Skript zur Vorlesung
Mathematik für Sicherheitstechniker
Sommersemester 2014
(Master Studiengang)

Prof. Dr. M. Heilmann
Fachbereich C, Mathematik
Bergische Universität Wuppertal

März 2014

Inhaltsverzeichnis

4 Laplace Transformation

4.1 Vorbemerkungen

Wir behandeln in diesem Kapitel eine weitere Transformation, die in Anwendungen bei Problemen in Naturwissenschaft und Technik eine Rolle spielt. Häufig wird die Laplace Transformation zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und entsprechender Systeme von Differentialgleichungen verwendet.

4.2 Definition der Laplace Transformation

Im folgenden betrachten wir generell Funktionen $x(t)$, die für $t \geq 0$ definiert sind. Für $t < 0$ denken wir uns die Funktionen mit Null fortgesetzt, ohne dies jedes Mal explizit anzugeben.

Definition 4.1 *Eine Funktion $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* Laplace transformierbar*, wenn das uneigentliche Integral*

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = X(s)$$

für ein $s \in \mathbb{C}$ existiert. Dann heißt $X(s)$ Laplacetransformierte *von $x(t)$.*

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Laplace-Transformierten liefert der folgende Satz.

Satz 4.2 *Sei $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, und es existiere ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\int_0^\infty |x(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty\,,$$

dann konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

für alle $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma \geq \sigma_0$.

Beweis: Da $|\,\mathrm{e}^{-st}| = |\,\mathrm{e}^{-\sigma t}| \cdot |\,\mathrm{e}^{-j\tau t}| = e^{-\sigma t}$, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |x(t)\,\mathrm{e}^{-st}|\,dt &= \int_0^\infty |x(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,dt \\ &\leq \int_0^\infty |x(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma_0 t}\,dt \end{aligned}$$

$\square$.

Bemerkung 4.3 *Auch im Zusammenhang mit der Laplacetransformation verwendet man das Korrespondenzsymbol*

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, x(s)$$

Beispiel 4.4 *Sei $x(t) = 1$ für $t \geq 0$ (Sprungfunktion, Heavisidefunktion). Dann gilt für $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= -\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty \quad \textit{(da } \sigma \neq 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\,\mathrm{e}^{-sb} \end{aligned}$$

Nun gilt für $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$

$$\mathrm{e}^{-sb} = \underbrace{\mathrm{e}^{-b\sigma}}_{\substack{\longrightarrow 0\,(b\to\infty)\\ da\ \sigma>0}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-jb\tau}}_{beschränkt}$$

Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{s} \text{ für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} s > 0$$

bzw. kurz

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

Beispiel 4.5 *Sei $x(t) = t^n$ für $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass*

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ für } \operatorname{Re} s > 0$$

$n = 0$: vgl. Bespiel 4.4
$n \Rightarrow n+1$: Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{n+1}\}(s) &= \int_0^\infty t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&= -\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-st} t^{n+1}\Big|_0^\infty + \frac{n+1}{s} \underbrace{\int_0^\infty t^n\,\mathrm{e}^{-st}\,dt}_{=\mathcal{L}\{t^n\}(s)} \\
&= -\frac{1}{s} \underbrace{\lim_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-sb} b^{n+1}}_{=0 \text{ für } \operatorname{Re} s>0} + \frac{n+1}{s} \underbrace{\mathcal{L}\{t^n\}(s)}_{=\frac{n!}{s^{n+1}}} \\
&= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}
\end{aligned}$$

Also gilt die Korrespondenz

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Nicht jede Funktion ist Laplace-transformierbar. Man kann aber eine Klasse von Funktionen angeben, deren Wachstum nicht zu groß ist.

Satz 4.6 *Sei $x(t)$ stückweise stetig mit höchstens exponentiellem Wachstum, d.h.*

$$|x(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{kt} \text{ mit Konstanten } M, k \in \mathbb{R}$$

Dann existiert $\mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ für alle $s = \sigma + j\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > k$.

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}\{x(t)\}(s)| &\leq \int_0^\infty \underbrace{|x(t)|}_{\leq M\,\mathrm{e}^{kt}} \underbrace{|\mathrm{e}^{-st}|}_{=\mathrm{e}^{-t\sigma}}\,dt \\
&\leq M \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-\sigma+k)t}\,dt \\
&= \frac{M}{\sigma - k} \text{ für } \sigma > k
\end{aligned}$$

$\square$.

4.3 Korrespondenzen und Rechenregeln

Satz 4.7 (Linearität) *Seien* $x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s)$, $x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(s)$ *und* K_1, K_2 *Konstanten. Dann gilt*

$$K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet K_1 X_1(s) + K_2 X_2(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t)\}(s) = K_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s) + K_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}(s)\,.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Laplacetransformation. □.

Satz 4.8 (Skalierung) *Ist* $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$, *dann gilt für* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{x(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{x(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)\,.$$

Beweis: vgl. Übung □.

