Skript zur Vorlesung
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Sommersemester 2015
(Master Studiengang)

Bergische Universität Wuppertal

Das Skript eignet sich zur Vor- und Nachbereitung der in der Veranstaltung vermittelten Inhalte.

Das Skript ist kein Ersatz für die Vorlesung und die begleitenden Übungen.

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen

I.1 Einführung

In vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften wie z.B. in der ökonomischen Wachstumstheorie, in Untersuchungen der Ausnutzung natürlicher Ressourcen, in Modellen der Umweltökonomie und in der Finanzmathematik hat man es häufig mit Gleichungen zu tun, in denen die gesuchten Größen Funktionen sind und in denen neben der unabhängigen Variablen auch Ableitungen der Funktion auftreten.
Handelt es sich um Funktionen einer Variablen und ihren Ableitungen, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen; bei Gleichungen mit Funktionen mehrerer Variablen und zugehörigen partiellen Ableitungen von partiellen Differentialgleichungen.
Als Beispiel für die große Bedeutung der Differentialgleichungen sei hier das Black-Scholes Modell, ein Modell zur Bewertung von Finanzoptionen, genannt. Fischer Black, Myron Samuel Scholes und Robert C. Merton erhielten 1997 für ihre Arbeiten den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Die inzwischen als Black-Scholes-DGL bezeichnete Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r V$$

dient unter gewissen vereinfachenden Annahmen als Modell für den Wert V einer (europäischen) Aktienoption mit dem Zinssatz r, dem Aktienkurs S und der Volatilität σ^2.
Wir werden uns im Rahmen dieser Veranstaltung auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränken. Wir werden häufig die Punkt-Notation für Ableitungen verwenden, insbesondere dann, wenn die unabhängige Variable die Zeit t ist, was in den meisten Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften der Fall ist.
Zur Einführung behandeln wir nun zunächst ein einfaches Beispiel.

Beispiel 1.1.1: Stetige Verzinsung

Mit $K(t)$ bezeichnen wir das Kapital zum Zeitpunkt t. Nimmt man an, dass die momentane Änderungsrate $\dot{K}(t)$ des Kapitals zu jedem Zeitpunkt proportional zum Kapital $K(t)$ ist, oder anders ausgedrückt, dass die relative Änderungsrate $\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}$ zu jedem Zeitpunkt t konstant gleich $i = p\%$ ist, so bedeutet dies

$$\dot{K}(t) = i \cdot K(t).$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL, bei der man durch einfache Überlegungen Funktionen $K(t)$ ermitteln kann, die die Gleichung erfüllen. Eine Funktion, die bis auf einen konstanten Faktor mit ihrer Ableitung übereinstimmt, muss eine Exponentialfunktion sein. Genauer gilt: $K(t) = C \cdot e^{it}$ erfüllt für jede beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ die angegebene DGL. Gibt man zusätzlich das Anfangskapital, d.h. das Kapital zum Zeitpunkt $t=0$ durch $K(0) = K_0$ vor, so ergibt sich durch Einsetzen

$$K(0) = C \cdot e^0 = K_0 \,, \text{ d.h. } C = K_0 .$$

Die Funktion $K(t) = K_0 \cdot e^{it}$, die die stetige Verzinsung beschreibt, erfüllt die oben angegebene DGL und die zusätzliche (Anfangs-)Bedingung $K(0) = K_0$.

Beispiel 1.1.2: Wir betrachten drei etwas allgemeinere typische Beispiele.

Seien $a > 0$, $b > 0$ reelle Konstanten.

Die DGL $\dot{y}(t) = a \cdot y(t)$ beschreibt bestimmte Wachstumsprozesse wie z.B. die stetige Verzinsung. Man verifiziert leicht, dass $y(t) = C \cdot e^{at}$ für alle $C \in \mathbb{R}$ die Gleichung erfüllt.

Die DGL $\dot{y}(t) = a y(t) - b\,[y(t)]^2$ beschreibt logistisches Wachstum.

Für $y(t) = \frac{a}{b + Cae^{-at}}$ gilt $\dot{y}(t) = \frac{Ca^3 e^{-at}}{(b + Cae^{-at})^2}$, also

$$a y(t) - b[y(t)]^2 = y(t)\{a - b y(t)\}$$
$$= \frac{a}{b + Cae^{-at}} \left\{ \frac{a(b + Cae^{-at}) - b \cdot a}{b + Cae^{-at}} \right\}$$
$$= \frac{C a^3 e^{-at}}{(b + Cae^{-at})^2} = y'(t)$$

Im Folgenden stellen wir zunächst einige grundlegende Definitionen und Bezeichnungen zusammen.

Definition 1.1.3: Unter einer gewöhnlichen DGL versteht man eine Gleichung, in der eine Funktion einer Variablen, deren Ableitungen und die unabhängige Variable auftreten. Jede Funktion, die mit ihren Ableitungen die Gleichung erfüllt, heißt eine Lösung der DGL.
Die Menge aller Lösungen heißt Lösungsmenge oder allgemeine Lösung.
Die höchste auftretende Ableitung heißt Ordnung der DGL.
Eine DGL heißt explizit, wenn sie nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, sonst implizit.

Beispiel 1.1.4: $y''' = x - 2y + \sqrt{y''}$, explizite DGL 3ter Ordnung
$\dot{s} - e^s + t \cdot \ddot{s} = 0$, implizite DGL 2ter Ordnung

Definition 1.1.5: Die Aufgabe, eine Lösung einer DGL n-ter Ordnung zu bestimmen, die zusätzlich sogenannten Anfangsbedingungen (AB)
$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$
genügt, heißt Anfangswertproblem (AWP).

In Beispiel 1.1.1 haben wir für das AWP $\dot{K}(t) = i K(t)$ mit $K(0) = K_0$ die Funktion $K(t) = K_0 \cdot e^{it}$ der stetigen Verzinsung als Lösung ermittelt.
Leider gibt es nicht "das Verfahren", um beliebige DGL zu lösen.
Nur für sehr spezielle Typen von DGLen können allgemeine Methoden zur Bestimmung der Lösungsmenge angegeben werden.
Bestimmte Lösungsmethoden sind also stets im Zusammenhang mit bestimmten Eigenschaften einer DGL zu sehen und umgekehrt.

In den folgenden Abschnitten werden wir einige Lösungsmethoden behandeln. Weiter werden wir uns mit Fragen der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beschäftigen, Abhängigkeiten von weiteren Parametern untersuchen und Stabilität von Gleichgewichtszuständen betrachten. Die folgenden Unterkapitel sind dabei nach dem jeweils betrachteten Typ gegliedert.

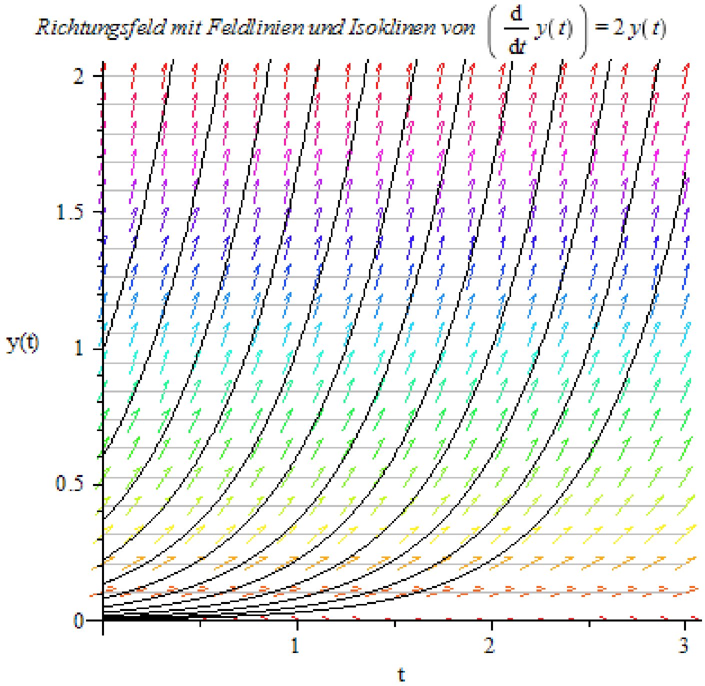
I.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten zunächst die geometrische Interpretation einer expliziten DGL 1. Ordnung, d.h. einer DGL der Form $y' = f(x,y)$. Durch eine solche Gleichung wird eine differenzierbare Kurve $y(x)$ gesucht, deren Tangentensteigung $y'(x)$ in jedem Kurvenpunkt gleich $f(x,y)$ ist. Zeichnet man nun an Punkten (x,y) in der xy-Ebene kurze Strecken (Linienelemente) mit Steigung $y'(x) = f(x,y)$, so entsteht das sogenannte Richtungsfeld der DGL. $y(x)$ ist genau dann eine Lösungskurve der DGL, wenn sie eine Feldlinie dieses Richtungsfeldes beschreibt, d.h. wenn in jedem Punkt der Kurve das zugehörige Linienelement tangential verläuft. Für die praktische Bestimmung eines solchen Richtungsfeldes kann es sinnvoll sein, die durch $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, festgelegten sogenannten Isoklinen (Linien mit konstantem Anstieg) zu betrachten. Wir schauen uns den Sachverhalt an einem konkreten Beispiel an.

Beispiel 1.2.1: Wir betrachten noch einmal die DGLen aus Beispiel 1.1.2 mit speziellen Werten für die allgemeinen Parameter a und b.

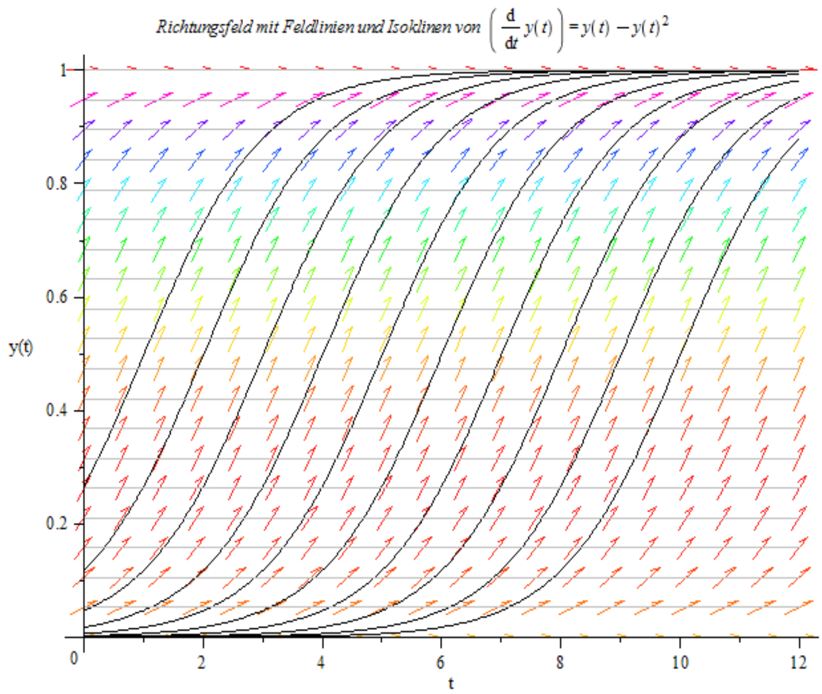
Die DGL $\dot{y}(t) = 2y(t)$ hat die Lösungen $y(t) = C\cdot e^{2t}$.

An den Punkten (t,y) in der ty-Ebene haben die Linienelemente die Steigung $2y$. In jedem Punkt einer Lösungskurve verläuft das zugehörige Linienelement tangential. Die Isoklinen sind gegeben durch $y=c$, d.h. Parallelen zur t-Achse.



In der nebenstehenden Grafik sind Linienelemente mit gleicher Steigung jeweils in derselben Farbe wiedergegeben. Die Isoklinen sind in hellgrau und einige Feldlinien (Lösungskurven) in schwarz gezeichnet.

