 3 \end{array}, \quad \begin{array}{l} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -5 \end{array}, \quad \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ -x + \frac{y}{2} = -\frac{7}{2} \end{array}$$

Aufgabe 46

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & - & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 20 \end{array}$$

Aufgabe 47

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 16 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

Aufgabe 48

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } -x - 3 \leq 5 & \text{b) } 3x + 5 < x - 13 & \text{c) } 3y - (y - 1) \geq y - (1 - y) \\ \text{d) } \frac{2a - 4}{3} \leq 7 & \text{e) } \frac{1}{3}(1 - x) \geq 2(x - 3) & \text{f) } \frac{t}{24} - (t + 1) + \frac{3t}{8} < \frac{5}{12}(t + 1) \end{array}$$

Aufgabe 49

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Ungleichungen.

$$\text{a) } x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \leq 2x + 1 \quad \text{b) } -x^2 + 2x \geq 35 \quad \text{c) } 4x^2 + 25 > 20x$$

Aufgabe 50

Geben Sie die Definitionsmengen und die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an.

$$\text{a) } \frac{y}{y+5} \geq -4 \quad \text{b) } \frac{x}{x+5} \leq -4 \quad \text{c) } \frac{3u+25}{u+3} \geq 2u-5$$

Aufgabe 51

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen. Führen Sie gegebenenfalls eine geeignete Substitution durch.

$$\text{a) } e^{2x} + 6 \leq 5e^x \quad \text{b) } x^4 + x^2 - 2 \geq 0 \quad \text{c) } [\ln(x)]^2 + 4 \geq 5 \ln(x)$$

Aufgabe 52

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |2x-1| \leq 4 & \text{b) } |1-0.5x| \geq x+4 & \text{c) } |x-2| \leq |4-3x|+1 \\ \text{d) } |-2x-3| > |x+1|+4 & \text{e) } 2|x+2| - |x-1| + |x+1| > 0 & \end{array}$$

Aufgabe 53

Entscheiden Sie, ob die folgenden Ungleichungen für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültig sind. (Mit Begründung!)

$$\text{a) } x+1 > x \quad \text{b) } x^2 > x \quad \text{c) } x+x > x \quad \text{d) } x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Aufgabe 54

Skizzieren Sie im \mathbb{R}^2 die Punktmenge, die durch die folgenden Ungleichungen beschrieben werden.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x-y < 0 & \text{b) } y \leq x^2 & \text{c) } |x| \leq |y| \\ \text{d) } x^2 + y^2 \leq 4 & \text{e) } (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4 & \end{array}$$

Aufgabe 55

Gegeben sei die lineare Funktion $y = -\frac{4}{7}x + 4$

a) Zeichnen Sie die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem.

b) Wo schneidet die Gerade die x -Achse und die y -Achse?

c) Zeigen Sie durch Umformung, dass man die Geradengleichung auch in der Form $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ angeben kann.

Was fällt Ihnen auf? Können Sie eine allgemeine Regel angeben?

Aufgabe 56

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden,

- a) die durch den Punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{11}\right)$ verläuft und die Steigung $a = \frac{1}{3}$ besitzt,
- b) die die Steigung $a = -\frac{1}{2}$ besitzt und die x -Achse bei 5 schneidet,
- c) die parallel zu der Geraden durch die Punkte $P(-72, -60)$ und $Q(-24, -20)$ verläuft und durch den Ursprung geht.

Aufgabe 57

Bestimmen Sie jeweils (falls möglich) die gemeinsamen Punkte der Geraden mit den angegebenen Gleichungen.

a) $y = -2x + 8$ und $-y + 3x = 7$ b) $y = \frac{3}{2}x + 2$ und $y = \frac{3}{2}x - 5$ c) $y = \frac{3}{7}x + 0.5$ und $y - \frac{5}{10} = \frac{9}{21}x$

Wie lässt sich an den Funktionstermen ablesen, ob zwei Geraden keine gemeinsamen Punkte besitzen?

Aufgabe 58

Es sei $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

- a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $x \in [-4, 2]$ für ganzzahlige Werte von x .
- b) Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen mit Hilfe der in a) ermittelten Werte.
- c) Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen von f .
- d) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitelpunkt von f .

Aufgabe 59

Bestimmen Sie für jede der folgenden quadratischen Funktionen die Scheitelpunktform und (falls möglich) die Nullstellenform.

a) $f_1(x) = x^2 + 4x$ b) $f_2(x) = x^2 + 6x + 18$ c) $f_3(x) = -3x^2 + 30x - 30$
d) $f_4(x) = 9x^2 - 6x - 44$ e) $f_5(x) = -x^2 - 200x + 30000$ f) $f_6(x) = x^2 + 100x - 20000$

Aufgabe 60

Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ und } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}.$$

- a) Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen in ein Koordinatensystem.
- b) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe 61

Sei $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und geben Sie die faktorisierte Darstellung an. Für welche Werte von x ist $P(x)$ positiv, für welche negativ?

Aufgabe 62

Sei $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$. Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ und bestimmen Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \leq 0\}$.

Aufgabe 63

Bestimmen Sie alle Nullstellen von $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 49x^2 - x + 12$.