Satz 4.9 (Periodische Funktionen) *Sei* $x(t)$ T*-periodisch, d.h. hier im Zusammenhang mit der Laplace-Trnsformation*

$$x(t) = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } x(t + nT) = x(t) \text{ für } t \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-Ts}} \int_0^T x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

Beweis: Wir zerlegen das Integrationsintervall in die Teilintervalle $[0, T]$, $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, … der Länge T. Dies ergibt

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

Mit der Substitution $\tau = t - nT$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \underbrace{x(\tau + nT)}_{=x(\tau)}\ \underbrace{\mathrm{e}^{-s(\tau+nT)}}_{=\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{e}^{-snT}}\ d\tau \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-snT} \int_0^T x(\tau)\,\mathrm{e}^{-s\tau}\,d\tau \\
&= \left(\int_0^T x(\tau)\,\mathrm{e}^{-s\tau}\,d\tau\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-sT})^n\right)
\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-sT})^n = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

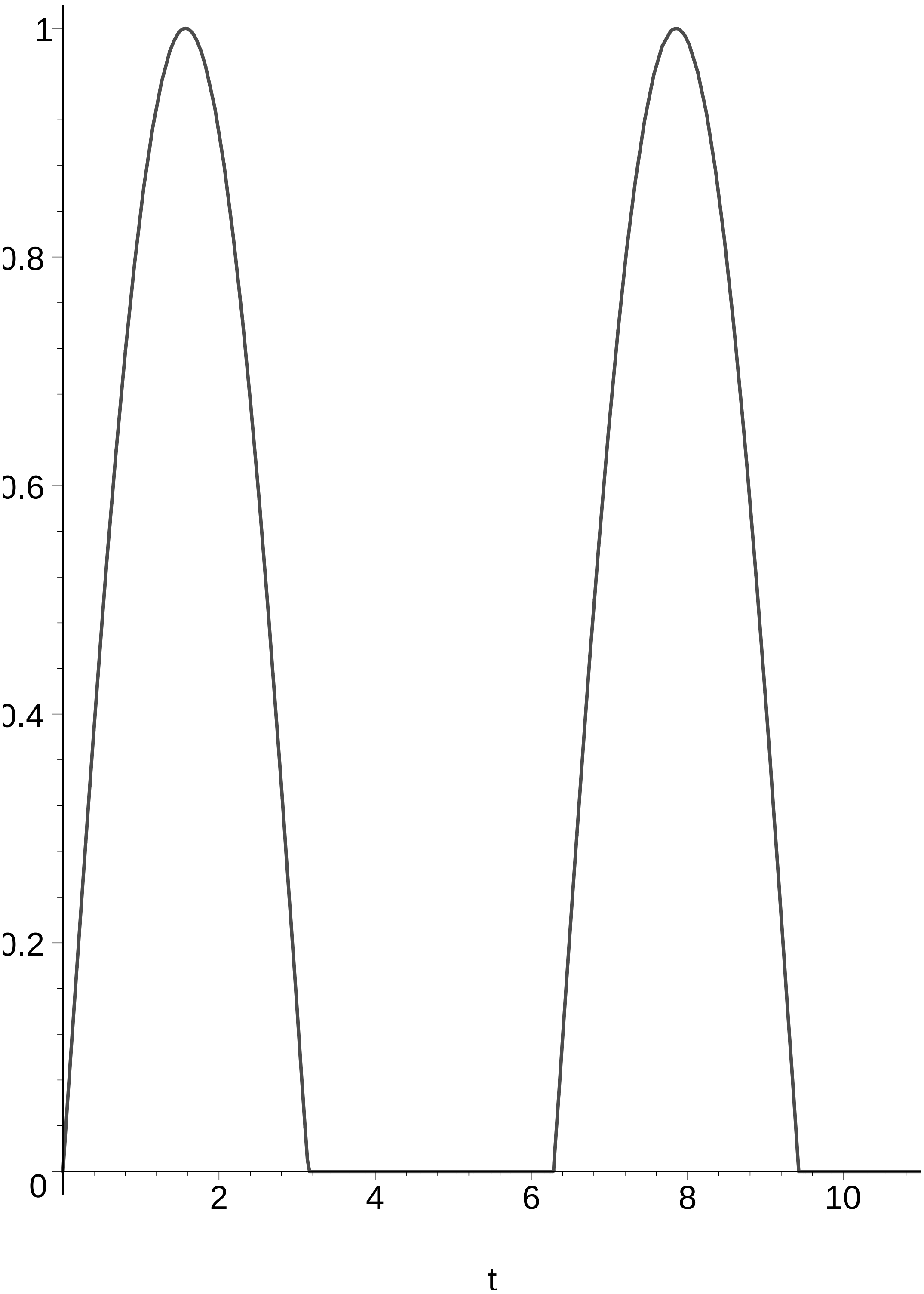
konvergiert für $\operatorname{Re} s > 0$, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-Ts}} \int_0^T x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

□.

Beispiel 4.10 *Sei*

$$x(t) = \begin{cases} \sin t \; falls \; t \geq 0 \;\; und \;\; \sin t \geq 0 \\ \;\; 0 \quad sonst \end{cases}$$



Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t)\}(s) &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi s}} \int_0^\pi \sin t\, \mathrm{e}^{-st}\, dt \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2j} \int_0^\pi \left\{ \mathrm{e}^{t(j-s)} - \mathrm{e}^{-t(j+s)} \right\} dt \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{j-s} \left[\mathrm{e}^{t(j-s)} - 1 \right] + \frac{1}{j+s} \left[\mathrm{e}^{-t(j+s)} - 1 \right] \right\}_0^\pi \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{j-s} \left[\underbrace{\mathrm{e}^{(j-s)\pi}}_{=-\mathrm{e}^{-s\pi}} - 1 \right] + \frac{1}{j+s} \left[\underbrace{\mathrm{e}^{-(j+s)\pi}}_{=-\mathrm{e}^{-s\pi}} - 1 \right] \right\} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi s}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi s}} \cdot \frac{1}{s^2+1} \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{s\pi}} \cdot \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Die folgenden Rechenregeln betreffen wieder Verschiebungen im Argument der Zeit- bzw. Bildfunktion.