Die DGL $y'(t)=y(t)-[y(t)]^2$ hat die Lösungen $y(t)=\dfrac{1}{1+Ce^{-t}}$.
An den Punkten (t,y) in der ty-Ebene haben die Linienelemente die Steigung $y-y^2$. Die Isoklinen sind gegeben durch $y-y^2=c$, d.h. auch hier wieder durch Parallelen zur t-Achse.



Wie oben sind auch hier Linienelemente mit gleicher Steigung in derselben Farbe wiedergegeben, die Isoklinen in hellgrau und einige Lösungskurven in schwarz gezeichnet.

Im Folgenden behandeln wir nun einige Lösungsmethoden für DGL 1. Ordnung.

DGL mit getrennten Variablen

Dabei handelt es sich um DGLen, die sich in der Form

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

darstellen lassen, d.h. y' ist ein Produkt zweier Funktionen, in dem jeder Faktor nur von einer der Variablen abhängt. Dabei sind $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf den Intervallen I bzw. J.
Die Methode zur Bestimmung der Lösungen einer solchen DGL wird mit Trennung der Variablen (TdV) bezeichnet. Zur Bestimmung der Lösungen müssen 2 Fälle unterschieden werden.

1. Fall: $g(\eta) = 0$ für ein $\eta \in J$. Dann ist $y(t) = \eta$ eine (konstante) Lösung der DGL. Solche speziellen Lösungen nennt man auch singuläre Lösungen.

2. Fall: $g(y) \neq 0$. Die Bestimmung der allgemeinen Lösung erfolgt in 5 Schritten.

1. Schritt: Umschreiben der DGL in

$$\frac{dy}{dt} = f(t) g(y) \qquad (*)$$

2. Schritt: Trennung der Variablen

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(t) dt$$

3. Schritt: Integration auf beiden Seiten

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$$

4. Schritt: Berechnung der beiden Integrale liefert Lösungen der DGL, möglicherweise in impliziter Form.

5. Schritt: Wenn möglich bzw. sinnvoll, Umformen der Lösungen in explizite Form.

Bevor wir zu dieser Methode Beispiele betrachten, wollen wir zunächst die Vorgehensweise für den 2. Fall rechtfertigen.

Dazu setzen wir $\tilde{g}(y) = \frac{1}{g(y)}$ und bezeichnen mit $\tilde{G}$ und F Stammfunktionen von $\tilde{g}$ und f.

Unter Verwendung der Kettenregel und der DGL erhalten wir zunächst

$$\frac{d}{dt}\tilde{G}(y(t)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \tilde{g}(y)\cdot y' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition } \tilde{g}}}{=} \frac{1}{g(y)}\cdot y' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{DGL}}}{=} f(t)$$

Integriert man nun auf beiden Seiten, so ergibt sich

$$\tilde{G}(y) = F(t) + C \quad \text{bzw.} \quad \int \tilde{g}(y)\,dy = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(t)\,dt.$$

Beispiel 1.2.2: a) Gesucht sind die Lösungen der DGL $\dot{y} = -2ty^2$.

b) Was ist die Lösung des AWP $\dot{y} = -2ty^2$ mit $y(1) = -1$.

Die DGL hat getrennte Variablen mit $g(y) = y^2$, $f(t) = -2t$.

1. Fall: $g(\eta) = 0$ für $\eta = 0$. Also ist $y(t) = 0$ eine singuläre Lösung.

2. Fall: $g(y) \neq 0$

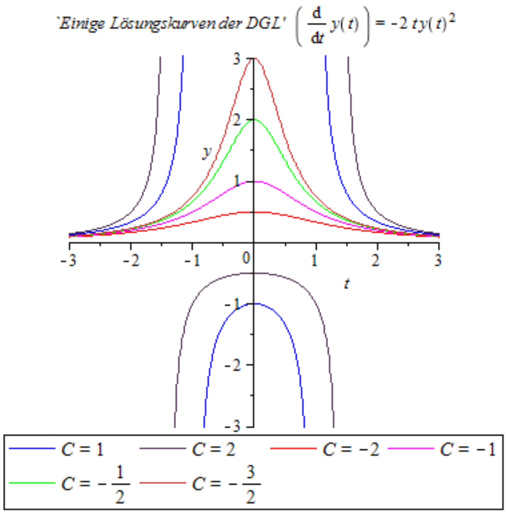
1. Schritt: $\frac{dy}{dt} = -2ty^2$

2. Schritt: $\frac{1}{y^2}\,dy = -2t\,dt$

3. Schritt: $\int \frac{1}{y^2}\,dy = -2\int t\,dt$

4. Schritt: $-y^{-1} = -t^2 + C$

5. Schritt: $y = \frac{1}{t^2 - C}$



Einige der Lösungskurven für verschiedene Werte der Integrationskonstanten C sind in der nebenstehenden Grafik abgebildet. Für $C>0$ haben die Lösungen Polstellen mit Vorzeichenwechsel an den Stellen $t = \pm\sqrt{C}$. Für $C=0$ gibt es eine Polstelle bei $t=0$.

Beispiel 1.2.3: Logistisches Wachstum

Der Automobilbestand eines Landes zum Zeitpunkt t sei $a(t)$. Eine Modellannahme geht davon aus, dass die relative Wachstumsrate $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ bei einem geringen Bestand annähernd konstant ist und gegen Null konvergiert, wenn sich der Bestand einer gewissen Kapazitätsgrenze K nähert. Eine spezielle Form dieses Modells ist die Annahme, dass die relative Änderungsrate mit steigendem Bestand linear abnimmt. Daraus ergibt sich die DGL

$$\frac{\dot{a}}{a} = r\left(1 - \frac{a}{K}\right) \quad \text{bzw.} \quad \dot{a} = r \cdot \frac{a(K-a)}{K}$$

mit den Bedingungen $0 < a(t) < K$, d.h. der Bestand ist zu jeder Zeit positiv und unterhalb der Kapazitätsgrenze.

Wir bestimmen die allgemeine Lösung der DGL mit der Methode TdV.

1. Schritt: $\frac{da}{dt} = r \cdot \frac{a(K-a)}{K}$

2. Schritt: $\frac{K}{a(K-a)}\, da = r\, dt$

3. Schritt: $\int \frac{K}{a(K-a)}\, da = r \int 1\, dt$

4. Schritt: Es gilt $\frac{K}{a(K-a)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{K-a}$. Damit erhält man

$$\ln|a| - \ln|K-a| = r \cdot t + C.$$

5. Schritt: Da $0 < a < K-a$, gilt $\ln|a| - \ln|K-a| = \ln(a) - \ln(K-a) = \ln\frac{a}{K-a}$.

$$\ln\frac{a}{K-a} = r \cdot t + C \iff \frac{a}{K-a} = \underbrace{e^{rt+C}}_{= e^{rt} \cdot e^{C}}$$

$$\iff a \cdot e^{-C} \cdot e^{-rt} = K - a$$

$$\iff a = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-rt}}, \text{ wobei } A = e^{-C} > 0$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist $a(t) = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-rt}}$, $A > 0$. Dies ist eine logistische Funktion. Da $A > 0$, gilt $\lim_{t \to \infty} a(t) = K$, d.h. für wachsendes t nähert sich der Bestand der Kapazitätsgrenze.

Beispiel 1.2.4: Ökonomisches Wachstum

Wir bezeichnen mit $b(t)$ das Bruttonationaleinkommen eines Landes, mit $k(t)$ den Kapitalbestand und mit $\ell(t)$ die Arbeitskraft zur Zeit t.

Wir legen folgende Modellannahmen zugrunde:

Es seien $A, \alpha, s, \ell_0, \lambda$ positive Konstanten mit $\alpha < 1$.

1) $b(t) = A \cdot [k(t)]^{1-\alpha}\,[\ell(t)]^{\alpha}$ (Cobb-Douglas Produktionsfunktion)

2) $\dot{k}(t) = s \cdot b(t)$ (Änderungsrate des Kapitals proportional zu $b(t)$)

3) $\ell(t) = \ell_0 \cdot e^{\lambda t}$ (Exponentielles Wachstum der Arbeitskraft)

Wir wollen wissen, wie sich das Kapital entwickelt mit der Anfangsbedingung $k(0) = k_0$. Dazu stellen wir zunächst eine geeignete DGL auf.

Aus 1) und 2) ergibt sich zunächst: $\dot{k}(t) = s \cdot A \cdot [k(t)]^{1-\alpha}\,[\ell(t)]^{\alpha}$

Einsetzen von 3) liefert schließlich die DGL mit trennbaren Variablen

$$\dot{k}(t) = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha}\, e^{\alpha\lambda t}\,[k(t)]^{1-\alpha}$$

Für unsere weiteren Überlegungen setzen wir $k(t) > 0$ voraus.

1. Schritt: $\dfrac{dk}{dt} = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} \cdot k^{1-\alpha}$

2. Schritt: $k^{\alpha-1}\,dk = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t}\,dt$

3. Schritt: $\int k^{\alpha-1}\,dk = s \cdot A \cdot \ell_0^{\alpha} \int e^{\alpha\lambda t}\,dt$

4. Schritt: $\frac{1}{\alpha} k^{\alpha} = \frac{sA}{\alpha\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} + C$

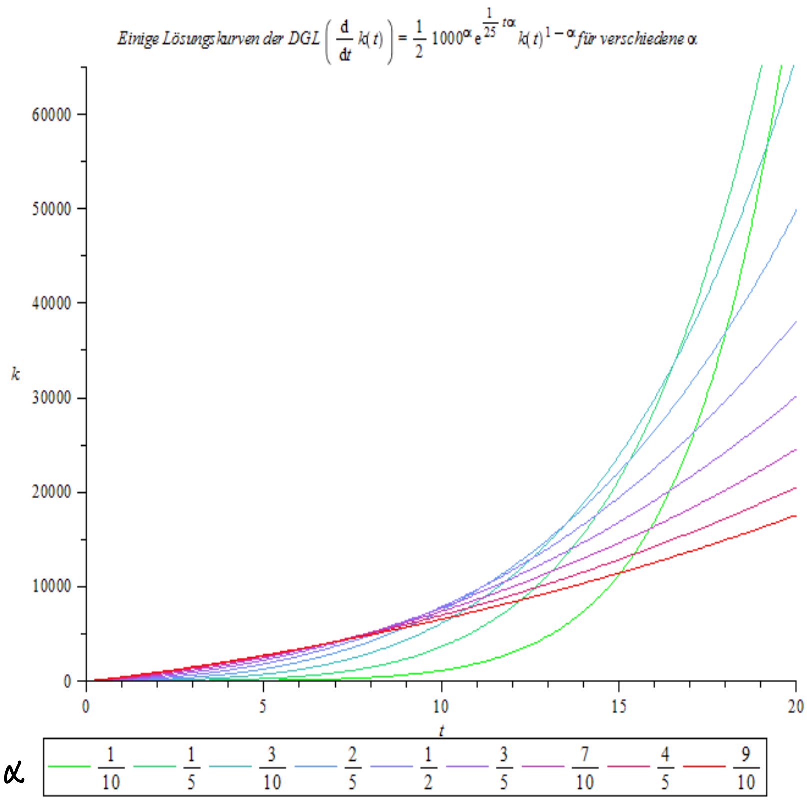
5. Schritt: $k(t) = \left\{ \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} + C \right\}^{1/\alpha}$

Dies ist die allgemeine Lösung der DGL. Aus der AB $k(0) = k_0$ erhalten wir durch Einsetzen in die allgemeine Lösung

$$\left\{ \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} + C \right\}^{1/\alpha} = k_0 \iff C = k_0^{\alpha} - \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha}$$

Die Lösung des AWP ist somit

$$k(t) = \left\{ \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} e^{\alpha\lambda t} + k_0^{\alpha} - \frac{sA}{\lambda} \cdot \ell_0^{\alpha} \right\}^{1/\alpha} = \left\{ k_0^{\alpha} + \frac{sA}{\lambda} \ell_0^{\alpha} \left[e^{\alpha\lambda t} - 1 \right] \right\}^{1/\alpha}.$$



In der nebenstehenden Grafik sind für $k_0 = 1$, $\ell_0 = 1000$, $s = \frac{1}{2}$, $A = 1$, $\lambda = \frac{1}{25}$ die Lösungskurven des AWP gezeichnet.