Aufgabe 64

Sei

$$f(x) = \frac{2x^5 - 15x^4 + 36x^3 - 26x^2 - 6x + 9}{-2x^3 + 6x^2 + 2x - 6}.$$

- Bestimmen Sie die faktorisierten Darstellungen des Zähler- und des Nennerpolynoms und bestimmen Sie daraus die "gekürzte Funktion" $g(x)$.
- Bestimmen Sie sämtliche Null- und Polstellen der "gekürzten Funktion" $g(x)$.
- Zerlegen Sie $g(x)$ in eine Summe aus einem Polynom und einer rationalen Funktion, deren Zählergrad kleiner ist als ihr Nennergrad.

Aufgabe 65

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ für die Funktionen

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2} \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$$

Aufgabe 66

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $f(x) = 3^x$. Wie erhält man den Graphen der Funktion g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 aus dem Graphen von f ? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 3^x + 1 & g_2(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3^x & g_3(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ g_4(x) &= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x & g_5(x) &= 3^{x-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 67

Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$, kann mit der Basis e in der Form $f(x) = e^{kx}$ dargestellt werden. Wie ist dabei k zu wählen?

Aufgabe 68

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Funktionswerte an den Stellen $-1, 0$ und 1 . Skizzieren Sie dann den ungefähren Verlauf der Funktionsgraphen. Welche der Funktionen sind bzgl. der y -Achse symmetrisch zueinander?

$$\begin{aligned} \text{a) } f_1(x) &= 2^x & \text{b) } f_2(x) &= 1.5 \cdot 2^{-x} & \text{c) } f_3(x) &= \frac{1}{2^x} \\ \text{d) } f_4(x) &= 3^{-x} & \text{e) } f_5(x) &= \frac{1}{2} \cdot 3^x & \text{f) } f_6(x) &= \frac{1}{2} \cdot 3^{-x} \end{aligned}$$

Aufgabe 69

Gegeben sei die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x - ke^x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass sich zwei Funktionen der Schar mit verschiedenen Werten für k nicht schneiden.

Aufgabe 70

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der folgenden Logarithmusfunktionen.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(\sqrt{x}) & f_2(x) &= \ln(cx), c < 0 & f_3(x) &= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ f_4(x) &= \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) & f_5(x) &= \ln\left(\frac{c^2}{x}\right), c \neq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 71

Zeichnen Sie die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$. Wie erhält man die Graphen der Funktionen g_1, g_2, g_3, g_4 aus dem Graphen von f ? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = \ln(x) + 1 \quad g_2(x) = \ln(x-1) \quad g_3(x) = \ln(-x) \quad g_4(x) = -\ln(-x)$$

Aufgabe 72

Bestimmen Sie Definitionsbereich und Nullstellen der folgenden Funktionen.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{\ln(1-x)} - e & f_2(x) &= \ln(x)(\ln(x) - 3) & f_3(x) &= x^3 \ln(x^3) \\ f_4(x) &= e^x \cdot \ln(x) - e^x - \ln(x) + 1 & f_5(x) &= \ln(5x^2) - 4 \ln(\sqrt{x}) - 3 & f_6(x) &= \ln(2e^{2x-3}) - \ln(e^{-x}) \end{aligned}$$

Aufgabe 73

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$g_1(x) = 3 \sin(x) \quad g_2(x) = \sin(3x) \quad g_3(x) = 3 + \sin(x) \quad g_4(x) = \sin(x+3)$$

und vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $g(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 74

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \cos(x) \quad f_2(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \quad f_3(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) \quad f_4(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

und vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $f(x) = \cos(x)$.

Aufgabe 75

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right) \quad g_2(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad g_3(x) = \tan(x-1) \quad g_4(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Aufgabe 76

Zeichnen Sie den Graphen der Betragsfunktion $f(x) = |x|$. Wie erhält man jeweils den Graphen der Funktion g_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, aus dem Graphen von f ? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = |x - 2| \quad g_2(x) = |x + 2| \quad g_3(x) = 2|x - 2| \quad g_4(x) = |x + 2| - 3 \quad g_5(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$$

Aufgabe 77

Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion f sowie den Graphen von $g(x) = |f(x)|$ in ein Koordinatensystem. Wie entsteht der Graph von g aus dem Graphen von f ?

$$f_1(x) = 2x \quad f_2(x) = x^2 - x - 2 \quad f_3(x) = -3^x + 2 \quad f_4(x) = (x - 2)^3 \quad f_5(x) = \ln(x - 1)$$

Aufgabe 78

Geben Sie das Bildungsgesetz der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an.

- a) $2, -2, 2, -2, 2, \dots$ b) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$
c) $1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$ d) $1, 4, 27, 256, 3.125, 46.656, \dots$

Aufgabe 79

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz.

a) $a_n = -\frac{2}{n}$ b) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ c) $a_n = (-1)^n n^2$ d) $a_n = 4^n$

Aufgabe 80

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5}{n}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 20n^2 + 3}{4n^2 - 11n + 2}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 10^{50}n^2}{n^3 + 1}$

Aufgabe 81

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^5 + 3x^2 - 1}{5x^5 - x + 10}$.

Aufgabe 82

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f: \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für } x \in [0, 1], \\ ax - x^3 + x & \text{für } x \in (1, 2), \\ \frac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für } x \in [2, 3], \end{cases}$$

auf $\mathbb{D}_f = [0, 3]$ stetig ist.

Aufgabe 83

Ist die Funktion $f: \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D}_f = [-9, \infty)$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{7} & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig im ganzen Definitionsbereich \mathbb{D}_f ?