Bergische Universität Wuppertal, Fachbereich C (Mathematik)
Prof. Dr. Margareta Heilmann
Teresa Schnepper, M.Sc.
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (Master)

Sommersemester 2015, 3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1
Die Funktion $y(t)$ erfülle $y(0) = 0$ und die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \left(1 + [y(t)]^2\right) t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass $y(t)$ auf $\mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar ist, dass $y(t)$ an der Stelle $t = 0$ ein globales Minimum besitzt und für alle t konvex ist.
(Hinweis: Lösen der Aufgabe ohne die Differentialgleichung zu lösen! Untersuchen Sie das Monotonie- bzw. Krümmungsverhalten mit Hilfe der Vorzeicheneigenschaften der Ableitungen.)

Aufgabe 3.2
Wir bezeichnen mit $b(t)$ das Bruttonationaleinkommen eines Landes, mit $k(t)$ den Kapitalbestand und mit $l(t)$ die Arbeitskraft zur Zeit t.
Wir legen folgende Modellannahmen zugrunde (vgl. Beispiel 1.2.4 im Skript): Es seien $A, \alpha, s, a, \beta, p$ positive Konstanten mit $\alpha < 1$.

1) $b(t) = A \cdot [k(t)]^{1-\alpha}[l(t)]^{\alpha}$
2) $\dot{k}(t) = s \cdot b(t)$
3) $l(t) = \beta(t + a)^p$

Leiten Sie eine Differentialgleichung für $k(t)$ her und lösen Sie das Anfangswertproblem mit $k(0) = k_0$.
Untersuchen Sie weiter das Verhalten $\frac{k}{l}$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 3.3
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $t\dot{y} + y - 4t^3 + 2t^2 = 0 \quad \text{mit} \quad y(-1) = -3.$
b) $\dot{y} + 2y - e^{-t} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2.$
c) $t\dot{y} + y = \ln(t) \quad \text{mit} \quad y(1) = \frac{1}{2}.$
d) $\dot{y} - 2\cos(t)y = \cos(t) \quad \text{mit} \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0.$

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, 22.04.2015, Fach 17, Ebene D.13.
Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu der Übung finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi/master/mathemaster.html