

**Skript zur Vorlesung  
Mathematik für Sicherheitstechniker  
Sommersemester 2014  
(Master Studiengang)**

**Prof. Dr. M. Heilmann  
Fachbereich C, Mathematik  
Bergische Universität Wuppertal**

**März 2014**

# Inhaltsverzeichnis

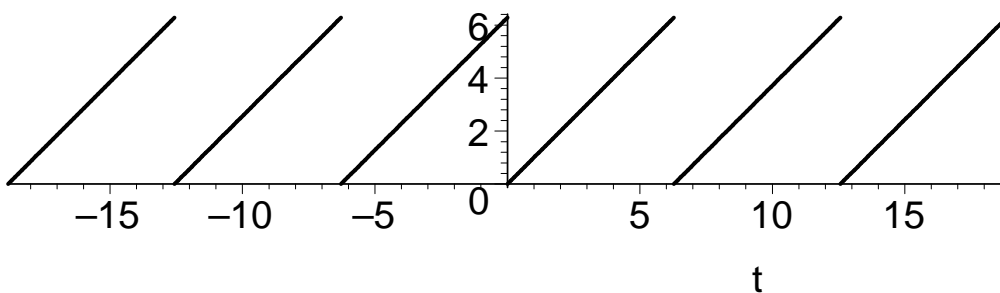
<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Komplexe Zahlen – Wiederholung . . . . .	1
1.1.1	Komplexe Zahlen in kartesischer Form . . . . .	1
1.1.2	Komplexe Zahlen in Polarform . . . . .	7
1.1.3	Komplexe Zahlen in Exponentialform . . . . .	15
1.2	Vorbemerkungen . . . . .	17
1.3	Die komplexe Exponentialfunktion . . . . .	18
1.4	Eigenschaften komplexwertiger Funktionen . . . . .	18
1.5	Periodische Funktionen . . . . .	20
1.6	Trigonometrische Polynome . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>27</b>
2.1	Definition der Fourierreihe . . . . .	27
2.2	Rechenregeln . . . . .	32
2.3	Konvergenzverhalten . . . . .	41
2.4	Anwendungsbeispiel: RC-Tiefpassfilter . . . . .	43

## 2 Fourierreihen

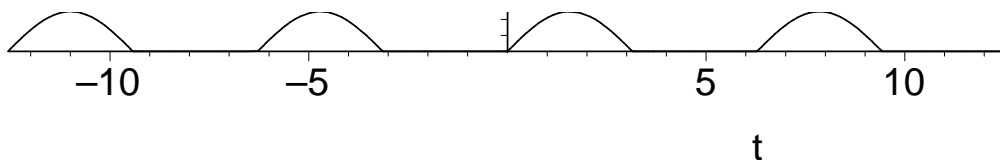
Viele zeitliche Vorgänge, wie z.B. Die Schwingung eines (idealen) Pendels, Wechselspannungen, etc. lassen sich durch zeitabhängige Funktionen der Form

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

beschreiben. Man spricht von sogenannten harmonischen Schwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Amplitude  $A$ . Mit  $\varphi$  bezeichnet man die Phasenverschiebung oder den Nullphasenwinkel. In Anwendungen hat man es häufig auch mit Vorgängen zu tun, die zwar periodisch sind, sich aber nicht mehr in der oben genannten einfachen Form beschreiben lassen. Beispiele hierfür sind Kippspannungen (Sägezahn)



und der Sinusimpuls eines Gleichrichters.



Bei der Analyse zeitlich periodischer Vorgänge (Signale, Funktionen), geht es im wesentlichen darum, das Spektrum, d.h. die im Signal enthaltenen Anteile der Grundkreisfrequenz und Vielfacher davon (sog. Harmonische) zu bestimmen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von harmonischer Analyse.

Umgekehrt möchte man aus der Kenntniss des Spektrums das Signal (die Funktion) rekonstruieren. Diesen Vorgang bezeichnet man mit Synthese.

Mathematisch geschieht dies mit Hilfe von Fourierreihen.

### 2.1 Definition der Fourierreihe

**Definition 2.1 (Fourierreihe, Fourierkoeffizienten)** Seien  $T > 0$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und  $x$   $T$ -periodisch fortgesetzt. Dann ist die Fourierreihe von  $x(t)$  definiert durch die Zuordnung

$$S\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)],$$

wobei die sogenannten Fourierkoeffizienten durch

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegeben sind.