Der Wert für α variiert von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{9}{10}$.

Wir betrachten nun noch, wie sich das Verhältnis $\frac{k(t)}{\ell(t)}$ und $\frac{b(t)}{\ell(t)}$ für $t \to \infty$ verhält. Zunächst gilt:

$$\frac{k(t)}{\ell(t)} = \frac{\left\{k_0^{\alpha} + \frac{sA}{\lambda}\ell_0^{\alpha}\left[e^{\alpha\lambda t} - 1\right]\right\}^{1/\alpha}}{\left\{\left(\ell_0 \cdot e^{\lambda t}\right)^{\alpha}\right\}^{1/\alpha}}$$

$$= \left\{\frac{k_0^{\alpha}}{\ell_0^{\alpha}} \cdot e^{-\alpha\lambda t} + \frac{sA}{\lambda}\left[1 - e^{-\alpha t}\right]\right\}^{1/\alpha}$$

$$\frac{b(t)}{\ell(t)} = A \cdot \frac{[k(t)]^{1-\alpha}\,[\ell(t)]^{\alpha}}{\ell(t)} = A \cdot \left\{\frac{k(t)}{\ell(t)}\right\}^{1-\alpha}$$

Da $\alpha, \lambda > 0$ gilt weiter: $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha\lambda t} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0$

Damit folgt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k(t)}{\ell(t)} = \left\{\frac{sA}{\lambda}\right\}^{1/\alpha}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{b(t)}{\ell(t)} = A \cdot \left\{\frac{sA}{\lambda}\right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Beispiel 1.2.5: CES Produktionsfunktion

Im Zusammenhang mit Untersuchungen von CES Funktionen, stießen Arrow, Chenery, Minhas und Solow auf die folgende DGL:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-\alpha y^{\rho})}{x} \quad \text{mit } x,y>0 \text{ und Konstanten } \alpha,\rho,\rho \neq 0.$$

2. Schritt: $\frac{1}{y(1-\alpha y^{\rho})}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$

3. Schritt: $\int \frac{1}{y(1-\alpha y^{\rho})}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

4. Schritt: Für die Berechnung des Integrals auf der linken Seite benötigt man die Identität $\frac{1}{y(1-\alpha y^{\rho})} = \frac{1}{y} + \alpha \cdot \frac{y^{\rho-1}}{1-\alpha y^{\rho}}$

Damit gilt:

$$\int \frac{1}{y(1-\alpha y^{\rho})}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy + \frac{-1}{\rho}\int \frac{-\rho\alpha y^{\rho-1}}{1-\alpha y^{\rho}}\,dy$$

$$= \ln y - \frac{1}{\rho}\ln|1-\alpha y^{\rho}| + C, \text{ da } y>0.$$

Also erhalten wir

$$\ln y - \frac{1}{\rho}\ln|1-\alpha y^{\rho}| = \ln x + C$$

5. Schritt:

$$\ln y - \frac{1}{\rho}\ln|1-\alpha y^{\rho}| = \ln x + C \quad | \cdot \rho$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y^{\rho}}{1-\alpha y^{\rho}}\right| = \ln x^{\rho} + \rho \cdot C \quad \text{| Anwenden Exponentialfkt.}$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{y^{\rho}}{1-\alpha y^{\rho}}\right| = C_1 \cdot x^{\rho} \quad \text{mit } C_1 = e^{\rho C}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y^{\rho}}{1-\alpha y^{\rho}} = C_2 \cdot x^{\rho} \quad \text{mit } C_2 = \pm e^{\rho \cdot C}$$

$$\Longleftrightarrow y^{\rho} + C_2\alpha x^{\rho} y^{\rho} = C_2 x^{\rho}$$

$$\Longleftrightarrow y = \left\{\frac{C_2 x^{\rho}}{1+C_2\alpha x^{\rho}}\right\}^{1/\rho}$$

$$\Longleftrightarrow y = \left\{C_3 x^{-\rho} + \alpha\right\}^{-1/\rho} \quad \text{mit } C_3 = \frac{1}{C_2}$$

Den Zusammenhang mit CES-Funktionen sieht man, wenn man $x = \frac{K}{L}$, $y = \frac{Y}{L}$ mit K-Kapital, Y-Output, L-Arbeit und neue

Konstanten $A=(\alpha+C_3)^{-1/\varrho}$, $a=C_3(\alpha+C_3)^{-1}$,

d.h. $a=C_3(\alpha+C_3)^{-\frac{1}{\varrho}\cdot\varrho}=C_3\cdot A^{\varrho}$, $1-a=1-C_3A^{\varrho}=A^{\varrho}(A^{-\varrho}-C_3)=A^{\varrho}\cdot\alpha$

einsetzt:

$$
\begin{aligned}
Y &= \left\{ C_3\cdot\frac{L^{\varrho}}{K^{\varrho}}\cdot L^{-\varrho}+\alpha L^{-\varrho}\right\}^{-1/\varrho}\\
&= \left\{ C_3\cdot K^{-\varrho}+\alpha L^{-\varrho}\right\}^{-1/\varrho}\\
&= A\cdot\left\{A^{\varrho}\cdot C_3K^{-\varrho}+A^{\varrho}\alpha L^{-\varrho}\right\}^{-1/\varrho}\\
&= A\left\{aK^{-\varrho}+(1-a)L^{-\varrho}\right\}^{-1/\varrho}
\end{aligned}
$$

Dies ist eine spezielle Form der CES-Funktion.

lineare DGL 1. Ordnung

Eine lineare DGL 1. Ordnung lässt sich allgemein in der Form

$$\dot{y}+a_0(t)y=r(t),$$

wobei $a_0(t), r(t)$ in einem Intervall I definierte stetige Funktionen der unabhängigen Variablen t sind. Die rechte Seite $r(t)$ bezeichnet man auch als Störfunktion. Die DGL heißt homogen, falls $r(t)=0$ ist, sonst inhomogen. Solche DGLen heißen linear, weil die linke Seite eine lineare Funktion von y und $\dot{y}$ ist.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $A(t)$ eine Stammfunktion von $a_0(t)$ und multiplizieren die DGL auf beiden Seiten mit $e^{A(t)}\neq 0$.

Dies liefert zunächst:

$$e^{A(t)}\cdot\dot{y}+a_0(t)e^{A(t)}y=r(t)\cdot e^{A(t)}.$$

Nach der Kettenregel gilt: $\frac{d}{dt}(e^{A(t)}\cdot y)=e^{A(t)}\cdot\dot{y}+a_0(t)e^{A(t)}y$

Also erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}\cdot y)=r(t)\cdot e^{A(t)}$$

Integration auf beiden Seiten der DGL liefert dann:

$$e^{A(t)} \cdot y = \int r(t)\, e^{A(t)}\, dt + C$$

d.h. nach Division durch $e^{A(t)} \neq 0$:

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(\int r(t)\, e^{A(t)}\, dt + C\right) \qquad (*)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der linearen DGL 1. Ordnung. Man merkt sich nun entweder die fertige Lösungformel oder das oben angegebene Vorgehen. Hier braucht man für $\int r(t) e^{A(t)} dt$ nur eine Stammfunktion von $r(t)e^{A(t)}$. Diese Schreibweise macht die Struktur der allgemeinen Lösung klarer (s. u.).

Für den Fall, dass die DGL homogen ist, d.h. $r(t) = 0$, erhält man die allgemeine Lösung: $y(t) = C \cdot e^{-A(t)}$. $\qquad (**)$

Bevor wir uns einige Beispiele anschauen, wollen wir uns mit der Struktur der allgemeinen Lösung beschäftigen. Aus $(*)$ und $(**)$ sieht man unmittelbar ein, dass $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ gilt. Dabei bezeichnet $y_p(t)$ eine beliebige spezielle, sogenannte partikuläre Lösung der inhomogenen DGL und $y_h(t) = C \cdot e^{-A(t)}$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL $\dot{y} + a_0(t)\, y = 0$.

Weiter gilt das Superpositionsprinzip, d.h.:

Sind y_1 bzw. y_2 Lösungen von $\dot{y}_1 + a_0(t)\, y_1 = r_1(t)$ bzw. $\dot{y}_2 + a_0(t)\, y_2 = r_2(t)$, so ist $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Lösung von $\dot{y} + a_0(t) y = \alpha r_1(t) + \beta r_2(t)$.

Beispiel 1.2.5: Gesucht ist die Lösung des AWP

$$\dot{y} + t y = t^3, \quad y(0) = 4. \qquad (\text{Hier ist also } a_0(t) = t,\ r(t) = t^2)$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der DGL.

1. Schritt: Bestimmung einer Stammfunktion $A(t)$ von $a_0(t) = t$.

$$A(t) = \tfrac{1}{2} t^2$$

2. Schritt: Multiplikation der DGL mit $e^{A(t)} = e^{\frac{1}{2}t^2}$

$$e^{\frac{1}{2}t^2}(\dot{y} + t y) = e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot t^3$$

3. Schritt: Umschreiben der linken Seite mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot y\right) = e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot t^3$$

4. Schritt: Integration

Zunächst gilt mit der Substitution $\tau = \frac{1}{2}t^2$, $d\tau = t\,dt$

$$\int t^3\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt = 2\int \tau e^{\tau}\,d\tau$$

$$= 2\left\{\tau\cdot e^{\tau} - \int e^{\tau}\,d\tau\right\}$$

$$= 2e^{\tau}(\tau - 1) + C$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2}(t^2 - 2) + C$$

Partielle Integration

$u = \tau \qquad v' = e^{\tau}$

$u' = 1 \qquad v = e^{\tau}$

Integration der DGL liefert somit:

$$e^{\frac{1}{2}t^2}\cdot y = e^{\frac{1}{2}t^2}(t^2-2) + C$$

5. Schritt: Divion durch $e^{\frac{1}{2}t^2}$ liefert die allgemeine Lösung der DGL

$$y(t) = t^2 - 2 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Für die Bestimmung der Lösung des AWP beachten wir die AB

$y(0) = 4$, d.h. $-2 + C = 4 \iff C = 6$

Somit ist $y(t) = t^2 - 2 + 6e^{-\frac{1}{2}t^2}$ die Lösung des AWP.

Beispiel 1.2.6: Preisangleichung

Wir bezeichnen mit $D(P) = a - bP$ und $S(P) = \alpha + \beta P$ die Nachfrage- und Angebotsfunktion für ein Gut in Abhängigkeit vom Preis P mit positiven Konstanten a, b, α, β. Der Preis $P = P(t)$ variiere mit der Zeit t und die momentane Änderungsrate $\dot{P}(t)$ sei proportional zum Nachfrageüberschuss $D(P) - S(P)$, d.h.

$$\dot{P} = \lambda\,[D(P) - S(P)] \quad \text{für eine positive Konstante } \lambda.$$

Mit den Gleichungen für $D(P)$ und $S(P)$ ergibt sich daraus

$$\dot{P} = \lambda(a - bP - \alpha - \beta P)$$

$$\iff \dot{P} + \lambda(b+\beta)P = \lambda(a-\alpha),$$

d.h. eine lineare DGL 1. Ordnung mit der allgemeinen Lösung

$$P(t) = e^{-\lambda(b+\beta)t} \int \lambda(a-\alpha) e^{\lambda(b+\beta)t} dt$$

$$= e^{-\lambda(b+\beta)t}\left(\lambda(a-\alpha)\cdot\frac{1}{\lambda(b+\beta)}\cdot e^{\lambda(b+\beta)t} + C\right)$$

$$= \frac{a-\alpha}{b+\beta} + C\cdot e^{-\lambda(b+\beta)t}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda(b+\beta)>0$ ist, gilt

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$$

Dies ist gerade der Gleichgewichtspreis, d.h. der Preis, bei dem Angebot und Nachfrage übereinstimmen. $D(P)=S(P) \iff P=\frac{a-\alpha}{b+\beta}$

Bevor wir ein weiteres umfangreiches Beispiel anschauen, überlegen wir noch, wie man die Lösung eines AWP mit einer linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{y} + a_0(t)\, y = r(t) \quad , \; y(t_0) = y_0$$

in einer geschlossenen Formel angeben kann.