Satz 4.11 (1. Verschiebungssatz) *Ist $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$, dann gilt für $a > 0$*

$$x(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-as} X(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\}(s) = \mathrm{e}^{-as} \mathcal{L}\{x(t)\}(s)\,.$$

Beweis: Mit der Substitution $\tau = t - a$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty x(t-a)\, \mathrm{e}^{-st}\, dt \\
&= \int_{-a}^\infty x(\tau)\, \mathrm{e}^{-s(\tau+a)}\, d\tau \\
&= \int_0^\infty x(\tau)\, \mathrm{e}^{-s\tau}\, \mathrm{e}^{-sa}\, d\tau \\
&= \mathrm{e}^{-sa} \mathcal{L}\{x(t)\}(s)
\end{aligned}$$

□.

Beispiel 4.12 *Sei $a > 0$ und*

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ falls } t \geq 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$x(t-a) = \begin{cases} 1 \text{ falls } t \geq a \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Mit $X(s) = \frac{1}{s}$ folgt aus dem 1. Verschiebungssatz

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\}(s) = \frac{1}{s}\, \mathrm{e}^{-as}$$

Satz 4.13 (2. Verschiebungssatz) *Ist* $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s)$*, dann gilt*

$$\mathrm{e}^{-ct}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s+c)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{e^{-ct}x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s+c)\,.$$

Dabei muss $s+c$ *im Definitionsbereich der Laplace-Transformierten von* $x(t)$ *liegen.*

Beweis: Man rechnet leicht nach, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-ct}x(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-ct}x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= \int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-(s+c)t}\,dt \\ &= \mathcal{L}\{x(t)\}(s+c)\end{aligned}$$

$\square$.

Beispiel 4.14 *Sei* $x(t) = \mathrm{e}^{-t}$ *für* $t \geq 0$ *und* $\tilde{x}(t) = 1$ *für* $t \geq 0$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}\tilde{x}(t)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\tilde{x}(t)\}(s+1) \\ &= \frac{1}{s+1} \text{ für } \operatorname{Re}(s+1) > 0\,, \text{ d.h. } \operatorname{Re} s > -1\end{aligned}$$

Satz 4.15 (1. Differentiationssatz) *Ist* $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s)$ *und sei* $x(t)$ *stückweise differenzierbar. Dann gilt*

$$x'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sX(s) - x(0^+)\,,$$

wobei $x(0^+) = \lim_{t\to 0+} x(t)$ *den rechtsseitigen Grenzwert bezeichnet, oder anders ausgedrückt*

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - x(0^+)\,.$$

Beweis: Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) &= \int_0^\infty x'(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= -x(0^+) + s\mathcal{L}\{x(t)\}(s)\,,\end{aligned}$$

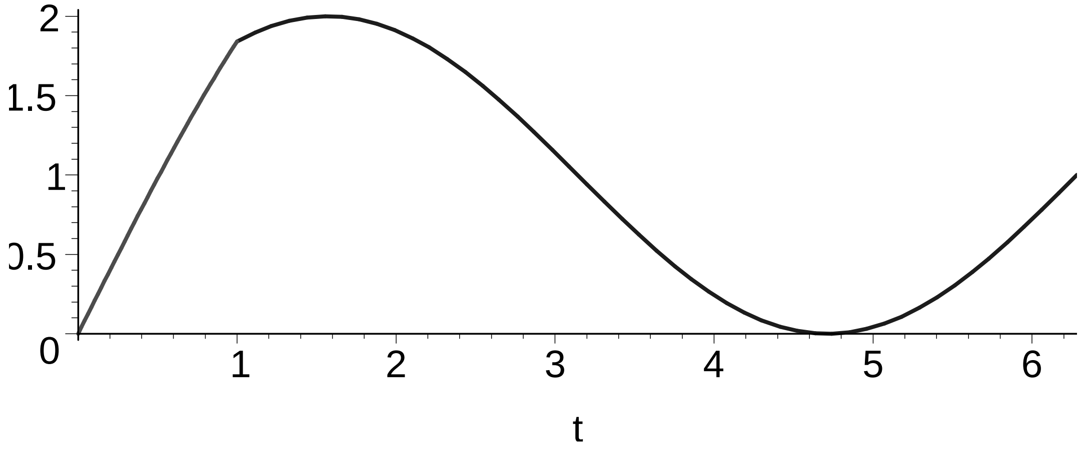
$\square$.