**Bemerkung 2.2** a) Wegen der Periodizität von  $x$ ,  $\sin$  und  $\cos$  kann man bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten statt über  $[0, T]$  auch über jedes andere Intervall der Länge  $T$  integrieren, z.B.  $[-T/2, T/2]$ .

b) Auch bei den Fourierreihen beschränkt man sich häufig auf die Betrachtung  $2\pi$ -periodischer Funktionen. Ist also speziell  $T = 2\pi$ , dann ist  $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$  und die in Definition 2.1 angegebenen Formeln vereinfachen sich zu

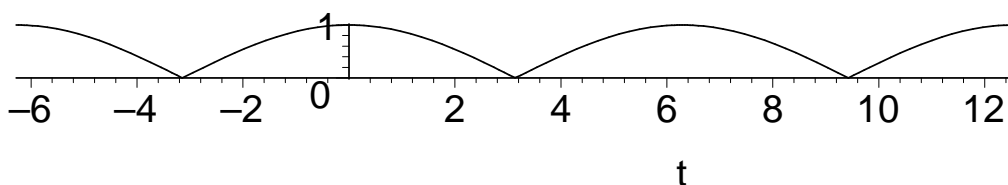
$$S\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

c) Weder die Konvergenz der Fourierreihe, noch die Gleichheit  $S\{x\}(t) = x(t)$  an einzelnen Stellen  $t$  sind von vornherein gesichert. Auf diese Fragestellungen werden wir an späterer Stelle eingehen.

**Beispiel 2.3** Sei  $x(t) = \cos(t/2)$ ,  $t \in [-\pi, \pi)$ ,  $x(t)$   $2\pi$ -periodisch oder gleichbedeutend damit  $x(t) = |\cos(t/2)|$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .



Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) \\ &= \frac{4}{\pi}, \\ \text{d.h. } \frac{a_0}{2} &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  erhält man

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos \frac{t}{2} \cos(nt)}^{\text{gerade}} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)t\right) + \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{1-2n} \sin\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)t\right) + \frac{2}{1+2n} \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right) \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{1-2n} \left\{ \underbrace{\sin\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)\pi\right)}_{=(-1)^n} - \sin 0 \right\} + \frac{1}{1+2n} \left\{ \underbrace{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi\right)}_{=(-1)^n} - \sin 0 \right\} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{4}{\pi} (-1)^n \frac{1}{1-4n^2} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos \frac{t}{2} \sin(nt)}^{\text{ungerade}} dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet somit:

$$S\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1-4n^2} \cos(nt)$$

**Bemerkung 2.4** Konvergiert die Fourierreihe gegen die Funktion, so kann man ihre Partialsummen für die Approximation der Funktion verwenden. Unter welchen Umständen dies der Fall ist, behandeln wir an späterer Stelle. Konkret bedeutet das, dass man  $x(t)$  durch die  $N$ -te,  $N \in \mathbb{N}$ , Teilsumme, also durch ein trigonometrisches Polynom vom Höchstgrad  $N$  annähert:

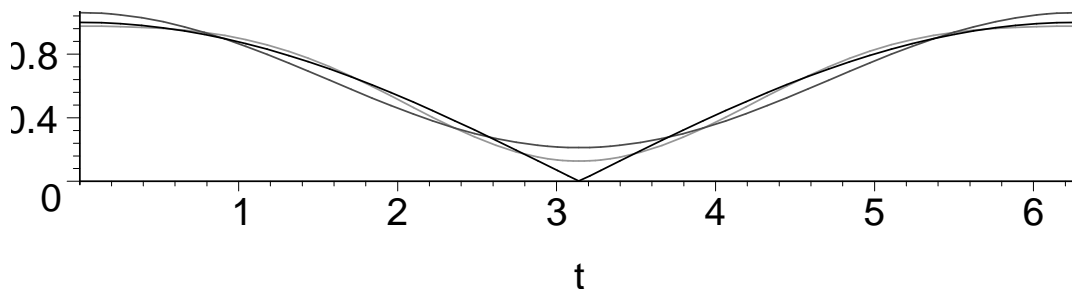
$$S_N\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

**Beispiel 2.5** Zu  $x(t) = |\cos(t/2)|$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , betrachten wir (vgl. auch Beispiel 2.3)

$$S_N\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{1}{1-4n^2} \cos(nt), \quad N = 1, 2.$$

**Bemerkung 2.6** Statt in der oben angegebenen Form kann man die Fourierreihe auch als Sinusreihe plus Gleichanteil darstellen. Dazu werden die Terme mit gleichen Frequenzen zusammengefasst, d.h.

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$



Approximationen für  $N = 1$  und  $N = 2$

mit

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ und } \varphi_n = \begin{cases} \arctan \frac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } b_n = 0, a_n > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } b_n = 0, a_n < 0 \\ \pi + \arctan \frac{a_n}{b_n} & \text{falls } b_n < 0 \end{cases}$$

Die  $A_n$  sind die jeweiligen Amplituden (maximalen Auslenkungen) und die  $\varphi_n$  die zugehörigen Phasenverschiebungen (Nullphasenwinkel).

Die Fourierreihe erhält dann die Form

$$S\{x\}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Stellt man die Amplituden  $A_n$  und die Nullphasenwinkel  $\varphi_n$  als Funktion von  $n$  dar, so erhält man die sogenannten Amplituden- und Phasenspektren, die nur zu diskreten Werten Funktionswerte besitzen. Sie werden dargestellt, indem an den entsprechenden Werten für  $n$  Linien der Höhen  $A_n$  bzw.  $\varphi_n$  eingetragen werden. Sie werden daher auch als Linienspektren bezeichnet.

