Skript zur Vorlesung
Mathematik für Sicherheitstechniker
Sommersemester 2014
(Master Studiengang)

Prof. Dr. M. Heilmann
Fachbereich C, Mathematik
Bergische Universität Wuppertal

März 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen – Wiederholung

Die komplexen Zahlen bilden eine Erweiterung der reellen Zahlen. Sie werden z. B. für die komplexe Wechselstromtechnik benutzt.
Problem: $x^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.

1.1.1 Komplexe Zahlen in kartesischer Form

Definition 1.1 *$j = \sqrt{-1}$ heißt* imaginäre Einheit, *das Quadrat $j^2 = -1$ ist eine reelle Zahl. Eine* imaginäre Zahl *bj ist das Produkt aus $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ und der imaginären Einheit j.*

Bemerkung 1.2 *a) Lösungen von $x^2 = -1$:*

$$x = j \text{ oder } x = -j$$

b) Wurzeln aus anderen negativen Zahlen:

$$\begin{aligned} \sqrt{-9} &= \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3j \\ \sqrt{-5} &= \sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5}j \end{aligned}$$

c) Lösungen beliebiger quadratischer Gleichungen mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ mit quadratischer Formel:

$$\begin{aligned} & x^2 - x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ \Leftrightarrow \qquad & x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \\ \Leftrightarrow \qquad & x = \frac{1 \pm \sqrt{3}j}{2} \end{aligned}$$

(Probleme wie b), c) sind lösbar, sobald die imaginäre Einheit definiert ist.)

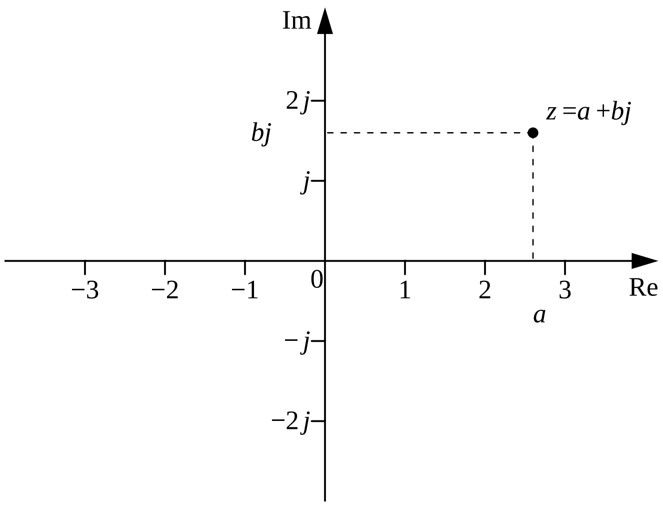
Definition 1.3 (Komplexe Zahlen) *Eine Zahl $z = a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt* komplexe Zahl.
Dabei bezeichnet man mit $a = \operatorname{Re} z$ den Realteil *und mit $b = \operatorname{Im} z$ den* Imaginärteil *von z.*
Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit

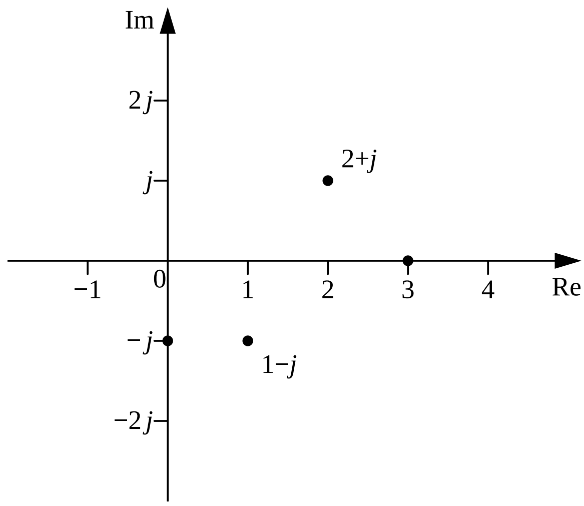
$$\mathbb{C} = \{z : z = a + bj : a, b \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet.

Bemerkung 1.4 *Die Darstellungsform $z = a + bj$ einer komplexen Zahl heißt* kartesische Form.

Graphische Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene
Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = a + bj$ werden als kartesische Koordinaten aufgefasst. Die Koordinatenachsen werden mit $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ bezeichnet.





Beispiel 1.5

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 + j \\
z_2 &= 1 - j \\
z_3 &= 3 \\
z_4 &= -j
\end{aligned}
$$

Grundlegende Eigenschaften und Rechenoperationen

Definition 1.6 *a) Zwei komplexe Zahlen heißen gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen.*

b) Die komplexe Zahl $z^* = a - bj$ heißt die zu $z = a + bj$ konjugiert komplexe Zahl.

Bemerkung 1.7 *Sei $z = a + bj \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$z \neq 0 \Leftrightarrow (a \neq 0 \ \textit{oder} \ b \neq 0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 0$$

Bemerkung 1.8 *a) Die Vergleichsrelationen "größer", "kleiner" lassen sich zwischen komplexen Zahlen nicht definieren.*

b) $z \in \mathbb{C}$ *reell* $\Leftrightarrow\ \operatorname{Im} z = 0$
$z \in \mathbb{C}$ *imaginär* $\Leftrightarrow\ \operatorname{Re} z = 0$

c) *Der Bildpunkt der konjugiert komplexen Zahl* z^* *ist in der Gaußschen Zahlenebene die Spiegelung von* z *an der reellen Achse.*

d) $(z^*)^* = z$

e) $z = z^* \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

f) $z^* = -z \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z$ *imaginär*

Im folgenden seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$z = a + bj,\ z_1 = a_1 + b_1 j,\ z_2 = a_2 + b_2 j \in \mathbb{C}\,.$$

Bei den nun folgenden Definitionen der grundlegenden Rechenoperationen ist zu beachten, dass diese bei der Anwendung auf reelle Zahlen mit den dort bereits vorhandenen Rechenoperationen übereinstimmen müssen, da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (Permanenzprinzip).
Rechenoperationen:

a) *Multiplikation mit reeller Zahl:*

$$\alpha z = \alpha(a + bj) = \alpha a + \alpha b j$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha z) &= \alpha \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im}(\alpha z) &= \alpha \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

b) *Addition, Subtraktion:*

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + b_1 j) \pm (a_2 + b_2 j) \\ &= a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2) j \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2 \end{aligned}$$

c) *Multiplikation:*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) \\ &= a_1 a_2 + \underbrace{b_1 j b_2 j}_{j^2=-1} + a_1 b_2 j + b_1 j a_2 \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) j \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Re} z_2 \end{aligned}$$