Bemerkung 4.16 *Allgemeiner kann man auch formulieren: Ist* $x(t)$ n*-mal differenzierbar, dann gilt*

$$x^{(k)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^k X(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^l x^{(k-1-l)}(0+)\,, \quad k = 0,1,\ldots,n\,.$$

Beispiel 4.17 *Sei*

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ t + \sin t & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + \sin t & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$



Wir definieren

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ falls } t < 0 \\ t \text{ falls } t \geq 0 \end{cases}, \quad x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \text{ oder } \sin t < 0 \\ \sin t & \text{falls } t \geq 0 \text{ und } \sin t \geq 0 \end{cases}$$

Dann gilt $x(t) = x_1(t) - x_1(t-1) + x_2(t) - x_2(t-\pi)$*. Mit den Korrespondenzen*

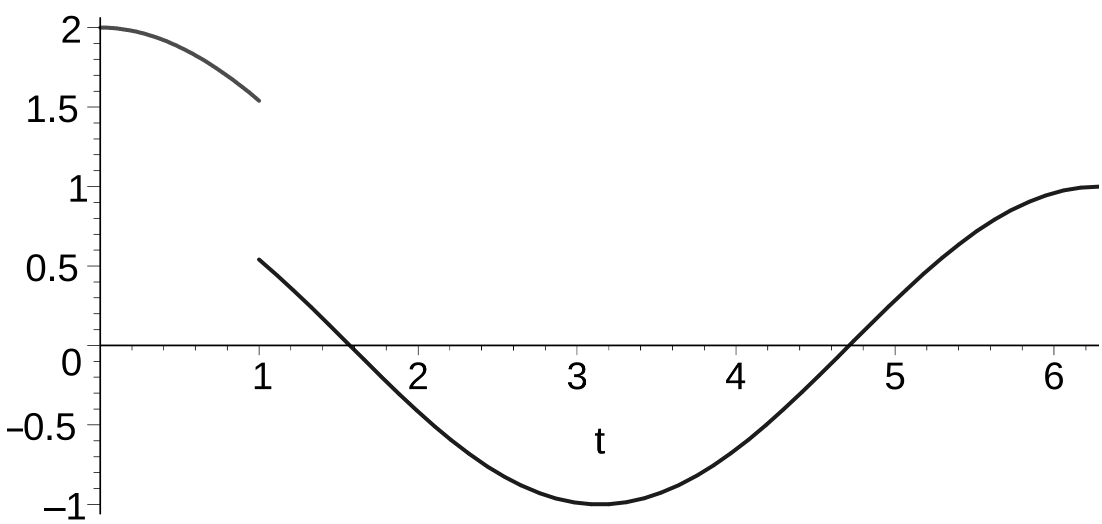
$$\begin{aligned} x_1(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2} \\ x_1(t-1) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-s} \cdot \frac{1}{s^2} \\ x_2(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}} \\ x_2(t-\pi) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-\pi s} \cdot \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi s}} \end{aligned}$$

folgt somit

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}(1-\mathrm{e}^{-s}) + \frac{1}{1+s^2}$$

Für die Ableitung

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1+\cos t & \text{falls } 0 < t < 1 \\ \cos t & \text{falls } t > 1 \end{cases}$$



erhalten wir mit Hilfe des 1. Differentiationssatzes

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - x(0^+) = \frac{1}{s}(1 - \mathrm{e}^{-s}) + \frac{s}{1+s^2}$$

Satz 4.18 (Integrationssatz) *Ist $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$, dann gilt:*

$$\int_0^t x(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}X(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\}(s)\,.$$

Beweis: Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\}(s) &= \int_0^\infty \left\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right\} e^{-st}\,dt \\
&= \underbrace{-\frac{1}{s}\left\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right\} e^{-st}\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\}(s)
\end{aligned}$$

$\square$.

Beispiel 4.19

$$\int_0^t \sin(\omega\tau)\,d\tau = \frac{-1}{\omega}\cos(\omega\tau)\Big|_0^t = \frac{-1}{\omega}(\cos\omega t - 1)$$

Mit den Korrespondenzen

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t) \;&\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \textit{(vgl. Übung)} \\
1 \;&\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

folgt mit dem Integrationssatz die Korrespondenz

$$\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Satz 4.20 (2. Differentiationssatz) *Ist $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$ und sei $X(s)$ stückweise differenzierbar, dann gilt*

$$-tx(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X'(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{-tx(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x(t)\}(s)\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
X'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty x(t)(-t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&= \mathcal{L}\{-tx(t)\}(s)
\end{aligned}$$

$\square$.

Bemerkung 4.21 *Allgemeiner kann man hier formulieren: Ist* $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$ *und sei* $t^k x(t)$ *und* $X(s)$ *n-mal differenzierbar, dann gilt*

$$(-t)^k x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X^{(k)}(s)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Beispiel 4.22 *Es gilt (vgl. Übung)*

$$\mathrm{e}^{\lambda t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\lambda}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} -t\,\mathrm{e}^{\lambda t} &\circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{1}{(s-\lambda)^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-\lambda}\right) \\ t^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} &\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{(s-\lambda)^3} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-\lambda}\right) \end{aligned}$$

Beispiel 4.23 *Wir bestimmen die Laplace-Transformierte von* $x(t) = t^2 \sin(\omega t)$, $t \geq 0$. *Es gilt (vgl. Übung)*

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Also folgt

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin(\omega t)\}(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = -2\omega\frac{\omega^2 - 3s^2}{(s^2+\omega^2)^3}$$