**Beispiel 2.7** Für  $x(t) = |\cos(t/2)|$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , lesen wir aus Beispiel 2.3 einen Gleichanteil von  $\frac{2}{\pi}$ , Amplituden  $A_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$  und Phasenverschiebungen von  $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$  ab. Somit ist

$$S\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \sin\left(nt + \frac{\pi}{2}\right).$$

**Bemerkung 2.8** a) Oft viel einfacher zu handhaben ist die Darstellung der Fourierreihe mit Hilfe der Funktionen  $e^{jnt}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Die Fourierreihe lässt sich damit auch in der Form

$$S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt, n \in \mathbb{Z},$$

darstellen.

b) Im Fall  $T = 2\pi$ , d.h.  $\omega = 1$ , gilt

$$S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}$$

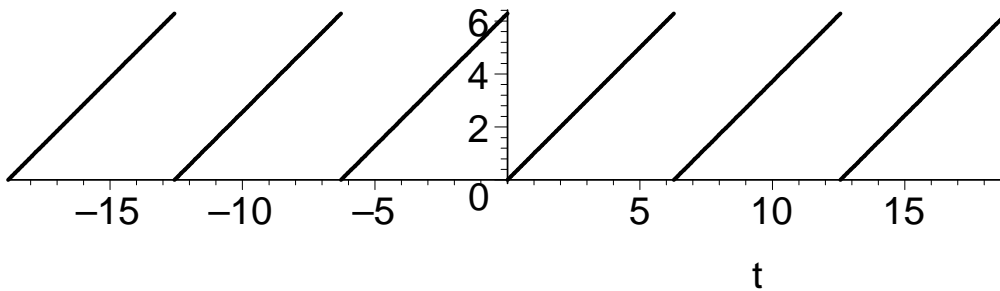
mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-jnt} dt \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) Für die Umrechnung der Koeffizienten gelten wieder die Formeln (vgl. Satz 1.38)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \\ a_0 &= 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

**Beispiel 2.9 (Kippspannung, Sägezahn)** Sei  $x(t) = t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ ,  $x(t)$   $2\pi$ -periodisch.



Berechnung der Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Für  $n \neq 0$  erhält man mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t e^{-jnt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{jn} t e^{-jnt} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{jn} \int_0^{2\pi} e^{-jnt} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{jn} t e^{-jnt} - \frac{1}{(jn)^2} e^{-jnt} \right\} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{jn} 2\pi \underbrace{e^{-jn \cdot 2\pi}}_{=1} - \frac{1}{(jn)^2} \left[ \underbrace{e^{-jn \cdot 2\pi}}_{=1} - \underbrace{e^0}_{=1} \right] \right\} \\ &= \frac{j}{n} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe lautet somit:

$$S\{x\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt}$$

**Beispiel 2.10** Mit den Umrechnungsformeln aus Bemerkung 2.8 erhalten wir für  $x(t) = |\cos(t/2)|$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , die Fourierkoeffizienten (vgl. Beispiel 2.3)

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{falls } n > 0 \\ \frac{a_{-n}}{2} & \text{falls } n < 0 \end{cases} = 2(-1)^n \frac{1}{\pi(1-4n^2)},$$

d.h. die Darstellung

$$\begin{aligned} S\{x\}(t) &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)} e^{jnt} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)} e^{jnt} \end{aligned}$$

für die Fourierreihe.

## 2.2 Rechenregeln

In diesem Abschnitt werden einige Rechenregeln zusammengestellt, die die Bestimmung der Fourierreihen bzw. Fourierkoeffizienten zum Teil erheblich vereinfacht. Für konkrete Anwendungen ist dies daher ein besonders wichtiger Abschnitt.

Im folgenden seien  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodische und auf  $[0, T]$  stückweise stetige Funktionen mit den Fourierreihen  $S\{x\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$ ,  $S\{y\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega t}$ .

**Satz 2.11 (Linearität)** Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  sind die Fourierkoeffizienten von  $\alpha x + \beta y$  durch  $\alpha c_n + \beta d_n$  gegeben, d.h. es gilt

$$S\{\alpha x + \beta y\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha c_n + \beta d_n) e^{jn\omega t}.$$

*Beweis:* Nach Definition gilt für die Fourierkoeffizienten von  $\alpha x + \beta y$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha x(t) + \beta y(t)) e^{-jn\omega t} dt &= \alpha \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} + \beta \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \alpha c_n + \beta d_n \end{aligned}$$

□.

**Beispiel 2.12** Seien  $x(t) = |\cos t/2|$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $y(t) = t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ ,  $y$   $2\pi$ -periodisch. Nach Beispiel 2.10 und Beispiel 2.9 sind die Fourierreihen durch

$$S\{x\}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)} e^{jnt}$$

$$S\{y\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt}$$

gegeben.