Spezialfälle:

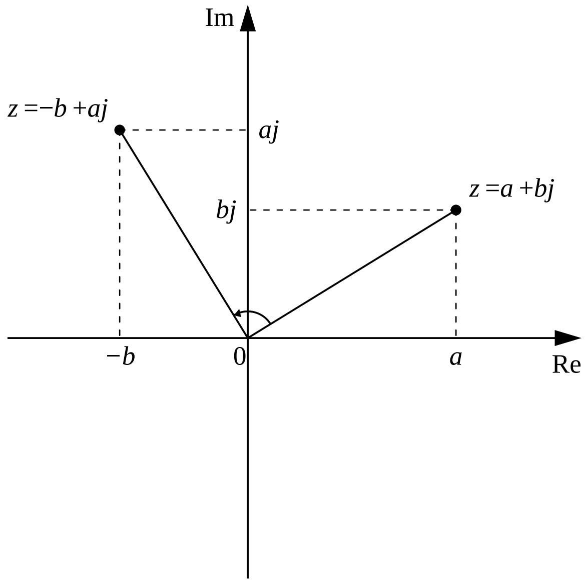
i) Multiplikation mit j

$$zj = aj + bj^2 = -b + aj$$

bedeutet geometrisch eine Drehung um $90°$.

ii) Produkt einer Zahl mit der konjugiert komplexen:

$$z\,z^* = (a + bj)(a - bj) = a^2 - (bj)^2 = a^2 + b^2$$



d) *Division:* $z_2 \neq 0$

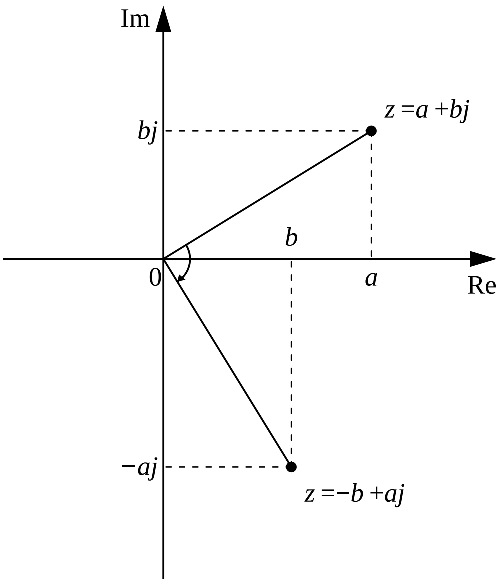
$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} \\
&= \frac{(a_1 + b_1 j)(a_2 - b_2 j)}{(a_2 + b_2 j)(a_2 - b_2 j)} \\
&= \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2 j^2 - a_1 b_2 j + b_1 a_2 j}{a_2^2 - b_2^2 j^2} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} j
\end{aligned}$$

Spezialfälle:

i) Division durch j:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j} &= \frac{-j}{j(-j)} = -\frac{j}{1} = -j. \\
\frac{z}{j} &= z(-j) = (a + bj)(-j) = b - aj.
\end{aligned}$$

bedeutet geometrisch eine Drehung um $-90°$.



ii) Kehrwert:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bj} \\
&= \frac{a-bj}{(a+bj)(a-bj)} \\
&= \frac{a-bj}{a^2+b^2} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}(a-bj) \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}z^* \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}j \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}(a-bj) \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}z^*
\end{aligned}$$

Beispiel 1.9 *a)*

$$5(3+j) = 15 + 5j.$$

b)

$$(5+3j) + (2-4j) = 7 - j$$

c)

$$\begin{aligned}
(3+2j)(4-j) &= 12 - (-2) - 3j + 8j \\
&= 14 + 5j
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 \\ j^3 &= -j \\ j^4 &= 1 \\ j^5 &= j \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \frac{7-2j}{2+j} &= \frac{(7-2j)(2-j)}{(2+j)(2-j)} \\ &= \frac{14+2j^2-7j-4j}{4-j^2} \\ &= \frac{12}{5} - \frac{11}{5}j \end{aligned}$$

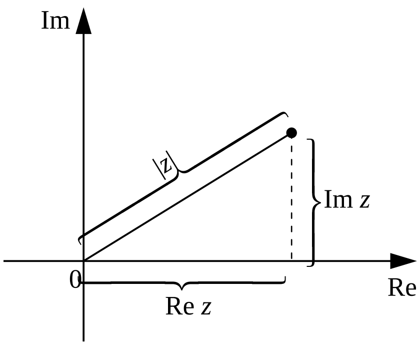
f)

$$\begin{aligned} j^{-1} &= -j \ \ s.o. \\ j^{-2} &= \frac{1}{j^2} = -1 \\ j^{-3} &= (-1)(-j) = j \\ j^{-4} &= (-1)(-1) = 1 \\ j^{-5} &= 1(-j) = -j \end{aligned}$$

Betrag einer komplexen Zahl

Definition 1.10 (Betrag einer komplexen Zahl) *Unter dem* Betrag einer komplexen Zahl *versteht man den Abstand zum Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene, d. h. (nach Pythagoras)*

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$



Bemerkung 1.11 *a)*

$$|z| \in \mathbb{R}, \ \ |z| \geq 0$$

b)

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

c) Sei $z = a + bj \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$zz^* = (a + bj)(a - bj) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

d)

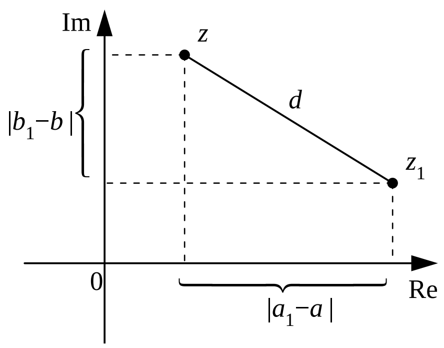
$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| &= \sqrt{(\mathrm{Re} z)^2} = \sqrt{z^2} \\ &= \begin{cases} z \text{ für } z \geq 0 \\ -z \text{ für } z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.12 *Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.*

a) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene einen Kreis um 0 mit Radius r, d. h. die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Ursprung höchstens den Abstand r haben.

b) Der Abstand zwischen zwei Punkten $z = a+bj$ und $z_1 = a_1+b_1j$ in der Gaußschen Zahlenebene beträgt nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} d^2 &= (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 \\ \Rightarrow d &= \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2} \\ &= \sqrt{[\,\mathrm{Re}\,(z - z_1)]^2 + [\,\mathrm{Im}\,(z - z_1]^2} \\ &= |z - z_1| \end{aligned}$$