Die allgemeine Lösung der DGL hatten wir bereits bestimmt zu

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(\int r(t) e^{A(t)} dt + C\right) \qquad (*)$$

mit $A(t)$ eine Stammfunktion von $a_0(t)$. Somit ist nach dem Hauptsatz der Integralrechnung $\int_s^t a_0(\tau)\,d\tau = A(t) - A(s)$.

Weiter bezeichne zur Abkürzung $F(t)$ eine Stammfunktion von $r(t)e^{A(t)}$, d.h. auch hier wieder $\int_{t_0}^t r(s) e^{A(s)} ds = F(t) - F(t_0)$.

Mit der Abkürzung $F(t)$ wird $(*)$ zu: $y(t) = e^{-A(t)}F(t) + Ce^{-A(t)}$ $(**)$

Einsetzen der AB liefert:

$$y_0 = e^{-A(t_0)}F(t_0) + Ce^{-A(t_0)} \iff C = y_0 e^{A(t_0)} - F(t_0)$$

Einsetzen von C in die allgemeine Lösung $(**)$ ergibt

$$y(t) = e^{-A(t)}F(t) + [y_0 e^{A(t_0)} - F(t_0)]e^{-A(t)}$$

$$= e^{-A(t)}[F(t) - F(t_0)] + y_0 e^{-[A(t)-A(t_0)]}$$

$$= \int_{t_0}^t r(s) e^{-[A(t)-A(s)]} ds + y_0 e^{-[A(t)-A(t_0)]}$$

$$= \int_{t_0}^t r(s)\, e^{-\int_s^t a(\tau)d\tau} ds + y_0 e^{-\int_{t_0}^t a_0(\tau)d\tau} \qquad (***)$$

als Lösung des AWP.

Beispiel 1.2.7: Modell für volkswirtschaftliches Wachsum in einem Entwicklungsland

Wir bezeichnen mit $x(t)$ das BIP pro Jahr, mit $k(t)$ den Kapitalbestand und mit $h(t)$ den Netto-Zustrom ausländischer Investitionen pro Jahr. Die Größe der Bevölkerung sei $n(t)$.

Wir treffen folgende Modellannahmen.

1) $x(t) = \sigma k(t)$, d.h. BIP proportional zum Kapitalbestand, σ bezeichnet die durchschnittliche Produktivität des Kapitals

2) $\dot{k}(t) = \alpha x(t) + h(t)$, d.h. die momentane Änderungsrate des Kapitals ist eine gewichtete Summe des BIP und der Netto-Auslandsinvestitionen

3) $h(t) = h_0 \cdot e^{\mu t}$, d.h. die relative Änderungsrate der Netto-Auslandsinvestitionen $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \mu$ sei konstant

4) $n(t) = n_0 \cdot e^{\varrho t}$, d.h. die relative Änderungsrate der Bevölkerungsgröße $\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = \varrho$ wird als konstant angenommen

Die Aufgabenstellung soll nun wie folgt sein.

a) Herleitung einer DGL aus den Annahmen 1) – 3).

b) Lösen der DGL mit der AB $k(0) = k_0$

c) Herleitung einer Formel für das BIP pro Kopf, d.h. für $z(t) = \frac{x(t)}{n(t)}$.

d) Herleitung einer Bedingung dafür, dass das BIP pro Kopf streng monoton wachsend in t ist, wenn $h_0 = 0$ gilt.
Eine übliche Annahme für die durchschnittliche Produktivität des Kapitals σ in Entwicklungsländern ist 0.3. Weiter wachse die Bevölkerung mit einer Rate von 3%, d.h. $\varrho = 0.03$. Wie groß muss dann α sein, damit $z(t) = \frac{x(t)}{n(t)}$ eine streng monoton wachsende Funktion ist?

e) Zeige, dass $z(t) > z(0) \cdot e^{(\alpha\sigma - \varrho)t}$ für alle $t > 0$.

a) Einsetzen von $x(t)$ aus 1) und $h(t)$ aus 3) in 2) liefert die lineare DGL

$$\dot{k} - \alpha\sigma k = h_0 e^{\mu t}.$$

b) Bestimmen der allgemeinen Lösung mit (*) auf S. 13 für $\mu \neq \alpha\sigma$

$$k(t) = e^{\alpha\sigma t}\left(\int h_0 e^{\mu t}\cdot e^{-\alpha\sigma t}\,dt + C\right)$$

$$= e^{\alpha\sigma t}\left(h_0 \int e^{(\mu-\alpha\sigma)t}\,dt + C\right)$$

$$= e^{\alpha\sigma t}\left(h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{(\mu-\alpha\sigma)t} + C\right)$$

$$= h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{\mu t} + C e^{\alpha\sigma t}$$

Mit der AB $k(0) = k_0$ erhalten wir

$$h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} + C = k_0 \iff C = k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}$$

Somit löst

$$k(t) = h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{\mu t} + \left(k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\right) e^{\alpha\sigma t} \quad \text{das AWP.}$$

Alternativ kann man das AWP auch mit der Lösungsformel (***) auf S. 15 lösen. Dazu benötigt man $\int_s^t (-\alpha\sigma)\,d\tau = -\alpha\sigma(t-s)$ und $\int_0^t (-\alpha\sigma)\,d\tau = -\alpha\sigma t$. Einsetzen in (***) S. 15 liefert:

$$k(t) = \int_0^t h_0 e^{\mu s} e^{\alpha\sigma(t-s)}\,ds + k_0 e^{\alpha\sigma t}$$

$$= h_0 e^{\alpha\sigma t} \int_0^t e^{(\mu-\alpha\sigma)s}\,ds + k_0 e^{\alpha\sigma t}$$

$$= h_0 e^{\alpha\sigma t} \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{(\mu-\alpha\sigma)s}\Big|_0^t + k_0 e^{\alpha\sigma t} \qquad \text{für } \mu \neq \alpha\sigma$$

$$= h_0 e^{\alpha\sigma t} \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\left(e^{(\mu-\alpha\sigma)t} - 1\right) + k_0 e^{\alpha\sigma t}$$

$$= h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} \cdot e^{\mu t} + \left(k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\right) e^{\alpha\sigma t}$$

c)

$$z(t) = \frac{x(t)}{n(t)} \underset{1),3)}{=} \frac{\sigma \cdot k(t)}{n_0 \cdot e^{\varrho t}}$$

$$\underset{b)}{=} \frac{\sigma}{n_0 e^{\varrho t}}\left\{h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} \cdot e^{\mu t} + \left(k_0 - h_0 \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\right) e^{\alpha\sigma t}\right\}$$

$$= \sigma \cdot \frac{h_0}{n_0} \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} e^{(\mu-\varrho)t} + \underbrace{\sigma \cdot \frac{k_0}{n_0}}_{= z(0)} e^{(\alpha\sigma-\varrho)t} - \sigma \cdot \frac{h_0}{n_0} \cdot \frac{1}{\mu-\alpha\sigma} \cdot e^{(\alpha\sigma-\varrho)t}$$

$$= z(0)\cdot e^{(\alpha\sigma-\rho)t} + \sigma\cdot\frac{h_0}{n_0}\cdot\frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\cdot e^{-\rho t}\left(e^{\mu t}-e^{\alpha\sigma t}\right)$$

$$= z(0) e^{(\alpha\sigma-\rho)t} + \sigma\cdot\frac{h_0}{n_0}\cdot\frac{1}{\mu-\alpha\sigma}\cdot e^{(\alpha\sigma-\rho)t}\left(e^{(\mu-\alpha\sigma)t}-1\right)$$

d) Mit $h_0 = 0$ folgt aus c)

$$z(t) = z(0)\cdot e^{(\alpha\sigma-\rho)t}$$

$z(t)$ ist genau dann streng monoton wachsend, wenn $\alpha\sigma > \rho$

Mit den konkreten Werten $\sigma = 0.3$, $\rho = 0.03$ also $\alpha > \frac{0.03}{0.3} = \frac{1}{10}$.

e) Wir betrachten $z(t)$ aus c). Es gilt:

$$\underbrace{\sigma\cdot\frac{h_0}{n_0}}_{>0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\mu-\alpha\sigma}}_{\substack{>0,\ \mu>\alpha\sigma \\ <0,\ \mu<\alpha\sigma}}\cdot\underbrace{e^{(\alpha\sigma-\rho)t}}_{>0}\underbrace{\left(\underbrace{e^{(\mu-\alpha\sigma)t}}_{\substack{>1,\ \mu>\alpha\sigma \\ <1,\ \mu<\alpha\sigma}}-1\right)}_{\substack{>0,\ \mu>\alpha\sigma \\ <0,\ \mu<\alpha\sigma}} > 0$$

Aus der Darstellung für $z(t)$ aus c) folgt damit unmittelbar die Behauptung.

Nachdem wir uns nun mit einigen grundlegenden Lösungsmethoden für konkrete Typen von DGLen 1. Ordnung beschäftigt haben, wenden wir uns allgemeineren Fragestellungen zu.

Qualitative Überlegungen und Stabilität

Kann man die Lösungen von DGLen explizit angeben, so lässt sich das Verhalten in der Regel leicht untersuchen. Leider kann man die Lösungen oft nicht explizit angeben, möchte aber trotzdem Aussagen über das Lösungsverhalten machen. Weitere Probleme können dadurch entstehen, dass die DGL weitere Parameter oder auch nicht explizit angegebene Funktionen enthält. Dies ist nicht ungewöhnlich, da jedes ökonomische Modell auf (vereinfachenden) Annahmen basiert. Um solche Annahmen so schwach wie möglich formulieren zu können, werden oft Parameter oder auch Funktionen verwendet, von denen man nur bestimmte Eigenschaften fordert (z. B. positiver Parameter, monoton wachsende Funktion).

Autonome DGL

Dies sind DGL, die sich in der Form

$$\dot{y} = F(y)$$

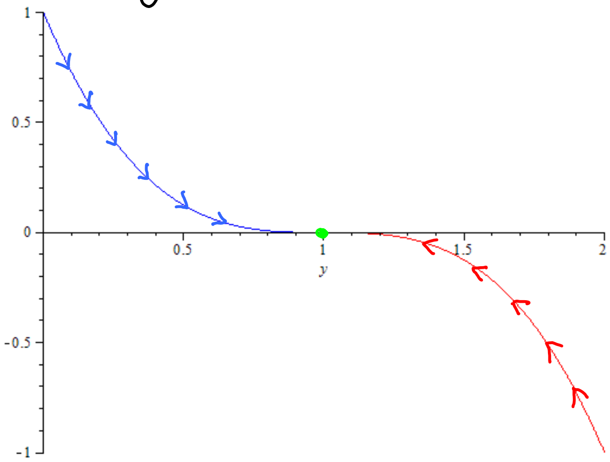
angeben lassen; die unabhängige Variable tritt in der rechten Seite nicht auf. Zur Untersuchung des Lösungsverhaltens studieren wir das sogenannte Phasendiagramm. Dazu zeichnet man die Kurve $\dot{y} = F(y)$ in der $(y, \dot{y})$-Ebene.

Zur Erläuterung, was man an einem solchen Phasendiagramm z. B. ablesen kann, betrachten wir die DGL

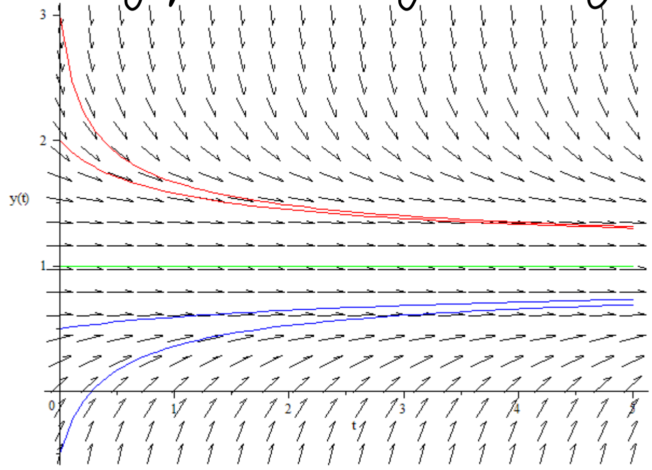
$$\dot{y}(t) = -(y(t) - 1)^3$$

mit der allgemeinen Lösung $y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2(t+C)}}$ bzw. $y(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2(t+C)}}$, $t > -C$, und der singulären Lösung $y(t) = 1$.