Die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind

$$c_n = \frac{2}{\pi} (-1)^n \frac{1}{(1-4n^2)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad d_0 = \pi, \quad d_n = \frac{j}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0.$$

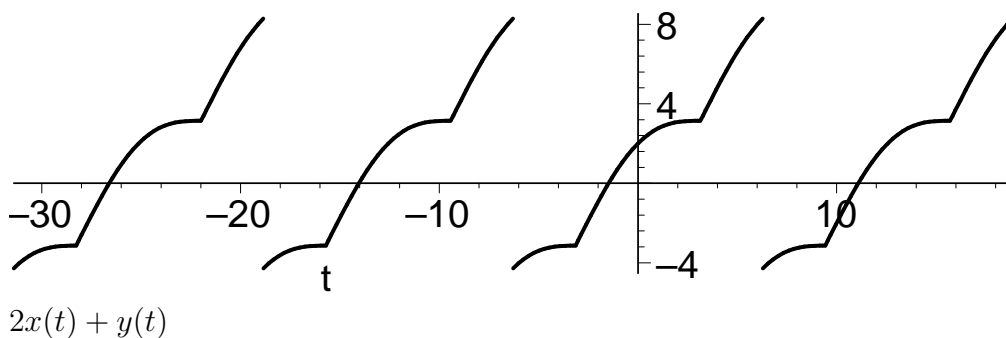


Wir betrachten nun die Funktion

$$2x(t) + y(t) = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| + t - 2k\pi, \quad t \in [2k\pi, 2(k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

bzw. gleichbedeutend

$$z(t) = 2x(t) + y(t) = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| + t, \quad t \in [0, 2\pi), \quad z \text{ } 2\pi\text{-periodisch.}$$



Die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind somit durch

$$2c_0 + d_0 = \frac{4}{\pi} + \pi$$

und für  $n \neq 0$  durch

$$2c_n + d_n = \frac{4}{\pi}(-1)^n \frac{1}{1-4n^2} + \frac{j}{n}$$

gegeben. Die Fourierreihe von  $2x(t) + y(t)$  lautet somit

$$S\{2x + y\}(t) = \frac{4}{\pi} + \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left( \frac{4}{\pi}(-1)^n \frac{1}{1-4n^2} + \frac{j}{n} \right) e^{jnt}.$$

**Satz 2.13 (Zeitumkehr, Konjugation)** a) Sei  $\tilde{x}(t) = x(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_{-n},$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{jn\omega t}.$$

b) Sei  $\tilde{x}(t) = x^*(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_{-n}^*,$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* e^{jn\omega t}.$$

Beweis:

a) Mit der Substitution  $\tau = -t$  erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(-t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x(\tau) e^{jn\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{-j(-n)\omega\tau} d\tau \\ &= c_{-n}\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) e^{jn\omega t})^* dt \\ &= \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j(-n)\omega t} dt \right)^* \\ &= c_{-n}^*\end{aligned}$$

**Satz 2.14 (Dilatation, Skalierung)** Sei  $\tilde{x}(t) = x(ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ . Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_n,$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}c.$$

*Beweis:* Wenn  $x(t)$   $T$ -periodisch ist, so ist  $\tilde{x}(t)$   $T/c$ -periodisch. Mit der Substitution  $\tau = ct$  erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{c}{T} \int_0^{T/c} \tilde{x}(t) e^{-jn\frac{2\pi c}{T}t} dt \\ &= \frac{c}{T} \int_0^{T/c} x(ct) e^{-jn\frac{2\pi c}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{jn\frac{2\pi}{T}\tau} d\tau \\ &= c_n\end{aligned}$$

□.

**Bemerkung 2.15** Der Skalierungssatz besagt, dass eine Änderung der Frequenz oder Zeitskala keinen Einfluss auf die Amplituden der Teilschwingungen hat.

**Beispiel 2.16** Für die Funktion  $x(t) = t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ ,  $x$   $2\pi$ -periodisch (Sägezahn) gilt (vgl. Beispiel 2.9)

$$c_0 = \pi, \quad c_n = \frac{j}{n} \text{ für } n \neq 0,$$

d.h.

$$S\{x\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jnt}$$

Für  $\tilde{x}(t) = x(2t)$ , d.h.  $\tilde{x}(t) = 2t$ ,  $t \in [0, \pi)$ ,  $\tilde{x}$   $\pi$ -periodisch gilt dann

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j}{n} e^{jn \cdot 2t}$$

Verschiebt man eine Funktion  $x(t)$  um  $t_0$  auf der  $t$ -Achse (im Zeitbereich), so ergeben sich die Fourierkoeffizienten der verschobenen Funktion durch Multiplikation eines sogenannten Phasenfaktors. Genauer gilt:

**Satz 2.17 (1. Verschiebungssatz, Translation)** Sei  $\tilde{x}(t) = x(t - t_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = e^{-jn\omega t_0} c_n,$$

d.h. für die Fourierreihe

$$S\{\tilde{x}\}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-jn\omega t_0} c_n) e^{jn\omega t}$$

*Beweis:* Mit der Substitution  $\tau = t - t_0$  erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t - t_0) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} x(\tau) e^{-jn\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-jn\omega t_0} \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \\ &= e^{-jn\omega t_0} c_n \end{aligned}$$

□.