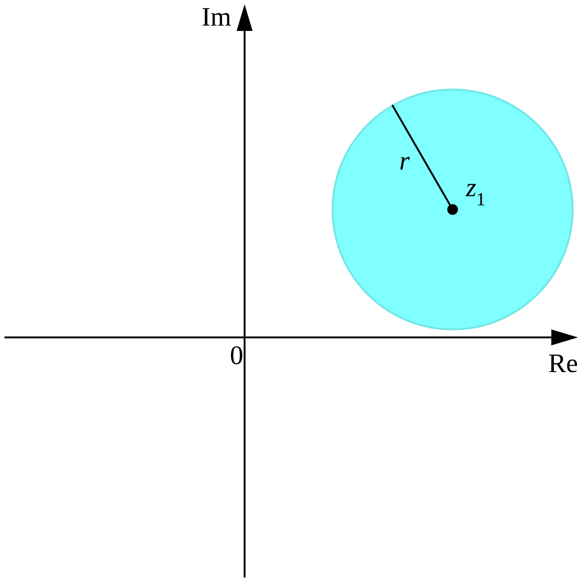
c) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq r\}$ beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene einen Kreis um z_1 mit Radius r, d. h. die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die von z_1 höchstens den Abstand r haben.

1.1.2 Komplexe Zahlen in Polarform

Jede komplexe Zahl $z = a + bj \in \mathbb{C}$ lässt sich stets auch als

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

schreiben, wobei $r \geq 0$ den Abstand zum Ursprung in der komplexen Zahlenebene bezeichnet und φ den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der Verbindungsstrecke vom Ursprung mit der Zahl.
Falls $z \neq 0$, ist die Darstellung für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ eindeutig.



Definition 1.13 *Sei $z = r(\cos\varphi + j sin\varphi) \in \mathbb{C}$ mit $r \geq 0$.*

a) $r = |z|$ heißt Betrag *(oder Modul) von z.*

b) φ heißt (ein) Argument (oder Winkel) von z und wird mit $\operatorname{Arg} z$ *bezeichnet.*
Falls $z \neq 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dann ist φ der Hauptwert des Argumentes (Winkels) von z und wird mit $\arg z$ Hauptwert *bezeichnet*

Umwandlungen Polarform in Kartesische Form

a) Polarform $\longrightarrow$ kartesische Form
Gegeben:
$$\begin{aligned} z &= r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \\ &= r\cos\varphi + j \cdot r\sin\varphi \end{aligned}$$
Somit:
$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = r\cos\varphi, \ \operatorname{Im}(z) = r\sin\varphi}$$

b) Kartesiche Form $\longrightarrow$ Polarform
Gegeben: $z = a + bj$
Es gilt:
$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$
Berechnung von φ

i) 1. Quadrant, $a > 0$, $b \geq 0$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ somit:
$$\boxed{\varphi = \arctan\frac{b}{a}}$$

ii) 2. Quadrant, $a < 0$, $b \geq 0$, $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Setze $\alpha = \pi - \varphi$, dann ist $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$.
$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{b}{-a} \\ \Rightarrow \alpha &= \arctan\frac{b}{-a} \\ &= -\arctan\frac{b}{a} \end{aligned}$$

somit:

$$\boxed{\varphi = \pi + \arctan \frac{b}{a}}$$

iii) 3. Quadrant, $a < 0$, $b \leq 0$, $\varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$. Setze $\alpha = \varphi + \pi$, d.h. $\varphi = -\pi + \alpha$. Dann ist $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$.

$$\tan \alpha = \frac{-b}{-a}$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan \frac{b}{a}$$

somit:

$$\boxed{\varphi = -\pi + \arctan \frac{b}{a}}$$

iv) 4. Quadrant, $a > 0$, $b \leq 0$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$, $\tan(-\varphi) = \arctan \frac{b}{a}$
$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a}$ (da tan ungerade)
somit:

$$\boxed{\varphi = \arctan \frac{b}{a}}$$

v) $a = 0, b > 0 : \varphi = \frac{\pi}{2}$ (rein imaginär)
$a = 0, b < 0 : \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Insgesamt: F
ür $z = a + bj$ ist $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \arg z &= \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & , a > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a} & , a < 0, b \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{b}{a} & , a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , a = 0, b < 0 \end{cases} \quad \text{bzw. } \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & , a > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a} & , a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , a = 0, b < 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

Beispiel 1.14 *a)*

$$\begin{aligned} z &= 5\left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 5(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}j. \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + j\sin\frac{5}{4}\pi\right)\\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\\
&= -1 - j.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
z &= -\sqrt{3} + j\\
|z| &= \sqrt{3+1} = 2\\
\tan\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} b = 1\\ a = -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \textit{2.Quadrant:}\\ \varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}\end{pmatrix}\\
\Rightarrow \varphi &= \arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi\\
&= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1.15 *Sonderfälle: Polarform reeller Zahlen:*

$$
\begin{aligned}
a \geq 0 &: a = a(\underbrace{\cos 0}_{=1} + j\underbrace{\sin 0}_{=0})\\
a < 0 &: a = |a|(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + j\underbrace{\sin\pi}_{=0})
\end{aligned}
$$

Polarform rein imaginärer Zahlen:

$$
\begin{aligned}
j &= 1\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + j\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right)\\
j^3 = \frac{1}{j} = -j &= 1\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + j\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\right)\\
b > 0 : jb &= |b|\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + j\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right)\\
b < 0 : jb &= |b|\left(\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{=0} + j\underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{=-1}\right)
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1.16 *Im folgenden werden einige Beziehungen für trigonometrische Funktionen benötigt, die hier noch einmal wiederholt werden.*

a) *Additionstheoreme für Summe und Differenz von Argumentwerten*

   i) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

   ii) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

b) *Additionssatz für zweifaches des Argumentes*

   a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

   b) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

c) *Trigonometrischer Pythagoras*
   $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Multiplikation in Polarform
Benötigt werden die Additionstheoreme für sin und cos,d. h.

a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\\
z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)\\
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)\\
&= r_1 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + j\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right)\\
&= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + j\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)
\end{aligned}$$

d. h.:

$$\boxed{\begin{array}{l} |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \\ \text{Arg }(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 \end{array}}$$

(Normieren auf $(-\pi, \pi]$ für Hauptwert).