Phasendiagramm



Richtungsfeld mit einigen Lösungskurven



Zu jeder Lösung $y = y(t)$ gibt es ein zugehöriges $\dot{y} = \dot{y}(t)$. Für jedes t ist $(y(t), \dot{y}(t))$ ein Punkt auf der Kurve im Phasendiagramm. Wir betrachten nun einen Punkt oberhalb der horizontalen Achse. Dann ist $\dot{y}(t) = F(y(t)) > 0$, d.h. y ist wachsend in t. Wenn wir ausgehend von einem solchen Punkt im Phasendiagramm t vergrößern, gelangen wir also zu einem Punkt, der weiter rechts liegt. Dies wird durch die blauen Pfeile angedeutet. Betrachten wir dagegen einen Punkt unterhalb der horizontalen Achse, so ist $\dot{y}(t) = F(y(t)) < 0$, d.h. y ist fallend in t. Ausgehend von einem solchen Punkt gelangen wir somit bei Vergrößerung von t zu einem Punkt, der weiter links liegt. Dies wird durch die roten Pfeile angedeutet. Betrachten wir nun einen Punkt auf der horizontalen Achse, so ist $\dot{y}(t) = F(y(t)) = 0$, d.h. y konstant. Diese Aussagen lassen sich ohne Kenntnis der Lösungen der DGL allein aus dem Phasendiagramm ablesen. In der rechten Graphik sind für das betrachtete Beispiel einige Lösungskurven in den entsprechenden Farben wiedergegeben. Die "grüne" Lösung ist konstant, d.h. ohne Änderung mit der Zeit t, die "blauen" bzw. "roten" Lösungen streben für $t \to \infty$ von oben bzw. von unten gegen die "grüne" Lösung.

Im Folgenden betrachten wir die DGL

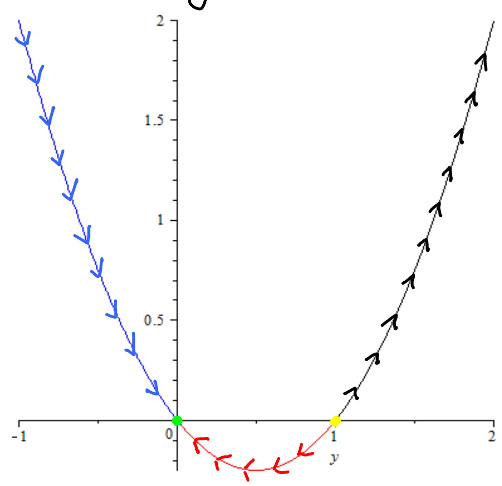
$$\dot{y}(t) = y(t)(y(t)-1)$$

mit der allgemeinen Lösung $y(t) = \frac{1}{1+Ce^t}$ mit $t \neq -\ln(-C)$, falls $C<0$ und einer singulären Lösung $y(t)=0$. Um die Entsprechungen in den unten stehenden Grafiken besser wiederfinden zu können, verwenden wir für die allgemeine Lösung unterschiedliche Farben in Abhängigkeit von C, d.h.

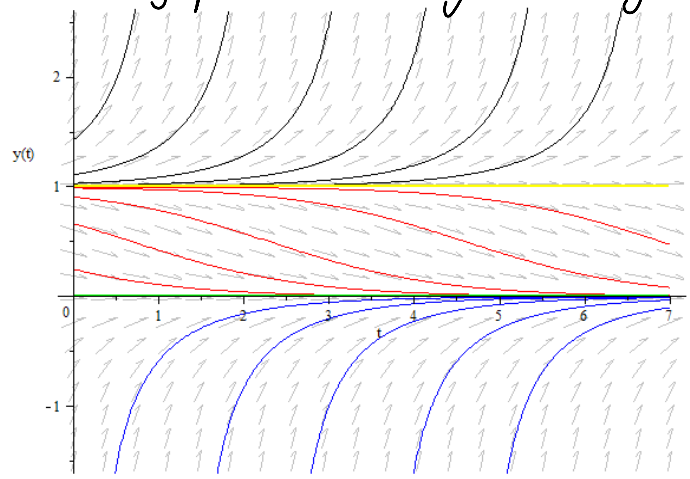
$y(t)=1$, $C=0$, $y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$, $C>0$,

$y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$, $C<0$ und $t<-\ln(-C)$, $y(t)=\frac{1}{1+Ce^t}$, $C<0$ und $t>-\ln(-C)$

Phasendiagramm



Richtungsfeld mit einigen Lösungskurven



In diesem Beispiel haben wir im Phasendiagramm zwei Punkte auf der horizontalen Achse. In diesen Punkten ist wieder $\dot{y}(t) = F(y(t)) = 0$, d.h. y konstant. Betrachten wir einen roten oder blauen Punkt und erhöhen t, so rücken wir wie im Beispiel vorher näher an den grünen Punkt heran. Anders ist aber nun das Verhalten, wenn wir einen schwarzen

Punkt im Phasendiagramm betrachten. Da die schwarzen Punkte oberhalb der horizontalen Achse liegen, gilt dort wieder $\dot{y}(t) = F(y(t)) > 0$, d.h. $y(t)$ ist wachsend in t. Wir bewegen uns also mit wachsendem t von dem gelben Punkt weg.

Der grüne Punkt hat sozusagen "anziehenden", der gelbe Punkt "abstoßenden" Charakter.

Wir wollen nun die Beobachtungen mathematisch formulieren.

Definition 1.2.8: Eine Lösung $y^* = a$ von $\dot{y}(t) = F(y(t))$ heißt Gleichgewichtslösung, wenn $F(y^*) = 0$ gilt. a heißt dann auch Gleichgewichtszustand der DGL.

Eine Gleichgewichtslösung $y^* = a$ heißt

- lokal asymptotisch stabil, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$, wenn $|y(t_0) - a| < \delta$.
- global asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und zusätzlich $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ für jede Lösung $y(t)$.
- instabil sonst.

In dem oben betrachteten 1. Beispiel ist $y(t) = 1$ global asymptotisch stabil, in dem 2. Beispiel ist $y(t) = 0$ lokal asymptotisch stabil und $y(t) = 1$ instabil.

Betrachtet man noch einmal die Phasendiagramme zu den obigen Beispielen, so kann man folgendes hinreichende Resultat festhalten:

Satz 1.2.9: Sei $\dot{y}(t) = F(y(t))$ und $y^* = a$ eine Gleichgewichtslösung, d.h. es gelte $F(y^*) = 0$. Dann gilt:

(i) $\frac{dF}{dy}(a) < 0 \Rightarrow$ a ist lokal asymptotische Gleichgewichtslösung

(ii) $\frac{dF}{dy}(a) > 0 \Rightarrow$ a ist instabile Gleichgewichtslösung

Beispiel 1.2.10: Preisangleichung

In einem allgemeineren Modell als in Beispie 1.2.6 nehmen wir an, dass der Preis $P = P(t)$ die DGL

$$\dot{P} = F(P) = H(D(P) - S(P))$$

erfüllt. $\dot{P}$ ist eine Funktion des Nachfrageüberschusses $U(P) = D(P) - S(P)$.

Wir nehmen an, dass für die Funktion H gilt:

$H(0) = 0$, d.h. der Preis ändert sich nicht, wenn der Nachfrageüberschuss Null ist.

$\frac{dH}{dU} > 0$, d.h. H ist streng monoton wachsend in U.

Somit: Ist $U(P) = D(P) - S(P) > 0$, d.h. übersteigt die Nachfrage das Angebot, dann folgt aus den Annahmen über H, dass $\dot{P} > 0$ ist, d.h. der Preis steigt. Entsprechend folgt aus $U(P) = D(P) - S(P) < 0$, $\dot{P} < 0$, d.h. der Preis sinkt, wenn das Angebot größer ist als die Nachfrage.

Sei nun P^* ein Preis, für den Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht sind, d.h. $D(P^*) = S(P^*)$. Nach obiger Annahme gilt dann $\dot{P} = F(P^*) = H(0) = 0$, d.h. P^* ist Gleichgewichtslösung.

Weiter gilt mit der Kettenregel: $\frac{dF}{dP} = \frac{d}{dU} H(U) \cdot \frac{d}{dP}(D(P) - S(P))$.

Da nach obiger Annahme $\frac{d}{dU} H(U) > 0$ ist, stimmt das Vorzeichen von $\frac{dF}{dP}$ mit dem Vorzeichen von $\frac{d}{dP}(D(P) - S(P))$ überein.

Nach Satz 1.2.9 ist der Gleichgewichtspreis P^* lokal asymptotisch stabil, wenn $\frac{d}{dP}(D(P)-S(P))<0$ gilt. Normalerweise ist diese Bedingung erfüllt, da man erwarten kann, dass $\frac{d}{dP}D(P)<0$ und $\frac{d}{dP}S(P)>0$ gilt.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von DGL 1. Ordnung

Im Zusammenhang mit ökonomischen Modellen sind Fragen nach der Existenz von Lösungen von wichtiger Bedeutung. Weiter möchte man wissen, ob eine Lösung eines AWP eindeutig ist. Wir werden uns daher nun mit Resultaten zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen befassen.
Als erstes formulieren wir ein lokales Resultat.

Satz 1.2.11: Gegeben sei ein AWP der Form

$$\dot{y}=f(t,y)\ ,\ y(t_0)=y_0,$$

mit f und f_y stetig in einer offenen Menge A der ty-Ebene, wobei $(t_0,y_0)\in A$ gelten soll. Dann existiert genau eine lokale Lösung des AWP, d.h. es existiert eine von t_0 und y_0 abhängige Zahl $\beta>0$, so dass das AWP auf dem Intervall $(t_0-\beta, t_0+\beta)$ genau eine Lösung besitzt.

Beispiel 1.2.12: Bestimmung des größtmöglichen Intervalls, auf dem eine Lösung des AWP $\dot{y}=y^2$, $y(0)=1$ existiert.
Jede von Null verschiedene Lösung der DGL hat die Form
$y=-\frac{1}{t+C}$. Mit der AB ermittelt man $C=-1$, d.h. $y=\frac{1}{1-t}$ ist Lösung des AWP. Offenbar ist die Lösung auf dem Intervall $(-\infty,1)$ definiert. Die Funktion $y=\frac{1}{1-t}$ erfüllt die DGL zwar auch für $t>1$, dies ist aber nicht Teil der Lösung, die die AB $y(0)=1$ erfüllt.

In dem folgenden Resultat wird ein Intervall angegeben, auf dem die Lösung definiert ist.