**Beispiel 2.18** Sei  $x(t) = t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ ,  $x$   $2\pi$ -periodisch (Sägezahn) und  $\tilde{x}(t) = t - \pi/2$ ,  $t \in [\pi/2, 5\pi/2)$ ,  $\tilde{x}$   $2\pi$ -periodisch. Dann gilt:

$$\tilde{x}(t) = x(t - \pi/2)$$

Also sind (vgl. Beispiel 2.9) die Fourierkoeffizienten von  $\tilde{x}$

$$\tilde{c}_0 = e^0 c_0 = \pi$$

und für  $n \neq 0$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= e^{-jn\frac{\pi}{2}} c_n \\ &= e^{-jn\frac{\pi}{2}} \frac{j}{n} \\ &= (e^{-j\frac{\pi}{2}})^n \frac{j}{n} \\ &= (-j)^n \frac{j}{n}\end{aligned}$$

Die zugehörige Fourierreihe lautet also

$$S\{\tilde{x}\} = \pi + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-j)^n j}{n} e^{jnt}$$

**Bemerkung 2.19** Man beachte, dass eine Verschiebung von  $x(t)$  nach oben oder unten nur eine entsprechende Änderung im Gleichanteil nach sich zieht.

**Satz 2.20 (2. Verschiebungssatz)** Sei  $\tilde{x}(t) = e^{jk\omega t} x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt für die zugehörigen Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_n = c_{n-k}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{jk\omega t} e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j(n-k)\omega t} dt \\ &= c_{n-k}\end{aligned}$$

□.

**Beispiel 2.21** Sei  $x(t) = |\cos(t/2)|$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , und  $\tilde{x}(t) = \cos t |\cos(t/2)|$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt mit der Eulerschen Formel (vgl. Bemerkung 1.37)

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= \frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) x(t) \\ &= \frac{1}{2} (e^{jt} x(t) + e^{-jt} x(t))\end{aligned}$$

Mit den Fourierkoeffizienten von  $x(t)$  (vgl. Beispiel 2.10) gilt dann nach Satz 2.20

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{2} (c_{n-1} + c_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{1-4(n-1)^2} + \frac{1}{1-4(n+1)^2} \right)\end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir, wie sich gewisse Symmetrieeigenschaften der Funktion auf die Fourierkoeffizienten auswirken. Sei wieder allgemein zunächst  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $T$ -periodisch.

**Satz 2.22** a) Ist  $x(t)$  gerade, d.h.  $x(t) = x(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt, n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = 0, n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Die zugehörige Fourierreihe ist somit eine Cosinus-Reihe.

b) Ist  $x(t)$  ungerade, d.h.  $x(t) = -x(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$a_n = 0, n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt, n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$c_0 = 0$$

$$c_n = -c_{-n} = -j \frac{b_n}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Die zugehörige Fourierreihe ist somit eine Sinus-Reihe.

*Beweis:*

a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{gerade}} \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\text{gerade}}}^{\text{gerade}} dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt, n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{gerade}} \underbrace{\sin(n\omega t)}_{\text{ungerade}}}^{\text{ungerade}} dt \\ &= 0, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\text{gerade}}}^{\text{ungerade}} dt \\ &= 0, n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\sin(n\omega t)}_{\text{ungerade}}}^{\text{gerade}} dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt, n \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- c) Die Behauptungen für die Koeffizienten  $c_n$  ergeben sich unmittelbar aus den allgemeinen Umrechnungsformeln (vgl. Satz 1.38).

□.

**Satz 2.23 (Differentiationssatz)** Sei  $x(t)$  stetig und auf dem Periodenintervall  $[0, T]$  stückweise stetig differenzierbar. Dann kann man die Fourierkoeffizienten  $c'_n$  der stückweise existierenden Ableitung  $x'(t)$  aus den Fourierkoeffizienten  $c_n$  von  $x(t)$  durch

$$\begin{aligned} c'_n &= jn\omega c_n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{bzw.} \\ a'_0 &= 0 \\ a'_n &= n\omega b_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ b'_n &= -n\omega a_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

berechnen. Die zugehörige Fourierreihe lautet dann

$$\begin{aligned} S\{x'\}(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} jn\omega c_n e^{jn\omega t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\omega \{b_n \cos(n\omega t) - a_n \sin(n\omega t)\} \end{aligned}$$

d. h. also, dass man die Fourierreihe von  $x'$  durch gliedweises Differenzieren der Fourierreihe von  $x$  erhält.