Beispiel 1.17

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right), z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + j\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}\\
&\Rightarrow z_1 z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Division in Polarform
$(z_2 \neq 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}\frac{(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)}\\
&= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\underbrace{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}_{1}}\\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}$$

d. h.

$$\boxed{\begin{aligned}\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\\ \text{Arg}\,\frac{z_1}{z_2} &= \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2\end{aligned}}$$

Beispiel 1.18

$$\begin{aligned}
z_1 &= 5\left(\cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\
z_2 &= 3\left(cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{5}{3}j
\end{aligned}$$

Potenzen in Polarform

$$\begin{aligned}
z &= r(\cos\varphi + j\sin\varphi)\\
\Rightarrow z^2 = zz &= rr\left(\cos(\varphi+\varphi) + j\sin(\varphi+\varphi)\right)\\
&= r^2\left(\cos(2\varphi) + j\sin(2\varphi)\right) && \text{(vgl. Multiplikation)}\\
z^3 = zz^2 &= rr^2\left(\cos(\varphi+2\varphi) + j\sin(\varphi+2\varphi)\right)\\
&= r^2\left(\cos(3\varphi) + j\sin(3\varphi)\right) && \text{(vgl. Multiplikation)}
\end{aligned}$$

Satz 1.19 *Für $n \in \mathbb{N}_0, z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ ist*

$$\boxed{z^n = r^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))}$$

Beispiel 1.20 *Berechnen von $z = (1+j)^6$. Umschreiben in Polarform:*$|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
z &= (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}))^6\\
&= 8(\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{0} + \underbrace{j\sin\frac{3}{2}\pi}_{-1})\\
&= -8j
\end{aligned}$$

Wurzeln in Polarform
Gesucht: Alle Lösungen von $\omega^n = z$, wobei $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi), n \in \mathbb{N}$.
Betrachte zunächst

$$r = |z| = 1,$$

d.h.

$$z = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Dann muss $|\omega| = 1$ sein (sonst wäre $|z| = |\omega^n| = |\omega|^n \neq 1$).
Ansatz in Polarform:

$$\begin{aligned}
\omega &= \cos\gamma + j\sin\gamma\\
\Rightarrow \omega^n &= \cos(n\gamma) + j\sin(n\gamma)\\
&\stackrel{!}{=} z = \cos\varphi + j\sin\varphi\\
\Rightarrow n\gamma &= \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\\
\Rightarrow \gamma_k &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Also:

$$\omega_k = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), k \in \mathbb{Z}$$

sind Lösungen von $\omega^n = z$.
Frage: Wieviele verschiedene Lösungen gibt es ?
Betrachte z. B.:

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cancel{n}}{\cancel{n}}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi \cancel{n}}{\cancel{n}}\right) \\
(\sin, \cos\ \ 2\pi \text{ periodisch}) &= \cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0 \\
\omega_{n+1} &= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n+1)}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n+1)}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) = \omega_1
\end{aligned}$$

Allgemein gilt: Sei $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und $m = in + k$ mit $i \in \mathbb{Z}$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_m &= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(in+k)}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(in+k)}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + i\cdot 2\pi\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + i\cdot 2\pi\right) \\
&= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) = \omega_k
\end{aligned}$$

Es gibt also n verschiedene Lösungen ω_k, für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Satz 1.21 *a) Die Gleichung $\omega^n = z$ hat für $z = \cos\varphi + j\sin\varphi$ (d. h. $r = |z| = 1$) n verschiedene Lösungen:*

$$\omega_k = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

b) Die Gleichung $\omega^n = z$ hat für $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$,$r > 0$ n verschiedene Lösungen:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

c) $\omega^n = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$

Definition 1.22 *Für $\varphi \in (-\pi, \pi], z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ heißt die Lösung $\omega_0 =: \sqrt[n]{z}$ Hauptwert der n-ten Wurzel.*

Bemerkung 1.23 $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$ *äquivalent zu* $\arg \omega_0 = \arg \sqrt[n]{z} \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$.

Beispiel 1.24 *a) Lösungen von $\omega^3 = -1$:*
Polarform von -1:

$$-1 = (\cos\pi + j\sin\pi)$$

Also: $\omega^3 = -1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \omega_k &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right), k = 0, 1, 2\\
\omega_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}j\\
\omega_1 &= \cos\pi + j\sin\pi = -1\\
\omega_2 &= \cos\frac{5}{3}\pi + j\sin\frac{5}{3}\pi\\
&= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}j
\end{aligned}$$

b) $\omega^9 = -1$ *mit* $-1 = (\cos\pi + j\sin\pi)$

$$\Rightarrow \omega_k = \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}\right)$$

Also:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\\
\omega_1 &= \cos\left(\frac{3}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{3}{9}\pi\right)\\
\omega_2 &= \cos\left(\frac{5}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{5}{9}\pi\right)\\
\omega_3 &= \cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{7}{9}\pi\right)\\
\omega_4 &= \cos(\pi) + j\sin(\pi)\\
\omega_5 &= \cos\left(\frac{11}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{11}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{7}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{7}{9}\pi\right)\\
\omega_6 &= \cos\left(\frac{13}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{13}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{5}{9}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{5}{9}\pi\right)\\
\omega_7 &= \cos\left(\frac{15}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{15}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{9}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{3}{9}\pi\right)\\
\omega_8 &= \cos\left(\frac{17}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{17}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{9}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{1}{9}\pi\right)
\end{aligned}$$

c) $\omega^4 = 4$*:*

$$\begin{aligned}
4 &= 4(\cos 0 + j \sin 0)\\
\omega_k &= \sqrt{2}\left(\cos\left(0 + \frac{2\pi k}{4}\right) + j \sin\left(0 + \frac{2\pi k}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
\omega_0 &= \sqrt{2}\,(\cos 0 + j \sin 0) = \sqrt{2}\\
\omega_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}j\\
\omega_2 &= \sqrt{2}\,(\cos \pi + j \sin \pi) = -\sqrt{2}\\
\omega_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sqrt{2}j
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.25 *Die Lösungen von* $\omega^n = z$ *liegen auf dem Rand des Kreises um* 0 *mit dem Radius* $\sqrt[n]{|z|}$ *und bilden die Ecken eines regelmäßigen* n*-Ecks.*

1.1.3 Komplexe Zahlen in Exponentialform

Mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$\mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi$$

lässt sich eine dritte Darstellungsmöglichkeit für komplexe Zahlen angeben.
Mit

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{j\varphi}$$

bezeichnen wir die Exponentialform einer komplexen Zahl, wobei r wieder den Betrag (Modul) und φ das Argument bezeichnet.
Mit Hilfe der Eulerschen Formel lassen sich nun die Rechenoperationen Multiplikation, Division, Potenzieren und Radizieren aus dem vorhergehenden Abschnitt angeben.

a) Multiplikation: Für $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{j\varphi_2}$ ist

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

b) Division: Für $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{j\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{j\varphi_2} \neq 0$ ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

c) Potenzieren: Für $z = r\,\mathrm{e}^{j\varphi}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$z^n = r^n\,\mathrm{e}^{jn\varphi}$$

d) Radizieren: Für $z = r\,\mathrm{e}^{j\varphi}$ und $n \in \mathbb{N}$ sind

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{j(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})},$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ alle Lösungen (Wurzeln) der Gleichung $\omega^n = z$.