4.4 Der Faltungssatz

Wir erinnern uns zunächst an die Definition der Faltung zweier Funktionen im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation:

$$(x_1 \star x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

Sind nun $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Funktionen mit $x_1(t) = x_2(t) = 0$ für $t < 0$, dann gilt:

$$x_1(\tau) = 0 \text{ für } \tau < 0 \text{ und } x_2(t-\tau) = 0 \text{ für } \tau > t$$

Damit reduziert sich das Faltungsintegral zu

$$(x_1 \star x_2)(t) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

Satz 4.24 *Ist*

$$x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s)\,, \quad x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(s)$$

Dann gilt

$$(x_1 \star x_2)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s)X_2(s)$$

oder anders ausgedrückt

$$\mathcal{L}\{(x_1 \star x_2)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s)\mathcal{L}\{x_2(t)\}(s)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(x_1 \star x_2)(t)\}(\omega) &= \int_0^\infty (x_1 \star x_2)(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau \right\} \mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau \right\} \mathrm{e}^{-st}\,dt \\
&\quad \text{da } x_2(t-\tau) = 0 \text{ für } \tau > t \\
&= \int_0^\infty x_1(\tau)e^{-s\tau} \left\{ \int_0^\infty x_2(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-s(t-\tau)}\,dt \right\} d\tau \\
&= \left\{ \int_0^\infty x_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-s\tau}\,d\tau \right\} \left\{ \int_0^\infty x_2(\sigma)\,\mathrm{e}^{-s\sigma}\,d\sigma \right\} \\
&= \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s)\mathcal{L}\{x_2(t)\}(s)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $\sigma = t - \tau$ verwendet haben. $\square$.
Wie wir sehen werden, spielt der Faltungssatz bei der Behandlung von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

Beispiel 4.25 *Gegeben sei die Laplace-Transformierte*

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+1)s}$$

Gesucht ist $x(t)$, so dass $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ gilt. Zunächst gilt

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

mit $x_1(t) = 1$ und $x_2(t) = \sin(t)$ für $t \geq 0$. Damit ist

$$\begin{aligned}
x(t) &= (x_1 \star x_2)(t) \\
&= \int_0^t \sin\tau\,d\tau \\
&= 1 - \cos t
\end{aligned}$$

4.5 Grenzwertsätze

Manchmal interessiert in Anwendungen das Verhalten der Originalfunktion für $t \to 0^+$ bzw. $t \to \infty$. Dieses läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen aus dem Verhalten der als bekannt angenommenen Bildfunktion $X(s)$ ermitteln.

Satz 4.26 *Sei $x(t)$ differenzierbar für $t > 0$, $x'(t)$ exponentiell beschränkt.*
Dann gilt für den Anfangswert

$$\lim_{Re(s)\to\infty} sX(s) = x(0^+)$$

Ist darüber hinaus $x(t)$ absolut integrierbar, so gilt für den Endwert

$$\lim_{s\to 0,\, Re(s)\geq 0} sX(s) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

Beispiel 4.27 *Sei* $X(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{Re(s)\to\infty} sX(s) &= \lim_{Re(s)\to\infty} \frac{s^2}{s^2+a^2}\\ &= 1 = x(0^+)\end{aligned}$$

Sei $X(s) = \frac{1}{s(s-4)(s-5)}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0,\, Re(s)\geq 0} sX(s) &= \lim_{s\to 0,\, Re(s)\geq 0} \frac{1}{(s-4)(s-5)}\\ &= \frac{1}{20} = \lim_{t\to\infty} x(t)\end{aligned}$$

4.6 Rücktransformation

Für die Anwendungsmöglichkeiten der Laplace-Transformation ist es wichtig, vom Bildbereich in den Originalbereich zurückzugelangen.
Die Rücktransformation geschieht in der Praxis in der Regel mit Hilfe geeigneter Tabellen, in der Transformationspaare aufgelistet sind.
In den Anwendungen treten als Transformationsfunktionen häufig gebrochen rationale Funktionen auf. Diese werden dann mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in eine Summe einfacher Partialbrüche umgewandelt. Mit Hilfe der Transformationstabelle lassen sich dann die für die einzelnen Summanden zugehörigen Originalfunktionen ermitteln.
Es gibt zwar auch Formeln für die inverse Laplace-Transformation, die mit $\mathcal{L}^{-1}$ bezeichnet wird, die Anwendung setzt aber weitreichende Kenntnisse voraus. Für den Fall, dasses sich bei $X(s)$ um eine rationale Funktion handelt, verwendet man die Partialbruchzerlegung (vgl. auch 2. Semester).
Wir haben es hier allerdings etwas allgemeiner mit komplexen Funktionen zu tun. Basis sind die folgenden Sätze.

Satz 4.28 (Linearfaktorzerlegung) *Ist* $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $P(s) = \sum_{l=0}^{n} a_l s^l$, *ein Polynom vom Grad* $n \in \mathbb{N}$, *so lässt sich* $P(s)$ *darstellen durch die Linearfaktorzerlegung*

$$P(s) = a_n(s-s_1)^{r_1} \cdot (s-s_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (s-s_k)^{r_k},$$

wobei $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{C}$ *die Nullstellen von* $P(s)$ *mit den Vielfachheiten* $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ *bezeichnen.*

Beispiel 4.29

$$\begin{aligned}P(s) &= s^3 + s^2 + 5s + 9 + 12j\\ &= (s-(1-2j))(s-3j)(s+2+j)\end{aligned}$$

Hierbei ist $n = 3$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

$$\begin{aligned}P(s) &= s^4 + 2(3-j)s^3 + 3(3-4j)s^2 - 2(3+10j)s - 10\\ &= (s+3-j)(s+3+j)(s-j)^2\end{aligned}$$

Hierbei ist $n = 4$, $r_1 = r_2 = 1$ *und* $r_3 = 2$.

