Bergische Universität Wuppertal, Fachbereich C (Mathematik)
Prof. Dr. Margareta Heilmann
Mathematik für Sicherheitstechniker (Master)

Sommersemester 2014, 7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1
Gegeben sei die Funktion $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{j\omega nt}$, $N \in \mathbb{N}$, wobei wieder $\omega = 2\pi/T$, $T > 0$, gilt (sog. Dirichletkern).

a) Zeigen Sie, dass sich $D_N(t)$ schreiben lässt als

$$D_N(t) = \begin{cases} 2N+1 & \text{falls } \omega t = 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\omega t\right)}{sin(\frac{1}{2}\omega t)} & \text{falls } \omega t \neq 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Summenformel.

b) Zeigen Sie, dass $D_N(t)$ T-periodisch ist.

c) Sei $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-periodisch und bezeichne $S_N\{x\}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, \mathrm{e}^{j\omega nt}$ die N-te Teilsumme der Fourierreihe von x. Zeigen Sie, dass gilt:

$$S_N\{x\}(t) = (x * D_N)(t)\,.$$

d) Berechnen Sie

$$\frac{1}{T}\int_0^T D_N(t)\,dt\,.$$

e) Sei wieder $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ T-periodisch. Zeigen Sie für $t \in (0,T)$ die Darstellung

$$S_N\{x\}(t) - x(t) = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \{x(t+s) - 2x(t) + x(t-s)\} D_N(s)\,ds$$

für den Fehler bei der Approximation von x durch die N-te Teilsumme der Fourierreihe an der Stelle $t \in (0,T)$.

Abgabe der Lösungen bis Montag, 24. Mai 2014, 15 Uhr,
Gruppe 1, Fach 14, Ebene D.13., Gruppe 2, Fach 65, Ebene D.13.

Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen finden Sie im Internet:
http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/site/mathemaster.html