Satz 1.2.13: Seien f und f_y stetig auf dem Rechteck

$$R = \{(t,y) : |t - t_0| \le a\, ,\, |y - y_0| \le b\}$$

und sei $M = \max\limits_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$, $\tau = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Dann besitzt das AWP $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t)$ im Intervall $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

Beispiel 1.2.14: Wir betrachten das AWP

$$\dot{y} = y^2 - t \quad , \; y(0) = 0 .$$

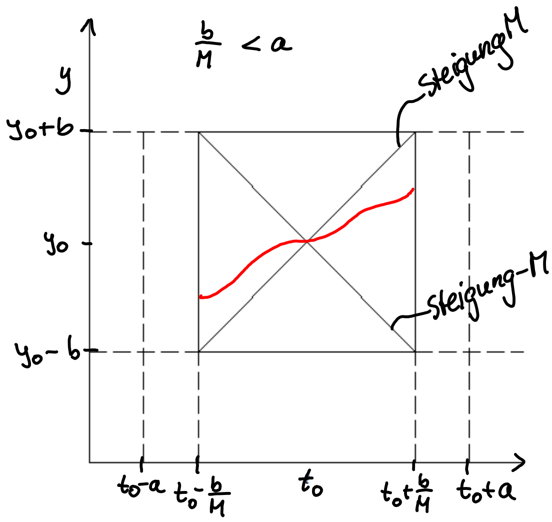
Für $|t| \le \frac{1}{2}$, $|y| \le \frac{1}{2}$ ist $|f(t,y)| \le y^2 + |t| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

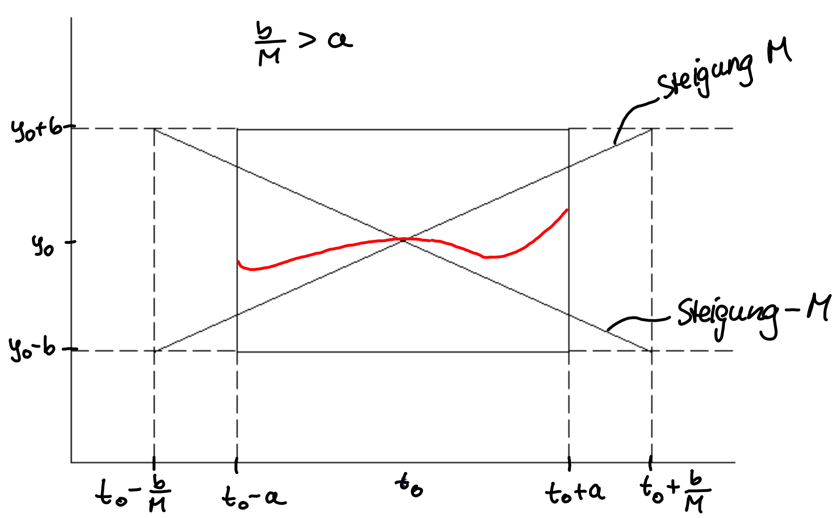
Damit ergibt sich für $R = \{(t,y) : |t| \le \frac{1}{2}, |y| \le \frac{1}{2}\}$

$$M = \frac{3}{4} \quad , \quad \tau = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Das AWP besitzt also eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Bemerkung 1.2.15: Wir erläutern anschaulich, wie die Aussage in Satz 1.2.13 bzgl. des Intervalls, auf dem die Lösung existiert, zustande kommt. Wegen $|t - t_0| \le a$ kann τ nicht größer als a sein. Da $-M \le \dot{y} \le M$ für $(t,y) \in R$ nach Definition von M, muss der Teil einer Lösungskurve durch (t_0, y_0), der in R liegt zwischen den Geraden durch (t_0, y_0) mit Steigungen $\pm M$ liegen (vgl. Skizze).





Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch ein globales Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit angeben.

Satz 1.2.16: Seien f und f_y stetig für alle (t,y). Seien $a(t), b(t)$ Funktionen, so dass $(*)\ |f(t,y)| \le a(t)\cdot|y| + b(t)$ für alle (t,y).
Dann existiert zu beliebigem (t_0, y_0) eine eindeutig bestimmte Lösung des AWP $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.
Ersetzt man $(*)$ durch die Bedingung
$(**)\ y f(t,y) \le a(t) y^2 + b(t)$ für alle y und alle $t \ge t_0$, dann hat das AWP eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf $[t_0, \infty)$ definiert ist.

Beispiel 1.2.17: Wir betrachten das AWP $\dot{y} = -y^3$, $y(1) = 1$.
Die Bedingung $(*)$ aus Satz 1.2.16 ist offenbar nicht erfüllt.
Es gilt aber $y \cdot f(t,y) = -y^4 \le 0$. Also ist $(**)$ erfüllt mit $a(t) = b(t) \equiv 0$. Es existiert also eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $[1, \infty)$.
Mit TdV und Einsetzen der AB zeigt man leicht, dass die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2t-1}}$ ist. Die Lösung ist nur für $t \in (\frac{1}{2}, \infty)$ definiert und nicht für alle $t \in \mathbb{R}$.

I.3 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In vielen ökonomischen Modellen treten DGL höherer als 1. Ordnung auf. Wir befassen uns daher in diesem Kapitel zunächst mit DGL 2. Ordnung, d.h. DGL der Form

$$\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$$

mit einer gegebenen Funktion F, der unbekannten Funktion $y = y(t)$ und $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Eine Lösung ist eine 2-mal differenzierbare Funktion, die die DGL erfüllt.

Beispiel 1.3.1: $\ddot{y} = k$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$.

Diese DGL lässt sich sehr einfach lösen. Durch Integration ergibt sich zunächst: $\dot{y}(t) = \int \ddot{y}(t)\,dt = \int k\,dt = kt + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

Erneute Integration führt auf die allgemeine Lösung

$$y(t) = \int \dot{y}(t)\,dt = \int (kt + C_1)\,dt = \tfrac{1}{2}kt^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Die zugehörigen Lösungskurven sind für $k \neq 0$ quadratische Parabeln.

Wir behandeln im Folgenden zunächst zwei speziellere Fälle, die sich auf das Lösen von DGL'en 1. Ordnung zurückführen lassen.

Spezialfall 1: $\ddot{y} = F(t, \dot{y})$

y taucht in der DGL nicht auf. Mit der Substitution $u = \dot{y}$ wird daraus $\dot{u} = F(t, u)$, d.h. eine DGL 1. Ordnung. Ist $u(t)$ die allgemeine Lösung, so erhält man durch Integration

$$y(t) = \int \dot{y}(t)\,dt = \int u(t)\,dt$$

die allgemeine Lösung der DGL.

Beispiel 1.3.2: $\ddot{y} = \dot{y} + t$

Substitution $u = \dot{y}$ liefert die DGL $\dot{u} = u + t$, d.h. eine lineare DGL 1. Ordnung mit der allgemeinen Lösung $u = C_1 e^t - t - 1$

(vgl. S. 12 ff). Daraus erhält man durch Integration

$$y = \int u(t)\,dt = \int (C_1 e^t - t - 1)\,dt$$
$$= C_1 e^t - \frac{1}{2}t^2 - t + C_2 \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der DGL.

Spezialfall 2: $\ddot{y} = F(y, \dot{y})$ (Autonome DGL)

Die Variable t tritt in der DGL nicht auf. Durch einen Trick kann man die DGL in den Spezialfall 1 überführen.

Da t nicht explizit auftritt, nimmt man y als unabhängige Variable und bestimmt $\dot{y}$ als Funktion $v(y)$. Mit der Kettenregel gilt: $\ddot{y} = \frac{d}{dt} v(y) = \frac{d}{dy} v(y) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dy} v(y) \cdot v(y)$

Eingesetzt in die DGL erhält man $\left\{\frac{d}{dy} v(y)\right\} \cdot v(y) = F(y, v)$, d.h. für $v \neq 0$ die DGL $v' = \frac{1}{v} F(y, v)$ 1. Ordnung.

Lässt sich die allgemeine Lösung v bestimmen, so lässt sich daraus mit $\dot{y} = v$ die Lösung y ermitteln.

Beispiel 1.3.3: $\ddot{y} = \frac{1}{y^2} \cdot \dot{y}$

Für $\dot{y} = 0$ erhält man $y = C$ mit $C \neq 0$ als Lösung der DGL.

Sei nun $\dot{y} \neq 0$. Substituiere $\dot{y} = v(y)$, $\ddot{y} = v(y) \cdot \frac{d}{dy} v(y)$. Dies liefert

$$v \cdot v' = \frac{1}{y^2} \cdot v \;, \text{ d.h. } \; v' = \frac{1}{y^2}$$

Mit TdV erhalten wir

$$\int 1\, dv = \int \frac{1}{y^2}\, dy \qquad\qquad -\frac{1}{2} y^2 = t + C_2$$
$$-2t - 2C$$

d.h. $\quad v = -\frac{1}{y} + C_1$

Daraus ergibt sich dann mit $v = \dot{y}$ die DGL

$$\dot{y} = -\frac{1}{y} + C_1 = \frac{C_1 y - 1}{y}$$

TdV: $\int \underbrace{\frac{y}{C_1 y - 1}} dy = \int dt$ $\qquad$ Für $C_1 = 0$ ergibt sich $-\int y\,dy = \int dt$,

$= \frac{1}{C_1}\left(1 + \frac{1}{C_1 y - 1}\right)$, $C_1 \neq 0$ $\qquad$ d.h. $y = \pm\sqrt{-2t - 2C}$

d.h. für $C_1 \neq 0$ die implizite Lösung $\frac{1}{C_1}\left(y + \frac{1}{C_1} \ln|C_1 y - 1|\right) = t + C_2$

Lineare DGL 2. Ordnung

Bei den folgenden Überlegungen beschränken wir uns auf die Behandlung linearer DGL 2. Ordnung, d.h. auf DGL der Form

$$\ddot{y} + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\,y = r(t)$$

mit auf einem Intervall I stetigen Funktionen $a_1(t), a_0(t), r(t)$.

Ist $r(t)=0$, so heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.

Leider gibt es im Gegensatz zur linearen DGL 1. Ordnung keine allgemeine Lösungsformel. Es lassen sich aber einige nützliche strukturelle Eigenschaften der allgemeinen Lösung angeben. Außerdem führen wir einige Begriffe ein, die in analoger Form bei der Behandlung linearer DGL n-ter Ordnung Verwendung finden.

Definition 1.3.4: Seien $y_1(t), y_2(t)$ zwei Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathbb{D}$. y_1 und y_2 heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ besitzt, andernfalls linear abhängig.

Sind zwei linear unabhängige Funktionen y_1, y_2 Lösungen der linearen homogenen DGL $\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0$, so heißt y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der DGL.

Beispiel 1.3.5:

(i) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \iff \alpha_1 + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

(ii) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda t}$ und $y_2(t) = t\cdot e^{\lambda t}$ sind linear unabhängig, da die Gleichung

$$\alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t} = 0 \iff \alpha_1 + \alpha_2 t = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ erfüllt ist.

(iii) Die Funktionen $y_1(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ und $y_2(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $\beta\neq 0$, sind linear unabhängig, da die Gleichung
$\alpha_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t)+\alpha_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t)=0 \Leftrightarrow \alpha_1\sin(\beta t)+\alpha_2\cos(\beta t)=0$ für $\beta\neq 0$
nur für $\alpha_1=\alpha_2=0$ erfüllt ist.

Für lineare DGL 2. Ordnung gilt nun folgendes zentrale Resultat.

Satz 1.3.6: Es sei $\ddot{y}+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=r(t)$ eine lineare DGL 2. Ordnung und $\ddot{y}+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=0$ die zugeordnete homogene Gleichung.
Dann gilt:

(1) Ist $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, dann ist $y_h(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

(2) Ist darüberhinaus $y_p(t)$ eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL, so ist $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Aus diesem Satz ergibt sich nun, dass wir einerseits eine Methode benötigen, um ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu bestimmen und andrerseits Verfahren brauchen, um eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu finden.

Beispiel 1.3.7: Wir betrachten die lineare, inhomogene DGL
$$\ddot{y}+\frac{1}{t^2}y=\ln(t).$$

Behauptung 1: $y_1=\sqrt{t}\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)$, $y_2=\sqrt{t}\,\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)$ bilden ein Fundamentalsystem für $\ddot{y}+\frac{1}{t^2}y=0$.

Beweis von Behauptung 1:

Es gilt: $\dot{y}_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)\right]$
$$\ddot{y}_1=-\frac{1}{\sqrt{t^3}}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)$$

Einsetzen von y_1 und $\ddot{y}_1$ in die homogene DGL liefert
$$-t^{-3/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)+\underbrace{\tfrac{1}{t^2}\cdot\sqrt{t}}_{=t^{-3/2}}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)=0$$

y_1 löst also die homogene DGL. Analog zeigt man, dass y_2 die homogene Gleichung löst. Da y_1 und y_2 linear unabhängig sind, bilden sie somit ein Fundamentalsystem. Also lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ &= \sqrt{t}\cdot\left[C_1 \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)\right] \end{aligned}$$

Behauptung 2: $y_p = \frac{1}{3}t^2[\ln(t)-1]$ ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Beweis von Behauptung 2:

Es gilt $\dot{y}_p = \frac{2}{3}t[\ln(t)-1] + \frac{1}{3}t$, $\ddot{y}_p = \frac{2}{3}\ln(t) + \frac{1}{3}$.