Beispiel 1.26 *a) Sei* $z_1 = 3\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$ *und* $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{12}}$*. Dann ist das Produkt*

$$z_1 z_2 = 6\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}$$

b) Sei $z_1 = 5\,\mathrm{e}\,j\frac{2}{3}\pi$ *und* $z_2 = 3\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}}$*. Dann ist der Quotient*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}$$

c) Für $z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}$ *ist*

$$z^6 = 8\,\mathrm{e}^{j\frac{3}{2}\pi}$$

d) Ist $z = 4 = 4\,\mathrm{e}^{j\cdot 0}$ *so lauten die Lösungen der Gleichung* $\omega^4 = z$*:*

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j(0+\frac{2\pi k}{4})}, \; k = 0, \dots, 3. \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{jk\frac{\pi}{2}} \\
\omega_0 &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{0} = \sqrt{2} \\
\omega_1 &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}j \\
\omega_2 &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\pi} = -\sqrt{2} \\
\omega_3 &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{2}j
\end{aligned}$$

1.2 Vorbemerkungen

In vielen technischen Bereichen spielt die Erzeugung, Speicherung, Verarbeitung, Übertragung und Wiedergabe von Signalen eine große Rolle.
Dazu werden mathematische Werkzeuge benötigt, die (zum Teil) im Rahmen dieser Vorlesung zur Verfügung gestellt werden sollen.
Bevor wir damit beginnen, betrachten wir zur Einstimmung einige akustische Signale und ihre mathematische Beschreibung.
Ein **idealer Ton** ist eine periodische Schwingung gleichbleibender Frequenz

$$x(t) = A \sin(2\pi\nu t),\ t \in \mathbb{R},$$

mit der Amplitude A, deren Größe für die Lautstärke verantwortlich ist, und der Frequenz ν, die die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit angibt und die Tonhöhe bestimmt. Wählt man als Einheit für die Zeitskala eine Sekunde, so wird die Frequenz in Hertz (Hz) angegeben (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde). äquivalent dazu kann man auch

$$x(t) = A \sin(\omega t),\ t \in \mathbb{R},$$

schreiben, wobei die Kreisfrequenz ω mit der Frequenz ν über die Gleichung $\omega = 2\pi\nu$ zusammenhängt.
Ein **realer Ton** ist ein Ausschnitt aus einem solchen periodischen Vorgang. Dabei muss die Tondauer wesentlich größer sein als die Periodenlänge, um tatsächlich einen Ton wahrnehmen zu können.
Ein **idealer Klang** ist eine überlagerung (Summe) mehrerer Töne mit unterschiedlichen Amplituden und Frequenzen

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(2\pi\nu_k t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Ein **realer Klang** ist auch hier wieder ein hinreichend langer Ausschnitt aus einem idealen Klang. Die von Instrumenten erzeugten Töne sind in diesem Sinne eigentlich Klänge, da der eigentliche Grundton der Frequenz ν von sogenannten Obertönen mit den Frequenzen 2ν, 3ν, $\ldots$ und vergleichsweise geringen Amplituden überlagert wird. Die Anteile an Obertönen sind verantwortlich für die unterschiedliche Klangfarbe verschiedener Instrumente.
Ein **Geräusch** ist ein akustischer Vorgang, der keine Periodizität erkennen lässt. Viele Frequenzen mit zum Teil extrem kurzen Tondauern kennzeichnen Geräusche.
Für die Verarbeitung von (akustischen) Signalen ist es wichtig zu wissen, welche Frequenzen vorkommen.
Das menschliche Gehör kann (abhängig vom Lebensalter) Frequenzen von circa 20 Hz bis 20 kHz wahrnehmen. Bei der Bildung bestimmter Konsonanten (z.B. s, z, f) sind Frequenzen von bis zu 10 kHz erforderlich. Sprache bleibt aber gut verständlich, wenn man Frequenzen oberhalb von 3.4 kHz unterdrückt.
Man bezeichnet den Frequenzbereich unterhalb von 20 Hz auch als *Infraschall*, den oberhalb von 20 kHz auch als *Ultraschall*, der beispielsweise in der Medizindiagnostik eine große Rolle spielt.
Die in dieser Veranstaltung vorgestellten Methoden werden insbesondere auch im Bereich der Regelungstechnik verwendet. In einem technischen System treten zeitabhängige Größen auf, die automatisch beeinflusst werden sollen. Will man beispielsweise bei einem Elektromotor einen bestimmten Drehzahlverlauf einhalten, mit welcher der Motor betrieben wird, so dient die elektrische Spannung als Stellgröße des Systems. Durch geeignete Veränderung der Spannung während des Betriebes lässt sich ein gewünschter Drehzahlverlauf des Motors herstellen.

1.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Im Verlauf der Vorlesung werden wir ständig mit der komplexen Exponentialfunktion arbeiten. Wir stellen daher vorab die Definition und einige Eigenschaften zusammen.

Definition 1.27 (Komplexe Exponentialfunktion) *Für $z \in \mathbb{C}$ und der kartesischen Darstellung $z = x + jy$ ist die* komplexe Exponentialfunktion *definiert durch*

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+jy} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{jy}\,.$$

Bemerkung 1.28 *a) Wegen der Eulerschen Formel ($\mathrm{e}^{jy} = \cos y + j \sin y$) kann man für e^{z} auch*

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + j \sin y)$$

schreiben.

b) Für Real- und Imaginärteil bzw. Betrag und Argument (Winkel) von e^{z} gilt

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x} \cos y\,,\ \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x} \sin y\,, |\,\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{x}\,, \arg\ \mathrm{e}^{z} = y$$

c) Es gelten folgende Eigenschaften und Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z_1+z_2} &= \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}\\
\mathrm{e}^{-z} &= \frac{1}{\mathrm{e}^{z}}\\
\mathrm{e}^{j2k\pi} &= 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\\
\mathrm{e}^{j(2k+1)\pi} &= -1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\\
\mathrm{e}^{j(2k+\frac{1}{2})\pi} &= j \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\\
\mathrm{e}^{j(2k-\frac{1}{2})\pi} &= -j \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\\
\mathrm{e}^{z+j2k\pi} &= \mathrm{e}^{z} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

1.4 Eigenschaften komplexwertiger Funktionen

Im Verlauf der Vorlesung werden wir es häufig mit Funktionen zu tun haben, bei denen zwar der Definitionsbereich in der Menge der reellen Zahlen liegt, der Bildbereich aber in der Menge der komplexen Zahlen liegt. Wir stellen daher vorab einige Definitionen und Eigenschaften zur Verfügung.