Zur Partialbruchzerlegung gilt:

Satz 4.30 *Ist $R(s) = P(s)/Q(s)$ eine rationale Funktion, so dass der Grad von P kleiner als der Grad von Q ist, und besitzt Q die Linearfaktorzerlegung*

$$Q(s) = a_n(s - s_1)^{r_1} \cdot (s - s_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (s - s_k)^{r_k}\,,$$

so lässt sich R darstellen als

$$R(s) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=1}^{r_m} \frac{A_{l,m}}{(s - s_m)^l}$$

mit geeigneten Koeffizienten $A_{l,m} \in \mathbb{C}$.

Beispiel 4.31 *Sei*

$$R(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}\,.$$

Für das Nenner polynom gilt die Faktorisierung

$$Q(s) = (s - 1)(s + 1)(s - j)(s + j)\,.$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$R(s) = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s - j} + \frac{D}{s + j}$$

Multiplikation mit $Q(s)$, sortieren nach Potenzen von s und Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= A + B + C + D\\
1 &= A - B + jC - jD\\
0 &= A + B - C - D\\
0 &= A - B - jC + jD
\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{j}{4}, \quad D = \frac{j}{4}$$

Im Fall einfacher Nullstellen des Nennerpolynoms $Q(s)$ kann man die Koeffizienten für die Partialbruchzerlegung auch einfacher gewinnen.

Satz 4.32 *Ist $R(s) = P(s)/Q(s)$ eine rationale Funktion, so dass der Grad von P kleiner als der Grad von Q ist, und besitzt Q nur einfache Nullstellen $s_1, \dots, s_k$, so lässt sich R darstellen als*

$$R(s) = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} \frac{1}{s - s_1} + \dots + \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \frac{1}{s - s_k}$$

Beispiel 4.33 *Sei wieder*

$$R(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}\,.$$

Für das Nenner polynom gilt die Faktorisierung

$$Q(s) = (s - 1)(s + 1)(s - j)(s + j)\,,$$

d.h. $Q(s)$ besitzt nur einfache Nullstellen. Mit

$$Q'(s) = 4s^3$$

ergibt sich also

$$\frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{P(j)}{Q'(j)} = -\frac{j}{4}, \quad \frac{P(-j)}{Q'(-j)} = \frac{j}{4}$$

Damit können wir nun für bestimmte rationale Funktionen (einfache Nullstellen des Nennerpolynoms) die Rücktransformation wegen der Korrespondenz

$$\mathrm{e}^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

angeben.

Beispiel 4.34

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{s^2}{s^4-1} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{j}{4}\cdot\frac{1}{s-j} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+j} \end{aligned}$$

ist die Laplacetransformierte von

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} - j\,\mathrm{e}^{jt} + j\,\mathrm{e}^{-jt}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sinh t + \sin t) \end{aligned}$$

Den Fall mehrfacher Nullstellen können wir mit Hilfe des 2. Differentiationssatzes (vgl. Satz 4.20, Bemerkung 4.21 und Beispiel 4.22) lösen, da

$$\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}\,\mathrm{e}^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^k} \text{ für } k \geq 2.$$

Beispiel 4.35 *Die rationale Funktion*

$$R(s) = \frac{1}{(s-j)^2} + \frac{1}{(s+j)^2}$$

ist die Laplacetransformierte von

$$\begin{aligned} r(t) &= t\,\mathrm{e}^{jt} + t\,\mathrm{e}^{-jt} \\ &= 2t\cdot\cos t \end{aligned}$$

4.7 Anwendung: Lösung von AWP für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Wir erläutern die Vorgehensweise zunächst an Hand von Beispielen.

Beispiel 4.36

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = \mathrm{e}^{-2t} \textit{ mit } x(0) = 1 \textit{ und } x'(0) = 1$$

Nach dem Differentiationssatz gilt mit $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet sX(s) - x(0^+) \\ x''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ *nach dem zweiten Verschiebungssatz*

$$\mathrm{e}^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+2}$$

Wir wenden nun die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten mit Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \{s^2X(s) - s - 1\} + \{sX(s) - 1\} - 2X(s) &= \frac{1}{s+2} \\ \iff X(s)\underbrace{(s^2 + s - 2)}_{\textit{chrakt. Pol.}} &= \frac{1}{s+2} + s + 2 \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung im Bildbereich liefert

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+2)\underbrace{(s^2+s-2)}_{(s+2)(s-1)}} + \frac{s+2}{s^2+s-2} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s-1)} + \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Diese Lösung muss nun in den Originalbereich zurücktransformiert werden. Für die Rücktransformation von $\frac{1}{(s+2)^2(s-1)}$ führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.
Ansatz:

$$\frac{1}{(s+2)^2(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-1}$$

d. h.