*Beweis:* Seien  $t_0 = 0$ ,  $t_m = T$  und  $t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1}$  die (eventuell vorhandenen) endlich vielen Stellen im Periodenintervall, an denen  $x'(t)$  nicht existiert. Dann erhält man durch Aufteilung des Periodenintervalls und partielle Integration für  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ x(t) e^{-jn\omega t} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} + jn\omega \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ x(t) e^{-jn\omega t} \Big|_0^T + jn\omega \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \underbrace{[x(T) - x(0)]}_{=0, \text{ da } x T\text{-periodisch}} + jn\omega c_n \\ &= jn\omega c_n \end{aligned}$$

Der Beweis für den Fall  $n = 0$  geht mit analogen Überlegungen (ohne partielle Integration). Die Behauptungen für die Koeffizienten  $a'_n$  und  $b'_n$  lassen sich wieder mit den allgemeinen Umrechnungsformeln (vgl. Satz 1.38) zeigen.

□.

**Bemerkung 2.24 Achrung:** Der Satz gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn  $x$  nicht als stetig vorausgesetzt wird.

Der folgende Satz kann als Gegenstück zum Differentiationssatz angesehen werden.

**Satz 2.25** Sei  $x(t)$  auf dem Periodenintervall  $[0, T]$  stückweise stetig und sei  $X(t) = \int_0^t x(s) ds$  mit  $X(T) = 0$ . Dann ist  $X$  ebenfalls  $T$ -periodisch und die Fourierkoeffizienten  $c_n(X)$  von  $X$  berechnen sich aus den Fourierkoeffizienten  $c_n(x)$  von  $x$  durch

$$c_n(X) = \begin{cases} -\frac{1}{T} \int_0^T t \cdot x(t) dt & \text{falls } n = 0 \\ -\frac{j}{\omega n} c_n(x) & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}$$

d. h. die Fourierreihe von  $x$  darf gliedweise integriert werden.

*Beweis:* Da

$$\begin{aligned} X(t+T) &= \int_0^{t+T} x(s) ds \\ &= \underbrace{\int_0^T x(s) ds}_{=0} + \int_T^{t+T} x(s) ds \\ &= \int_0^t x(s) ds \\ &= X(t) \end{aligned}$$

ist  $X$  ebenfalls  $T$ -periodisch.

Aus dem Differentiationssatz erhalten wir für  $n \neq 0$

$$c_n(x) = c_n(X') = j\omega n c_n(X)$$

also

$$c_n(X) = \frac{1}{j\omega n} c_n(x) = \frac{-j}{\omega n} c_n(x)$$

Für  $n = 0$  gilt (mit der entsprechenden Unterteilung des Periodenintervalls wie beim Beweis des Differentiationssatzes) mittels partieller Integration ( $u = X(t)$ ,  $v' = 1$ )

$$\begin{aligned} c_0(X) &= \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ t \cdot X(t) \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} t \cdot x(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} [t_{k+1} \cdot X(t_{k+1}) - t_k \cdot X(t_k)] - \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot x(t) dt \\ &= \underbrace{T \cdot X(T)}_{=0} - 0 \cdot X(0) - \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot x(t) dt \end{aligned}$$

□.

Wir werden nun noch eine neue Rechenoperation kennenlernen, die so genannte periodische Faltung, deren Bedeutung am Ende des Kapitels bei einem Anwendungsbeispiel noch genauer erläutert wird.

**Definition 2.26** Sind  $x, y$   $T$ -periodische, stückweise stetige Funktionen, so bezeichnen wir mit

$$(x * y)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau)y(\tau) d\tau$$

die periodische Faltung von  $x$  und  $y$ .

**Satz 2.27** a)  $x * y = y * x$

b) Mit  $x$  und  $y$  ist auch  $x * y$   $T$ -periodisch.

c) Ist  $x$  stetig differenzierbar, so ist auch  $x * y$  stetig differenzierbar und es gilt

$$(x * y)' = x' * y.$$

*Beweis:*

a) Mit der Substitution  $\tilde{\tau} = t - \tau$  erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} (x * y)(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau)y(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(\tilde{\tau})y(t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tilde{\tau})y(t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \\ &= (y * x)(t) \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} (x * y)(t + T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{x(t + T - \tau)}_{=x(t-\tau)} y(\tau) d\tau \\ &= (x * y)(t) \end{aligned}$$

c) Wird hier nicht behandelt.

□.

Die Fourierreihe der Faltung zweier periodischer Funktionen lässt sich einfach berechnen.

**Satz 2.28 (Faltungssatz)** Seien  $x$  und  $y$   $T$ -periodisch und stückweise stetig. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten  $c_n(x * y)$  von  $x * y$

$$c_n(x * y) = c_n(x) \cdot c_n(y),$$

wobei  $c_n(x)$  und  $c_n(y)$  die Fourierkoeffizienten von  $x$  und  $y$  bezeichnen. Einer Faltung im Zeitbereich entspricht somit einer Multiplikation im Frequenzbereich.