Definition 1.29 *Sei $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $x(t) = u(t) + jv(t)$ mit $u\,, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

a) x heißt stückweise stetig, *wenn u und v bis auf höchstens endlich viele Stellen stetig sind. An den Ausnahmestellen dürfen u und v nur endliche Sprünge aufweisen.*

b) x heißt stückweise stetig differenzierbar, *wenn u und v bis auf höchstens endlich viele Stellen stetig differenzierbar sind. An den Ausnahmestellen dürfen u' und v' nur endliche Sprünge aufweisen.*

Bemerkung 1.30 *a) Ist $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $t \in (a, b)$, so ist die Ableitung durch*

$$x'(t) = u'(t) + jv'(t)$$

gegeben.

b) Die für reelle Funktionen bekannten Ableitungsregeln wie Produkt-, Quotienten- und Kettenregel gelten analog.

Beispiel 1.31 *a) Sei $x(t) = (t^2 + 2t + jt^3)^4$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} u(t) &= 16t^4 + 32t^5 + 24t^6 + 8t^7 - 23t^8 - 24t^9 - 6t^{10} + t^{12} \\ v(t) &= 32t^6 + 48t^7 + 24t^8 + 4t^9 - 8t^{10} - 4t^{11} \end{aligned}$$

Somit ist $x'(t) = u'(t) + jv'(t)$ mit

$$\begin{aligned} u'(t) &= 64t^3 + 160t^4 + 144t^5 + 56t^6 - 184t^7 - 216t^8 - 60t^9 + 12t^{11} \\ v'(t) &= 192t^5 + 336t^6 + 192t^7 + 36t^8 - 80t^9 - 44t^{10} \end{aligned}$$

Einfacher erhält man durch Anwendung der Kettenregel

$$x'(t) = 4(t^2 + 2t + jt^3)^3(2t + 2 + 3jt^2)$$

b) Für $x(t) = \mathrm{e}^{4\mathrm{j}t}$ erhält man

$$x'(t) = 4\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{4\mathrm{j}t}$$

Wichtig für die im folgenden auftretenden Berechnungen von Stammfunktionen und bestimmten Integralen ist:

Bemerkung 1.32 *$x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $x(t) = u(t) + jv(t)$ stückweise stetig, so ist*

$$\begin{aligned} \int x(t)\,dt &= \int u(t)\,dt + j\int v(t)\,dt \\ \int_a^b x(t)\,dt &= \int_a^b u(t)\,dt + j\int_a^b v(t)\,dt \end{aligned}$$

Beispiel 1.33 *Dieses Beispiel werden wir in der Vorlesung in dieser oder ähnlicher Form permanent wieder verwenden.*

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{jt}\,dt &= \int \cos t\,dt + j\int \sin t\,dt \\ &= \sin t - j\cos t + C \\ &= \sin t + \frac{1}{j}\cos t + C \\ &= \frac{1}{j}(\sin t + \cos t) + C \\ &= \frac{1}{j}\,\mathrm{e}^{jt} + C \end{aligned}$$

Damit ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathrm{e}^{jt}\,dt &= \frac{1}{j}\,\mathrm{e}^{jt}|_0^\pi \\ &= \frac{1}{j}(\mathrm{e}^{j\pi} - \mathrm{e}^{0}) \\ &= -2\frac{1}{j} \\ &= 2j \end{aligned}$$

Bemerkung 1.34 *Die bekannten Regeln für die Integration reeller Funktionen gelten auch für komplexwertige Funktionen:*
Ist $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig, dann gilt*

$$\int_a^b g(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

mit $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *Stammfunktion zu* g, *d. h.* $G' = g$.
Es gilt die Regel für die partielle Integration.

Beispiel 1.35

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi t \cdot \mathrm{e}^{jt}\,dt &= t \cdot \underbrace{\frac{1}{j}}_{=-j} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{j}\int_0^\pi \cdot \mathrm{e}^{jt}\,dt \\
&= -\mathrm{j}\pi \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}}_{=-1} - \underbrace{\frac{1}{\mathrm{j}^2}}_{=-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\Big|_0^\pi \\
&= \mathrm{j}\pi - 2
\end{aligned}$$

1.5 Periodische Funktionen

Definition 1.36 (Periodische Funktion) *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *oder* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *heißt periodisch mit der Periode* T, $T > 0$, *(kurz* T*-periodisch), wenn*

$$f(t+T) = f(t), \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 1.37 *a)* $\sin t$ *und* $\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, *sind* 2π*-periodisch.*

b) $\tan t$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{t \,|\, t = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
$\cot t$, $t \in \mathbb{R}\backslash\{t \,|\, t = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, *sind* π*-periodisch.*

c) $\cos t + j \sin t = \mathrm{e}^{jt}$, $t \in \mathbb{R}$, *ist* 2π*-periodisch.*

Oft ist es üblich und zweckmäßig, sich auf die Betrachtung 2π-periodischer Funktionen zu beschränken. Dies wird durch folgende überlegung gerechtfertigt.