$$1 = A(s+2)(s-1) + B(s-1) + C(s+2)^2$$

Die Koeffizienten lassen sich hier recht einfach durch Einsetzen spezieller Werte für s ermitteln.

$$\begin{aligned} s = 1 &: 1 = 9C \\ s = -2 &: 1 = -3B \\ s = 0 &: 1 = -2A - B + 4C \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet

$$A = -\frac{1}{9}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{9}$$

Also gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} \\ &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation kann jetzt termweise mit Hilfe der Tabelle oder mit bekannten Korrespondenzen und Ausnutzung der Rechenregeln durchgeführt werden. Dies ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = -\frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{3}t\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{10}{9}\,\mathrm{e}^{t}$$

Beispiel 4.37

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \sin(3t) \textit{ mit } x(0) = 0 \textit{ und } x'(0) = 0$$

Nach dem Differentiationssatz gilt mit $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX(s) - x(0^+) \\ x''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$ *nach dem Skalierungssatz*

$$\sin(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{3}{s^2+9}$$

Wir wenden nun die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten mit Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} s^2X(s) - 2sX(s) + 2X(s) &= \frac{3}{s^2+9} \\ \Longleftrightarrow X(s)\underbrace{(s^2 - 2s + 2)}_{\textit{charakt. Pol.}} &= \frac{3}{s^2+9} \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung im Bildbereich liefert

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+9)(s^2-2s+2)}$$

Diese Lösung muss nun in den Originalbereich zurücktransformiert werden. Für die Rücktransformation der rechten Seite führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch. Da die quadratischen Faktoren im Nenner in $\mathbb{R}$ *irreduzibel sind machen wir den Ansatz:*

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2-2s+2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2-2s+2}$$

d. h.

$$\begin{aligned} & 3 = (As+B)(s^2-2s+2) + (Cs+D)(s^2+9) \\ \Leftrightarrow & \\ & 3 = s^3(A+C) + s^2(-2A+B+D) + s(2A-2B+9C) + 2B + 9D \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= -2A + B + D \\ 0 &= 2A - 2B + 9C \\ 3 &= 2B + 9D \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet

$$A = \frac{6}{85}, \quad B = -\frac{21}{85}, \quad C = -\frac{6}{85}, \quad D = \frac{33}{85}$$

Also gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{85}\left\{\frac{6s-21}{s^2+9} + \frac{-6s+33}{s^2-2s+2}\right\} \\ &= \frac{1}{85}\left\{2 \cdot \frac{\frac{s}{3}}{(\frac{s}{3})^2+1} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{(\frac{s}{3})^2+1} - 6 \cdot \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + 27 \cdot \frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation kann jetzt termweise mit Hilfe der Tabelle oder mit bekannten Korrespondenzen und Ausnutzung der Rechenregeln durchgeführt werden. Dies ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{85}\left\{6\cos(3t) - 7\sin(3t) - 6e^t\cos t + 27\,\mathrm{e}^t\sin t\right\}$$

Beispiel 4.38

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \sin t \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } x'(0) = 0$$

Nach dem Differentiationssatz gilt mit $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(s)$

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX(s) - x(0^+) \\ x''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+) \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$. *Wir wenden nun die Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung an und erhalten mit Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen*

$$\begin{aligned} s^2X(s) - 2sX(s) + X(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ \Longleftrightarrow X(s) \underbrace{(s-1)^2}_{\text{charakt. Pol.}} &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

Lösen der Gleichung im Bildbereich liefert

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)}$$

Diese Lösung muss nun in den Originalbereich zurücktransformiert werden. Für die Rücktransformation der rechten Seite führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.
Ansatz:

$$\frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

d. h.

$$\begin{aligned} & 1 = A(s-1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s-1)^2 \\ \Leftrightarrow & \\ & 1 = s^3(A+C) + s^2(-A+B-2C+D) + s(A+C-2D) - A + B + D \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= -A + B - 2C + D \\ 0 &= A + C - 2D \\ 1 &= = A + B + D \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = 0$$

Also gilt die Darstellung

$$X(s) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s}{s^2+1}\right\}$$

Die Rücktransformation kann jetzt termweise mit Hilfe der Tabelle oder mit bekannten Korrespondenzen und Ausnutzung der Rechenregeln durchgeführt werden. Dies ergibt die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left\{-\mathrm{e}^{t} + te^t + \cos t\right\}$$

Wir behandeln das Problem nun in allgemeiner Form. Dazu betrachten wir exemplarisch ein Anfangswertproblem zweiter Ordnung, wobei die Differentialgleichung linear mit konstanten Koeffizienten ist, d.h.