Damit ist
$$\begin{aligned} \ddot{y}_p + \frac{1}{t^2}y_p &= \frac{2}{3}\ln(t) + \frac{1}{3} + \frac{1}{\cancel{t^2}}\cdot\frac{1}{3}\cancel{t^2}[\ln(t)-1] \\ &= \ln(t), \end{aligned}$$

d.h. y_p ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Insgesamt ergibt sich damit die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL als

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= \sqrt{t}\left[C_1 \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ln(t)\right)\right] + \tfrac{1}{3}t^2[\ln(t)-1]. \end{aligned}$$

Leider gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren für die Bestimmung des Fundamentalsystems. Wir beschränken uns daher im Folgenden auf:

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dies sind DGL der Form

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t) \text{ mit Konstanten } a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$.

Wir benötigen ein Fundamentalsystem, d.h. 2 linear unabhängige Lösungen. Es ist naheliegend, mit geeigneten Exponentialfunktionen "zu probieren", d.h. wir machen den Ansatz: $y = e^{\lambda t}$.

Wenn dies tatsächlich eine Lösung sein soll, dann muss y zusammen mit $\dot{y}=\lambda e^{\lambda t}$ und $\ddot{y}=\lambda^2 e^{\lambda t}$ die DGL erfüllen. Es muss also gelten:

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+a_1\lambda e^{\lambda t}+a_0 e^{\lambda t}=0 \quad | : e^{\lambda t}\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$$

Diese Gleichung heißt charakteristische Gleichung, weil sie, wie wir gleich sehen werden, das Lösungsverhalten / die Art des Fundamentalsystems bestimmt.

Wir erinnern uns daran, dass bei einer quadratischen Gleichung drei Fälle auftreten können: zwei verschiedene reelle Nullstellen, eine doppelte reelle Nullstelle, keine reelle Nullstelle. Wir betrachten die Fälle getrennt.

1. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(\frac{a_1}{2})^2-a_0}$, d.h. $(\frac{a_1}{2})^2-a_0>0$.
Nach unseren Überlegungen sind dann $y_1=e^{\lambda_1 t}$ und $y_2=e^{\lambda_2 t}$ Lösungen der homogenen DGL. Wegen $\lambda_1\neq\lambda_2$ sind sie linear unabhängig und bilden somit ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall also:

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

2. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda=-\frac{a_1}{2}$, d.h. $(\frac{a_1}{2})^2-a_0=0$.
Somit haben wir eine spezielle Lösung $y_1=e^{-\frac{a_1}{2}t}$. Für das Fundamentalsystem benötigen wir eine weitere linear unabhängige Lösung. Wir zeigen, dass $y_2=t\cdot e^{-\frac{a_1}{2}t}$ die Forderung erfüllt, indem wir y_2 zusammen mit den Ableitungen $\dot{y}_2=(1-\frac{a_1}{2}\cdot t)e^{-\frac{a_1}{2}t}$, $\ddot{y}_2=[(\frac{a_1}{2})^2 t-a_1]e^{-\frac{a_1}{2}t}$ in die DGL einsetzen:

$$\underbrace{[(\tfrac{a_1}{2})^2\cdot t-a_1]e^{-\frac{a_1}{2}t}}_{\ddot{y}_2}+a_1\underbrace{(1-\tfrac{a_1}{2}\cdot t)e^{-\frac{a_1}{2}t}}_{\dot{y}_2}+a_0\underbrace{e^{-\frac{a_1}{2}t}}_{y_2}$$

$$=\{(\tfrac{a_1}{2})^2 t-\cancel{a_1}+\cancel{a_1}-\tfrac{a_1^2}{2}t+a_0\}e^{-\frac{a_1}{2}t}=-\underbrace{\{(\tfrac{a_1}{2})^2-a_0\}}_{=0 \text{ in diesem Fall}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\cdot t=0$$

$y_2 = t \cdot e^{-\frac{a_1}{2}t}$ erfüllt also ebenfalls die homogene DGL und $y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}t}$, $y_2 = te^{-\frac{a_1}{2}t}$ sind linear unabhängig. Sie bilden also ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der DGL in diesem Fall ist

$$y = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{a_1}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{a_1}{2}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ hat keine reelle Nullstelle, d.h. $(\frac{a_1}{2})^2 - a_0 < 0$. Wir zeigen, dass in diesem Fall die beiden linear unabhängigen Funktionen $y_1 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $y_2 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$ ein Fundamentalsystem bilden.

$y_1 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$\dot{y}_1 = e^{\alpha t}\{\alpha \sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\}$

$\ddot{y}_1 = e^{\alpha t}\{(\alpha^2 - \beta^2)\sin(\beta t) + 2\alpha\beta\cos(\beta t)\}$

Einsetzen in die DGL:

$$\underbrace{e^{\alpha t}\{(\alpha^2-\beta^2)\sin(\beta t) + 2\alpha\beta\cos(\beta t)\}}_{\ddot{y}_1} + a_1 \underbrace{e^{\alpha t}\{\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)\}}_{\dot{y}_1} + a_0 \underbrace{e^{\alpha t}\sin(\beta t)}_{y_1}$$

$$= e^{\alpha t}\{\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_0)}_{=(\frac{a_1}{2})^2 - [a_0 - (\frac{a_1}{2})^2] - \frac{a_1^2}{2} + a_0 \; = 0}\sin(\beta t) + \beta\underbrace{(2\alpha + a_1)}_{= -a_1 + a_1 \; = 0}\cos(\beta t)\} = 0$$

Somit erfüllt y_1 die DGL. Eine analoge Rechnung zeigt, dass auch y_2 die DGL erfüllt. Da y_1, y_2 linear unabhängig sind, bilden sie ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist somit:

$$y = C_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t) = e^{\alpha t}\{C_1\sin(\beta t) + C_2\cos(\beta t)\},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$.

Bevor wir uns damit beschäftigen, wie man an eine partikuläre Lösung einer inhomogenen DGL gelangt, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 1.3. : $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$, $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} - 6e^{\lambda t} = 0 \mid : e^{\lambda t} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \text{(charakteristische Gleichung)}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = -2 \vee \lambda_2 = 3 \quad (1. \text{ Fall } !)$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = e^{3t}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.3.8: $\ddot{y} - 3\dot{y} + \frac{9}{4} y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$, $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda t} - 3\lambda e^{\lambda t} + \frac{9}{4} e^{\lambda t} = 0 \;|: e^{\lambda t} \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = 0 \quad \text{(charakteristische Gleichung)}$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \quad (2. \text{ Fall } !)$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\frac{3}{2}t}$, $y_2 = t \cdot e^{\frac{3}{2}t}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{3}{2}t}$

Beispiel 1.3.9: $\ddot{y} - \frac{4}{3}\dot{y} + \frac{29}{9} y = 0$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$, $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in die DGL: $\lambda^2 e^{\lambda t} - \frac{4}{3}\lambda e^{\lambda t} + \frac{29}{9} e^{\lambda t} = 0 \;|: e^{\lambda t} \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{29}{9} = 0 \quad \text{(charakteristische Gleichung)}$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{29}{9}}$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{-25}{9}} \quad (3. \text{ Fall } !)$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\frac{2}{3}t} \sin(\frac{5}{3}t)$, $y_2 = e^{\frac{2}{3}t} \cos(\frac{5}{3}t)$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = e^{\frac{2}{3}t}(C_1 \sin(\frac{5}{3}t) + C_2 \cos(\frac{5}{3}t))$

Nachdem wir nun gesehen haben, wie man die allgemeine Lösung einer homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmen kann, wenden wir uns dem Problem zu, eine partikuläre Lösung für die inhomogene Gleichung zu finden. Dazu gibt es ein allgemeines Verfahren, das mit "Variation der Konstanten" bezeichnet wird. Die Durchführung ist in der Regel ziemlich aufwendig. Wir werden hier eine andere Methode kennenlernen, die in vielen praktischen Problemstellungen funktioniert und in

der Regel mit geringerem Aufwand durchgeführt werden kann.
Dabei versucht man, Kenntnisse über strukturelle Eigenschaften der Störfunktion (Inhomogenität) zu nutzen, indem man dazu passend einen geeigneten Ansatz für eine Lösung y_p formuliert, in dem zunächst noch freie Parameter sind. Diese werden dann so bestimmt, dass tatsächlich eine Lösung herauskommt. Für viele in der Praxis vorkommende Störfunktionen kann man einen passenden Ansatz aus einer Tabelle wählen.
Wir werden zunächst an einigen Beispielen erläutern, wie man auf solche Ansätze kommt.

Beispiel 1.3.10: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = t^2 - 1$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 0$ haben wir bereits bestimmt: $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Für die Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Gleichung überlegen wir, dass, wenn $r(t) = t^2 - 1$ ein Polynom vom Grad 2 ist, y_p so angesetzt werden muss, dass die linke Seite der DGL ebenfalls ein Polynom vom Grad 2 ergibt. Da Ableitungen von Polynomen wieder Polynome mit niedrigerem Grad sind, ist es sinnvoll, y_p in der Form $y_p = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$ anzunehmen. Die Parameter A_0, A_1, A_2 sind nun so zu bestimmen, dass y_p die inhomogene DGL löst. Dazu setzen wir y_p zusammen mit den Ableitungen

$$\dot{y}_p = 2A_2 t + A_1 \ , \ \ddot{y}_p = 2A_2$$

in die DGL ein:

$$2A_2 - (2A_2 t + A_1) - 6(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -6A_2 t^2 + (-2A_2 - 6A_1)t + (2A_2 - A_1 - 6A_0) = 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t + (-1)$$

Da 2 Polynome genau dann gleich sind, wenn sie in ihren Koeffizienten übereinstimmen, muss also gelten:

$$-6A_2 = 1$$
$$-6A_1 - 2A_2 = 0$$
$$-6A_0 - A_1 + 2A_2 = -1$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der eindeutig bestimmten Lösung: $A_0 = \frac{11}{108}$, $A_1 = \frac{1}{18}$, $A_2 = -\frac{1}{6}$

Somit ist $y_P = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t + \frac{11}{108}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Da für die allgemeine Lösung der DGL $y = y_h + y_P$ gilt, erhalten wir nun insgesamt:

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t + \frac{11}{108}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = t^2 - 1$.

Beispiel 1.3.11: $\ddot{y} - \dot{y} = t^2 + 3t - 1$

Die zugehörige homogene DGL $\ddot{y} - \dot{y} = 0$ hat die allgemeine Lösung $y_h = C_1 + C_2 e^t$.

Um nun eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen DGL zu bestimmen, müssen wir beachten, dass in dieser DGL y nicht vorkommt, sondern nur die Ableitungen $\dot{y}$ und $\ddot{y}$. Um nun mit $\ddot{y} - \dot{y}$ an ein Polynom 2. Grades wie in der Störfunktion zu gelangen, muss im Ansatz für $\dot{y}_p$ Polynom 2. Grades gewählt werden, d.h. y_p als <u>eine</u> Stammfunktion eines Polynoms 3. Grades:

$y_P = A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t$, $\dot{y}_P = 3A_3 t^2 + 2A_2 t + A_1$; $\ddot{y}_P = 6A_3 t + 2A_2$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$6A_3 t + 2A_2 - 3A_3 t^2 - 2A_2 t - A_1 = t^2 + 3t - 1$$
$$\Leftrightarrow -3A_3 \cdot t^2 + (6A_3 - 2A_2) \cdot t + (2A_2 - A_1) = 1 \cdot t^2 + 3 \cdot t + (-1)$$

Koeffizientenvergleich: $-3A_3 = 1$

$$-2A_2 + 6A_3 = 3$$
$$-A_1 + 2A_2 = -1$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $A_1 = -4$, $A_2 = -\frac{5}{2}$, $A_3 = -\frac{1}{3}$

Somit ist $y_p = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 4t$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und $y = C_1 + C_2 e^t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 4t$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(t)$ ein Polynom vom Grad n, dann macht man für die partikuläre Lösung der DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$ den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} Q_n(t) & \text{, falls } a_0 \neq 0 \\ t \cdot Q_n(t) & \text{, falls } a_0 = 0,\ a_1 \neq 0 \\ (t^2 \cdot Q_n(t) & \text{, falls } a_0 = a_1 = 0) \end{cases}$$

mit $Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k t^k$ Polynom vom Grad n.