Satz 1.38 *Ist* $\tilde{x}(\tau)$ T*-periodisch, so ist* $x(t) = \tilde{x}(t/\omega)$, $\omega = 2\pi/T$, 2π*-periodisch.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
x(t+2\pi) &= \tilde{x}\left(\frac{t+2\pi}{\omega}\right) \text{ nach Definition von } x \\
&= \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega} + T\right) \\
&= \tilde{x}\left(\frac{t}{\omega}\right) \text{ da } \tilde{x}\ T\text{-periodisch} \\
&= x(t) \text{ nach Definition von } x
\end{aligned}$$

Oftmals wird eine Funktion nur explizit auf einem Intervall $[0,T]$ vorgegeben und dann periodisch fortgesetzt, d.h. man bestimmt eine periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0,T)$ mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt. Sei nun $g(t)$ definiert auf $[0,T]$.

a) Direkte Fortsetzung:

Man zerlegt $\mathbb{R}$ in die Intervalle $I_k = [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, der Länge T und definiert $x(t)$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x(t) = g(t - kT),\ t \in I_k\,.$$

Die so definierte Funktion ist dann T-periodisch.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph von g über jedes Intervall $I_k = [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, verschoben wird.

b) Gerade Fortsetzung:

Man zerlegt $\mathbb{R}$ in die Intervalle $I_k = [(2k-1)T, (2k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, der Länge $2T$ und definiert $x(t)$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x(t) = g(-t),\ t \in [-T, 0),\ \text{ und } x(t) = g(t - 2kT)\, t \in I_k\,.$$

Die so definierte Funktion ist dann $2T$-periodisch.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph von g zunächst an der Ordinatenachse gespiegelt wird. Die enstehende gerade Funktion wird dann über jedes Intervall $I_k = [(2k-1)T, (2k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, verschoben.

c) Ungerade Fortsetzung:

Man zerlegt $\mathbb{R}$ wieder in die Intervalle $I_k = [(2k-1)T, (2k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, der Länge $2T$ und definiert $x(t)$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x(t) = -g(-t),\ t \in [-T, 0),\ \text{ und } x(t) = g(t - 2kT)\, t \in I_k\,.$$

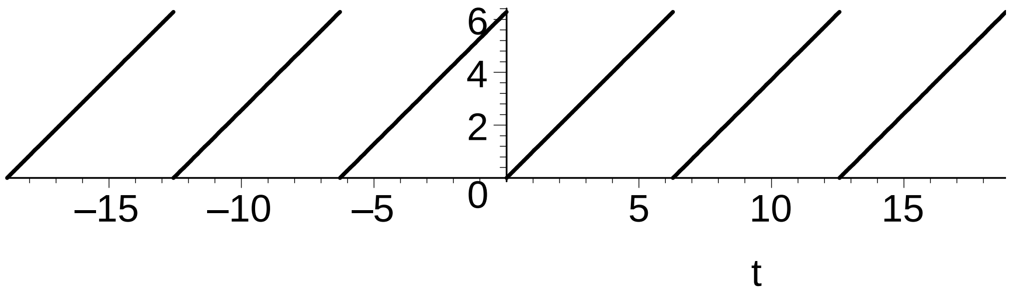
Die so definierte Funktion ist dann $2T$-periodisch.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph von g zunächst am Koordinatenursprung gespiegelt wird. Die enstehende ungerade Funktion wird dann über jedes Intervall $I_k = [(2k-1)T, (2k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$, verschoben.

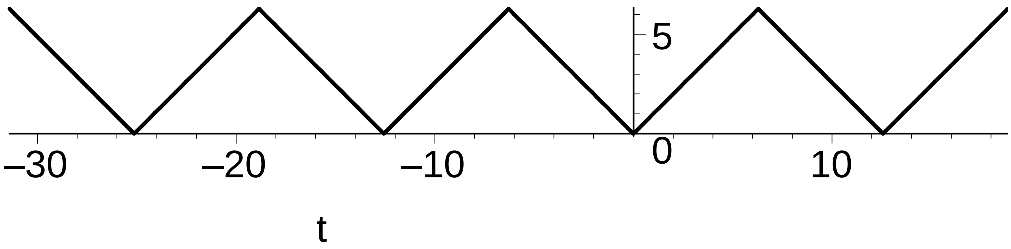
Beispiel 1.39 *Sei $g(t) = t$ für $t \in [0, T]$, $T > 0$.*

a) Direkte Fortsetzung:

$$x(t) = t - kT,\ t \in [kT, (k+1)T),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$



Direkte Fortsetzung, $T = 2\pi$



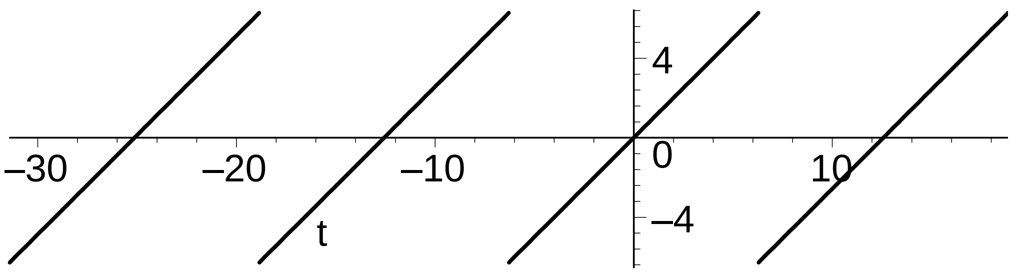
Gerade Fortsetzung, $T = 2\pi$

b) Gerade Fortsetung:

$$x(t) = |t - 2kT|,\ t \in [(2k-1)T, (2k+1)T),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

c) Ungerade Fortsetzung:

$$x(t) = t - 2kT,\ t \in [(2k-1)T, (2k+1)T),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$



Ungerade Fortsetzung, $T = 2\pi$

Bemerkung 1.40 *Es ist üblich, für die ursprüngliche Funktion und ihre periodische Fortsetzung dieselbe Bezeichnung zu verwenden. so kann man für die Funktionen in Beispiel 1.39 auch schreiben:*

a) Direkte Fortsetzung:

$$x(t) = t,\ t \in [0, T),\ x(t)\ T\text{-periodisch.}$$

b) Gerade Fortsetung:

$$x(t) = |t|,\ t \in [-T, T),\ x(t)\ 2T\text{-periodisch.}$$

c) Ungerade Fortsetzung:

$$x(t) = t,\ t \in [-T, T),\ x(t)\ 2T\text{-periodisch.}$$

1.6 Trigonometrische Polynome

Trigonometrische Polynome sind Linearkombinationen der T-periodischen Funktionen

$$1,\ \cos(\omega t),\ \sin(\omega t),\ \cos(2\omega t),\ \sin(2\omega t),\ \cos(3\omega t),\ \sin(3\omega t),\ \ldots$$

bzw. in komplexer Darstellung der Funktionen

$$1,\ \mathrm{e}^{j\omega t},\ \mathrm{e}^{-j\omega t},\ \mathrm{e}^{j\cdot 2\omega t},\ \mathrm{e}^{-j\cdot 2\omega t},\ \mathrm{e}^{j\cdot 3\omega t},\ \mathrm{e}^{-j\cdot 3\omega t},\ \ldots$$

Dabei ist wieder $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Definition 1.41 (Trigonometrisches Polynom) *Sei $N \in \mathbb{N}$. Jede Funktion $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ der Bauart*

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

bzw.