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t) \text{ mit } x(0) = x_0 \text{ und } x'(0) = x_1$$

Wir wiederholen zunächst die aus dem zweiten Semester bekannte Methode und untersuchen dann, wie man das Problem mit Hilfe der Laplace-Transformation löst.
Bekannte Methode:

a) Lösen der homogenen DGL

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0$$

Ansatz: $x(t) = \mathrm{e}^{st}$, d.h. $x'(t) = s\,\mathrm{e}^{st}$, $x''(t) = s^2\,\mathrm{e}^{st}$
Einsetzen in die DGL und Division der Gleichung durch e^{st} liefert die charakteristische Gleichung

$$s^2 + ps + q = 0$$

Es können drei verschiedene Fälle eintreten:

i) Zwei verschiedene reelle Nullstellen s_1 und s_2. Dann ist

$$x_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{s_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{s_2 t}$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

ii) Eine doppelte reelle Nullstelle s_1. Dann ist

$$x_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{s_1 t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{s_1 t}$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

iii) Ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen $s_1 = \alpha + j\beta$ und $s_2 = \alpha - j\beta$. Dann ist

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \sin(\beta t) + C_2 \cos(\beta t))$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

b) Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL erhält man je nach Typ der Störfunktion mit einem speziellen Ansatz (vgl. entsprechende Tabellen) oder mit Variation der Konstanten. Sei die partikuläre Lösung $x_p(t)$.

c) Die allgemeine Lösung der DGL ist dann

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

d) Setzt man nun die Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung ein, so erhält man Werte für die Konstanten C_1 und C_2. Mit diesen Werten erhält man aus $x(t)$ die Lösung des AWP.

Methode mit Hilfe der Laplace-Transformation:
Wir wenden die Laplace-Transformation auf die DGL an, nutzen den Differentiationssatz aus und setzen die Anfangsbedingungen ein. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \{s^2X(s) - sx_0 - x_1\} + p\{sX(s) - x_0\} + qX(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\ \Leftrightarrow \quad X(s)\underbrace{(s^2 + ps + q)}_{\text{char. Pol.}} &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + (s+p)x_0 + x_1 \end{aligned}$$

Auflösen nach $X(s)$:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+ps+q}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0\frac{s+p}{s^2+ps+q} + x_1\frac{1}{s^2+ps+q}$$

Auch hier sind wieder drei Fälle zu unterscheiden.

a) Das charakteristische Polynom besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen s_1 und s_2, d.h.

$$s^2 + ps + q = (s - s_1)(s - s_2)$$

und es gilt

$$p = -(s_1 + s_2)$$

Dann ist also:

$$X(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0\frac{s-s_1-s_2}{(s-s_1)(s-s_2)} + x_1\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Für die Rücktransformation benötigt man also die Partialbruchzerlegungen von

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \text{ und } \frac{s-s_1-s_2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Diese lauten

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} &= \frac{1}{s_1-s_2}\cdot\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s_1-s_2}\cdot\frac{1}{s-s_2} \\ \frac{s-s_1-s_2}{(s-s_1)(s-s_2)} &= -\frac{s_2}{s_1-s_2}\cdot\frac{1}{s-s_1} + \frac{s_1}{s_1-s_2}\cdot\frac{1}{s-s_2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir im Bildbereich

$$X(s) = \frac{1}{s_1-s_2}\left\{\left[\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right]\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + (x_1 - x_0s_2)\frac{1}{s-s_1} + (x_0s_1 - x_1)\frac{1}{s-s_2}\right\}$$

Mit der Korrespondenz $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$, dem zweiten Verschiebungssatz und dem Faltungssatz ergibt sich somit durch Rücktransformation die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{s_1-s_2}\left\{\left[\mathrm{e}^{s_1t} - \mathrm{e}^{s_2t}\right] \star f(t) + (x_1 - x_0s_2)\,\mathrm{e}^{s_1t} + (x_0s_1 - x_1)\,\mathrm{e}^{s_2t}\right\}$$

b) Das charakteristische Polynom besitzt eine doppelte reelle Nullstelle s_1, d.h.

$$s^2 + ps + q = (s - s_1)^2$$

und es gilt

$$p = -2s_1$$

Dann ist also:

$$X(s) = \frac{1}{(s-s_1)^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0\frac{s-2s_1}{(s-s_1)^2} + x_1\frac{1}{(s-s_1)^2}$$

Für die Rücktransformation benötigt man also die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{s-2s_1}{(s-s_1)^2}$$

Diese lautet

$$\frac{s-2s_1}{(s-s_1)^2} = \frac{1}{s-s_1} - s_1 \cdot \frac{1}{(s-s_1)^2}$$

Damit erhalten wir im Bildbereich

$$X(s) = \frac{1}{(s-s_1)^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0 \cdot \frac{1}{s-s_1} + (x_1 - x_0 s_1)\frac{1}{(s-s_1)^2}$$

Mit den Korrespondenzen $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$, $t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$, dem zweiten Verschiebungssatz und dem Faltungssatz ergibt sich somit durch Rücktransformation die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = (t\,\mathrm{e}^{s_1 t}) \star f(t) + x_0\,\mathrm{e}^{s_1 t} + (x_1 - x_0 s_1)t\,\mathrm{e}^{s_1 t}$$

c) Das charakteristische Polynom besitzt ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen $s_1 = \alpha + j\beta$ und $s_2 = \alpha - j\beta$, d.h.

$$s^2 + ps + q = (s - \alpha - j\beta)(s - \alpha + j\beta) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$$

und es gilt

$$p = -2\alpha$$

Dann ist also:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0\frac{s-2\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + x_1\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= \frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + x_0\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + (x_1 - \alpha x_0) \cdot \frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen $\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$, $\cos t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+1}$, dem zweiten Verschiebungssatz, dem Skalierungssatz und dem Faltungssatz ergibt sich somit durch Rücktransformation die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\right) \star f(t) + \frac{1}{\beta}(x_1 - x_0\alpha)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) + x_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$$