*Beweis:* Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n(x * y) &= \frac{1}{T} \int_0^T (x * y)(t) \cdot e^{-j\omega n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau \right) e^{-j\omega n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot e^{-j\omega n(t-\tau)} dt \right) e^{-j\omega n \tau} d\tau \end{aligned}$$



Für das innere Integral erhalten wir mit der Substitution  $t - \tau = s$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T x(t - \tau) \cdot e^{-j\omega n(t-\tau)} dt &= \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} x(s) \cdot e^{-j\omega ns} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(s) \cdot e^{-j\omega ns} ds \\ &= c_n(x) \end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt sich also

$$\begin{aligned} c_n(x * y) &= c_n(x) \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \\ &= c_n(x) \cdot c_n(y) \end{aligned}$$

□.

## 2.3 Konvergenzverhalten

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit folgenden Fragestellungen:

- Unter welchen Voraussetzungen konvergiert eine Fourierreihe?
- Unter welchen Voraussetzungen kann man eine Funktion (ein Signal) aus ihrem Spektrum, d. h. den Fourierkoeffizienten wiedergewinnen?

Wann gilt also

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega nt} ?$$

Wir befassen uns zunächst mit verschiedenen Konvergenzbegriffen.

**Definition 2.29** a) Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{C}$ , wenn die Folge der Partialsummen gegen  $a$  konvergiert, d. h. wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = a$$

Wir schreiben dann  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ .

b) Seien  $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen.  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$  heißt punktweise konvergent gegen  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn für alle  $t \in [a, b]$  gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = x(t)$$

c) Seien  $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen.  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$  heißt gleichmäßig konvergent gegen  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \max_{a \leq t \leq b} \left| \sum_{n=0}^N x_n(t) - x(t) \right| \right\} = 0$$

**Bemerkung 2.30** a) Anschaulich bedeutet die gleichmäßige Konvergenz, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N_0$  existiert, so dass der Graph von  $\sum_{n=0}^N x_n(t)$  für  $N \geq N_0$  in einem Streifen der Breite  $\varepsilon$  um den Graphen der Grenzfunktion verläuft.

b) Kriterium für punktweise Konvergenz:

Falls zu jedem  $n \geq 0$  und jedem  $t \in [a, b]$  eine Zahl  $K_n(t) > 0$  existiert, so dass  $|x_n(t)| \leq K_n(t)$  und die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} K_n(t)$  konvergiert, so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$  punktweise konvergent.

c) Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:

Falls zu jedem  $n \geq 0$  eine Zahl  $K_n > 0$  existiert, so dass  $\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t)| \leq K_n$  und die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$  konvergiert, so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)$  gleichmäßig konvergent.

Wir kommen nun zu den angekündigten Konvergenzaussagen.

**Satz 2.31** Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\{x\}(t) = S\{x\}(t) = \frac{1}{2}(x(t^+) + x(t^-)),$$

wobei

$$x(t^+) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} x(\tau) \text{ und } x(t^-) = \lim_{\tau \rightarrow t^-} x(\tau)$$

die rechts- und linksseitigen Grenzwerte bezeichnen.

Die Fourierreihe konvergiert somit punktweise.

**Bemerkung 2.32** a) Ist  $x$  stetig in  $t \in \mathbb{R}$ , so ist  $x(t^+) = x(t^-) = x(t)$  und somit

$$S\{x\}(t) = x(t)$$

b) An einer Sprungstelle konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus rechts- und linksseitigem Grenzwert der Funktion.

**Satz 2.33** Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \max_{t \in [0, T]} |S_N\{x\}(t) - x(t)| \right) = 0.$$

Die Fourierreihe konvergiert somit gleichmäßig auf  $[0, T]$  gegen  $x$ .

**Satz 2.34** Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  stückweise stetig. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T |S_N\{x\}(t) - x(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 0.$$

Man sagt, die Fourierreihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen  $x$ .

Weiter gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

**Bemerkung 2.35** a) Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die punktweise Konvergenz und die quadratische Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht!

- b) Bei der Approximation von  $T$ -periodischen, auf  $[0, T]$  stückweise stetig differenzierbaren Funktionen durch  $N$ -te Teilsummen der Fourierreihe treten in der Nähe von Sprungstellen „Überschwinger“ auf, die mit wachsendem  $N$  auf die Sprungstellen zurückgehen, ohne dass die Höhe der Überschwinger gegen 0 konvergiert. Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

**Beispiel 2.36** a) Sägezahn: stückweise stetig differenzierbar, aber nicht stetig; punktweise Konvergenz

- b) Zackenfunktion: stetig und stückweise stetig differenzierbar; gleichmäßige Konvergenz

Aus der Parsevalschen Gleichung ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften für die Fourierkoeffizienten.