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_k \,\mathrm{e}^{jn\omega t}$$

heißt trigonometrisches Polynom. $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{C}$ bzw. $c_n \in \mathbb{C}$ heißen Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms. Für $|a_N| + |b_N| \neq 0$ bzw. $|c_{-N}| + |c_N| \neq 0$ ist N der Grad von $x(t)$.

Bemerkung 1.42 *Wir erinnern noch einmal an die Eulersche Formel*

$$\mathrm{e}^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi\,,$$

woraus sich die Darstellungen

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\varphi} + \mathrm{e}^{-j\varphi})$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2j}(\mathrm{e}^{j\varphi} - \mathrm{e}^{-j\varphi})$$

ergeben.

Mit Hilfe der Eulerschen Formel lassen sich die beiden in Definition 1.41 genannten Darstellungen ineinander umrechnen.

Satz 1.43 *Für $n = 1, 2, \ldots, N$ gelten die Umrechnungsformeln*

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0\,,\ c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n)\,,\ c_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)$$
$$a_0 = 2c_0\,,\ a_n = c_n + c_{-n}\,,\quad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} \{[c_n + c_{-n}] \cos(n\omega t) + j[c_n - c_{-n}] \sin(n\omega t)\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} \{c_n[\cos(n\omega t) + j\sin(n\omega t)]\} + \sum_{n=1}^{N} \{c_{-n}[\cos(n\omega t) - j\sin(n\omega t)]\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{\,j\cdot n\omega t} + \sum_{n=-N}^{-1} \{c_n[\cos(-n\omega t) - j\sin(-n\omega t)]\} \\
&= \sum_{n=0}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{\,j\cdot n\omega t} + \sum_{n=-N}^{-1} \{c_n[\cos(n\omega t) + j\sin(n\omega t)]\} \\
&= \sum_{n=0}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{\,j\cdot n\omega t} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n \,\mathrm{e}^{\,j\cdot n\omega t} \\
&= \sum_{n=-N}^{N} c_n \,\mathrm{e}^{\,j\cdot n\omega t}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms lassen sich mit Hilfe bestimmter Integrale ausdrücken. Um dies zeigen zu können, verwendet man die im folgenden Satz angegebenen Orthogonalitätseigenschaften.

Satz 1.44 *a) Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ falls } m = n = 0 \\ 0 \text{ falls } m \neq n \\ \frac{1}{2} \text{ falls } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = \begin{cases} 1 \text{ falls } m = n = 0 \\ 0 \text{ falls } m \neq n \\ \frac{1}{2} \text{ falls } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = 0$$

b) Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\,j\cdot m\omega t}\,\mathrm{e}^{\,-j\cdot n\omega t}\,dt = \begin{cases} 1 \text{ falls } m = n \\ 0 \text{ falls } m \neq n \end{cases}$$

Beweis:

a) Für den Beweis der Orthogonalitätseigenschaften vgl. 1. übungsblatt.

b) Für $n = m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\,j\cdot n\omega t}\,\mathrm{e}^{\,-j\cdot n\omega t}\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T 1\,dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Für $n \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\,j\cdot m\omega t}\,\mathrm{e}^{\,-j\cdot n\omega t}\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\,j\cdot(m-n)\omega t}\,dt\\
&= \frac{1}{T}\frac{1}{j\cdot(m-n)\omega}\,\mathrm{e}^{\,j\cdot(m-n)\omega t}\Big|_0^T\\
&= \frac{1}{T}\frac{1}{j\cdot(m-n)\omega}(\,\mathrm{e}^{\,j\cdot(m-n)\omega T}-1)\\
&= \frac{1}{T}\frac{1}{j\cdot(m-n)\omega}(\,\mathrm{e}^{\,j\cdot(m-n)\cdot 2\pi}-1) \text{ wegen } \omega=\frac{2\pi}{T}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Zusätzlich zu weiteren Eigenschaften trigonometrischer Polynome können wir nun die angekündigten Berechnungsformeln für die Koeffizienten angeben.

Satz 1.45 *Für ein trigonometrisches Polynom $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt:*

a) x hat in $[0, T)$ höchstens $2N$ verschiedene Nullstellen.

b) Wichtig im Zusammenhang mit Koeffizientenvergleich ist:

$$x(t) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow c_n = 0,\ -N \le n \le N$$

c) Zur Charakterisierung reellwertiger trigonometrischer Polynome gilt:

$$x(t) \in \mathbb{R} \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow c_n = c^*_{-n},\ 0 \le n \le N$$

d) Für die Koeffizienten von $x(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)\,dt\,,\ \ 0 \le n \le N,\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)\,dt\,,\ 1 \le n \le N,\\
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{e}^{\,-j\cdot n\omega t}\,dt\,,\ -N \le n \le N.
\end{aligned}$$

Beweis:

a) Analog zu entsprechenden Eigenschaften algebraischer Polynome; wird hier nicht bewiesen.

b) Ebenso.

c)

$$
\begin{aligned}
& x(t) \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\
\iff & x(t) - (x(t))^* = 0,\ t \in \mathbb{R} \\
\iff & \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{\,j \cdot n\omega t} - \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{\,j \cdot n\omega t} \right)^* = 0,\ t \in \mathbb{R} \\
\iff & \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{\,j \cdot n\omega t} - \sum_{n=-N}^{N} c_n^*\, \mathrm{e}^{\,-j \cdot n\omega t} = 0,\ t \in \mathbb{R} \\
\iff & \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{\,j \cdot n\omega t} - \sum_{n=-N}^{N} c_{-n}^*\, \mathrm{e}^{\,j \cdot n\omega t} = 0,\ t \in \mathbb{R} \\
\iff & \sum_{n=-N}^{N} (c_n - c_{-n}^*)\, \mathrm{e}^{\,j \cdot n\omega t} = 0,\ t \in \mathbb{R} \\
\iff & c_n - c_{-n}^* = 0,\ -N \le n \le N
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, \mathrm{e}^{\,-j \cdot n\omega t}\, dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{m=-N}^{N} c_m\, \mathrm{e}^{\,j \cdot m\omega t} \right) \mathrm{e}^{\,-j \cdot n\omega t}\, dt \\
&= \sum_{m=-N}^{N} c_m \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{\,j \cdot m\omega t}\, \mathrm{e}^{\,-j \cdot n\omega t}\, dt}_{\substack{1 \text{ falls } n = m \\ 0 \text{ falls } n \neq m}} \\
&= c_n
\end{aligned}
$$