**Folgerung 2.37** Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und auf  $[0, T]$  stückweise stetig. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten

- a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

- b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{-n} = 0$$

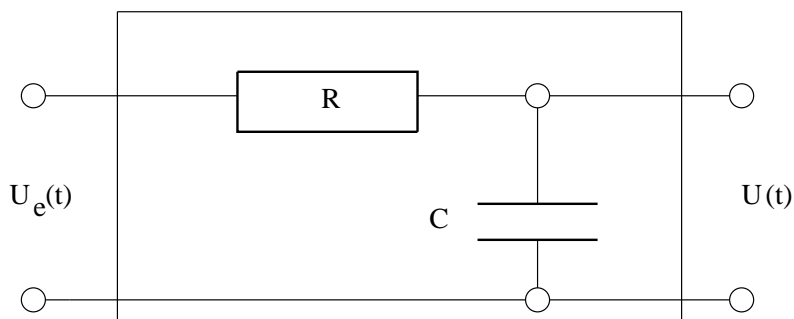
Genauer wird das Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion in folgendem Satz beschrieben.

**Satz 2.38** Sei  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und  $m$ -mal stetig differenzierbar, wobei die  $m$ -te Ableitung  $x^{(m)}$  auf  $[0, T]$  stückweise stetig differenzierbar sein soll. Dann existiert eine Zahl  $M < \infty$ , so dass für die Fourierkoeffizienten gilt

$$|c_n| < \frac{M}{|n|^{m+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## 2.4 Anwendungsbeispiel: RC-Tiefpassfilter

Wir betrachten folgende Schaltung.



Schaltbild RC-Kreis

Zwischen der Eingangsspannung  $U_e(t)$  und der Ausgangsspannung  $U(t)$  gilt folgender Zusammenhang.

$$RC\dot{U}(t) + U(t) = U_e(t)$$

Sei nun  $U_e(t)$   $T$ -periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt

$$U_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(U_e) e^{j\omega n t}$$

Setzen wir für  $U(t)$  ebenfalls eine Fourierreihe an,

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(U) e^{j\omega n t},$$

so gilt mit dem Differentiationsatz

$$\dot{U}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(U) \frac{1}{j\omega n} e^{j\omega n t}.$$

Einsetzen in die DGL und Vergleich der Fourierkoeffizienten liefert

$$RC \cdot c_n(U) \frac{1}{j\omega n} + c_n(U) = c_n(U_e),$$

also

$$c_n(U) = \frac{c_n(U_e)}{1 + j\omega n RC}$$

Die Fourierkoeffizienten von  $U$  gehen aus denen von  $U_e$  durch Multiplikation mit  $d_n = 1/(1+j\omega n RC)$  hervor, d. h.

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot c_n(U_e) e^{j\omega n t}$$

Der Multiplikation der Fourierkoeffizienten entspricht die periodische Faltung von

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{j\omega n t}$$

mit der Funktion  $U_e(t)$ .

$h(t)$  heißt Übertragungsfunktion des Systems:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j\omega n RC} e^{j\omega n t}$$

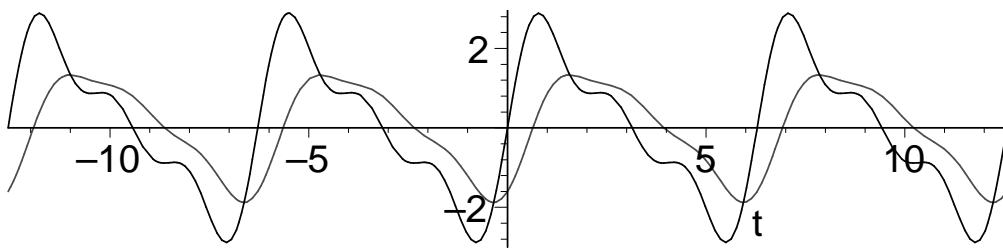
Dies ist die Fourierreihendarstellung von

$$h(t) = \frac{T}{RC} \left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

für  $0 \leq t < T$ ,  $h(t)$   $T$ -periodisch.

Je größer der Betrag von  $n$  wird, desto kleiner wird der Betrag  $|d_n| = \frac{1}{|1+j\omega n RC|}$  der Fourierkoeffizienten der Übertragungsfunktion. Durch die Multiplikation mit den Fourierkoeffizienten  $c_n(U_e)$  werden Anteile mit hoher Frequenz stark gedämpft, Anteile mit niedriger Frequenz dagegen nicht (daher die Bezeichnung Tiefpass).

Für  $U_e(t) = 2 \sin t + \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t)$  ergibt sich  $U(t) = \sin t - \cos t + \frac{1}{5} \sin(2t) - \frac{2}{5} \cos(2t) + \frac{1}{15} \sin(3t) - \frac{1}{5} \cos(3t)$ .



$U_e(t)$  und  $U(t)$