Beispiel 1.3.12: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 3e^{4t}$

Wie bereits berechnet, ist $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung.

Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$y_p = A \cdot e^{4t}$, $\dot{y}_p = 4Ae^{4t}$, $\ddot{y}_p = 16Ae^{4t}$

Einsetzen in die DGL:

$$16Ae^{4t} - 4Ae^{4t} - 6Ae^{4t} = 3e^{4t} \quad | : e^{4t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

Also ist $y_p = \frac{1}{2}e^{4t}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^{4t}$.

Beispiel 1.3.13: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 3e^{3t}$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL ist wieder $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$. Hier ist es nicht sinnvoll, für die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL einen Ansatz der Form Ae^{3t} zu machen, da dies bereits (mit $C_1 = 0$, $C_2 = A$) Lösung der homogenen DGL ist; die linke Seite ergibt demnach für jeden Wert für die Konstante A den Wert Null.

Es funktioniert aber ein Ansatz der Form: $y_p = A \cdot t \cdot e^{3t}$.

Es gilt: $\dot{y}_p = A(1+3t)e^{3t}$, $\ddot{y}_p = 3A(2+3t)e^{3t}$

Einsetzen in die DGL:

$$3A(2+3t)e^{3t} - A(1+3t)e^{3t} - 6Ate^{3t} = 3e^{3t} \quad | : e^{3t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\{\underbrace{3(2+3t)-(1+3t)-6t}_{=5}\} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \tfrac{3}{5}$$

Somit ist $y_p = \frac{3}{5}te^{3t}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} + \frac{3}{5}te^{3t}$.

Beispiel 1.3.14: $\ddot{y} - 3\dot{y} + \frac{9}{4}y = 2e^{\frac{3}{2}t}$

Wir haben bereits berechnet, dass $y_h = (C_1 + C_2t)e^{\frac{3}{2}t}$ die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL ist. Hier sind Ansätze der Form $A \cdot e^{\frac{3}{2}t}$, $A \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t}$ oder auch $(A_1 + A_2t)e^{\frac{3}{2}t}$ nicht sinnvoll, da diese ja sämtlich Lösungen der homogenen Gleichung sind. Es funktioniert aber ein Ansatz der Form $y_p = A \cdot t^2 \cdot e^{\frac{3}{2}t}$.

Es gilt: $\dot{y}_p = A(2t + \frac{3}{2}t^2)e^{\frac{3}{2}t}$, $\ddot{y}_p = A(2+6t+\frac{9}{4}t^2)e^{\frac{3}{2}t}$

Einsetzen in die DGL:

$$A(2+6t+\tfrac{9}{4}t^2)e^{\frac{3}{2}t} - 3A(2t+\tfrac{3}{2}t^2)e^{\frac{3}{2}t} + \tfrac{9}{4}At^2e^{\frac{3}{2}t} = 2 \cdot e^{\frac{3}{2}t} \quad | : e^{\frac{3}{2}t} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\{\underbrace{(2+6t+\tfrac{9}{4}t^2) - 3(2t+\tfrac{3}{2}t^2) + \tfrac{9}{4}t^2}_{=2}\} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad A = 1$$

Somit ist $y_p = t^2e^{\frac{3}{2}t}$ partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist $y = (C_1 + C_2t)e^{\frac{3}{2}t} + t^2e^{\frac{3}{2}t}$.

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(t)$ von der Form $C \cdot e^{ct}$ mit Konstanten $C, c \in \mathbb{R}$, dann macht man für die partikuläre Lösung der DGL $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = r(t)$ den Ansatz

Ae^{ct}, falls c keine Lösung der charakteristischen Gleichung

$A \cdot te^{ct}$, falls c einfache Lösung der charakteristischen Gleichung

$A \cdot t^2e^{ct}$, falls c doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung

Beispiel 1.3.15: $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 2\cdot\sin(2t) - 3\cdot\cos(2t)$

Die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen DGL hatten wir bereits zu $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$ bestimmt. Für die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL machen wir den Ansatz $y_p = A_1 \sin(2t) + A_2 \cos(2t)$, $\dot{y}_p = 2A_1\cos(2t) - 2A_2 \sin(2t)$, $\ddot{y}_p = -4A_1 \sin(2t) - 4A_2\cos(2t)$.

Einsetzen in die DGL:

$$-4A_1\sin(2t) - 4A_2\cos(2t) - 2A_1\cos(2t) + 2A_2\sin(2t) - 6A_1\sin(2t) - 6A_2\cos(2t) = 2\sin(2t) - 3\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow (-4A_1 + 2A_2 - 6A_1)\sin(2t) + (-4A_2 - 2A_1 - 6A_2)\cos(2t) = 2\sin(2t) - 3\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow (-10A_1 + 2A_2)\sin(2t) + (-2A_1 - 10A_2)\cos(2t) = 2\sin(2t) + (-3)\cos(2t)$$

Da $\sin(2t)$ und $\cos(2t)$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten vor den Sinus- und Cosinustermen rechts und links jeweils gleich sein.

Koeffizientenvergleich: $-10A_1 + 2A_2 = 2$

$$-2A_1 - 10A_2 = -3$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems ist $A_1 = -\frac{7}{52}$, $A_2 = \frac{17}{52}$, d.h. $y_p = -\frac{7}{52}\sin(2t) + \frac{17}{52}\cos(2t)$ ist partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist somit $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - \frac{7}{52}\sin(2t) + \frac{17}{52}\cos(2t)$.

Beispiel 1.3.16: $\ddot{y} + 4y = 2\sin(2t) - 3\cos(2t)$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung $\ddot{y} + 4y = 0$.

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{-4}$ (keine reelle Lösung)

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{0\cdot t}\sin(2t) = \sin(2t)$, $y_2 = e^{0\cdot t}\cos(2t) = \cos(2t)$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h = C_1\sin(2t) + C_2\cos(2t)$.

Als Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist somit eine Funktion der Form $A_1\sin(2t) + A_2\cos(2t)$ nicht sinnvoll.

Es funktioniert aber $y_p = t\cdot(A_1\sin(2t) + A_2\cos(2t))$,

$\dot{y}_p = (A_1 - 2A_2 t)\sin(2t) + (A_2 + 2A_1 t)\cos(2t)$, $\ddot{y}_p = -4(A_2 + A_1 t)\sin(2t) + 4(A_1 - A_2 t)\cos(2t)$

Einsetzen in die DGL:

$$-4(A_2+A_1t)\sin(2t)+4(A_1-A_2t)\cos(2t)+4t(A_1\sin(2t)+A_2\cos(2t))=2\sin(2t)-3\cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow -4A_2\sin(2t)+4A_1\cos(2t)=2\sin(2t)+(-3)\cos(2t)$$

Koeffizientenvergleich: $-4A_2=2 \Leftrightarrow A_2=-\frac{1}{2}$

$4A_1=-3 \Leftrightarrow A_1=-\frac{3}{4}$

Somit erhält man die partikuläre Lösung $y_p=t\cdot\left(-\frac{3}{4}\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich zu

$$y=C_1\sin(2t)+C_2\cos(2t)+t\left(-\frac{3}{4}\sin(2t)-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)$$
$$=\left(C_1-\frac{3}{4}t\right)\sin(2t)+\left(C_2-\frac{1}{2}t\right)\cos(2t).$$

Zusammengefasst machen die Beispiele folgende Ansätze plausibel.

Ist $r(t)$ von der Form $K_1\sin(kt)+K_2\cos(kt)$ mit Konstanten K_1,K_2 und $k>0$, dann macht man für die partikuläre Lösung der DGL $\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=r(t)$ den Ansatz

$$y_p=\begin{cases} A_1\sin(kt)+A_2\cos(kt), & \text{falls } a_1\neq 0 \vee k\neq\sqrt{a_0} \\ t(A_1\sin(kt)+A_2\cos(kt)), & \text{falls } a_1=0 \wedge k=\sqrt{a_0} \end{cases}$$

Bemerkung 1.3.17: Besteht die Störfunktion aus mehreren Summanden, so erhält man einen Ansatz für y_p als Summe von entsprechenden Ansätzen für die einzelnen Summanden.

Bei Produkten kann man versuchen, geeignete Ansätze zu multiplizieren. Dies führt leider nicht immer zum Ziel.

Man kann entsprechende Ansätze für Störfunktionen, die Produkte von Polynomen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen sind, formulieren, was wir hier aber nicht weiter vertiefen wollen.

Bevor wir uns noch einige Beispiele anschauen, stellen wir in einer Übersicht zusammen, welche Schritte zur Lösung eines AWP der Form

$$\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=r(t)\ ,\ y(t_0)=Y_0\ ,\ \dot{y}(t_0)=Y_1$$

erforderlich sind.

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugeordneten homogenen DGL $\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0 y=0$

a) Ansatz: $y=e^{\lambda t}$

b) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$

c) Fundamentalsystem: y_1, y_2 (abhängig vom Lösungsverhalten der charakteristischen Gleichung)

d) Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

a) Geeigneten Ansatz für y_p wählen

b) $\dot{y}_p, \ddot{y}_p$ bestimmen

c) $y_p, \dot{y}_p, \ddot{y}_p$ in die inhomogene DGL einsetzen

d) Parameter im Ansatz durch Koeffizientenvergleich ermitteln

e) Partikuläre Lösung y_p angeben

3. Schritt: Angabe der allgemeinen Lösung $y=y_h+y_p$ der inhomogenen DGL

4. Schritt: Bestimmung der Lösung des AWP

a) Einsetzen der AB

b) Bestimmung der Konstanten C_1, C_2

c) Angabe der Lösung des AWP

Beispiel 1.3.18: $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=2t^3-9t^2+2t+8-e^t+2\sin(2t)+6\cos(2t)$,

mit $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=2$

1. Schritt: Allgemeine Lösung homogene DGL $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=0$

a) Ansatz: $y_h=e^{\lambda t}$

b) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}$

$\Leftrightarrow \lambda_1=1 \vee \lambda_2=2$

c) Fundamentalsystem: $y_1=e^t$, $y_2=e^{2t}$

d) Allgemeine Lösung homogene Gleichung: $y_h=C_1e^t+C_2e^{2t}$

2\. Schritt: Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

a) Ansatz: $y_p = A_3 t^3 + A_2 t^2 + A_1 t + A_0 + B t e^t + D_1 \sin(2t) + D_2 \cos(2t)$

b) $\dot{y}_p = 3A_3 t^2 + 2A_2 t + A_1 + B(1+t)e^t + 2D_1 \cos(2t) - 2D_2 \sin(2t)$

$\ddot{y}_p = 6A_3 t + 2A_2 + B(2+t)e^t - 4D_1 \sin(2t) - 4D_2 \cos(2t)$

c) Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned}
&6A_3 t + 2A_2 + B(2+t)e^t - 4D_1 \sin(2t) - 4D_2 \cos(2t) \\
&- 9A_3 t^2 - 6A_2 t - 3A_1 - 3B(1+t)e^t - 6D_1 \cos(2t) + 6D_2 \sin(2t) \\
&+ 2A_3 t^3 + 2A_2 t^2 + 2A_1 t + 2A_0 + 2Bte^t + 2D_1 \sin(2t) + 2D_2 \cos(2t) \\
&= 2t^3 - 9t^2 + 2t + 8 - e^t + 2\sin(2t) + 6\cos(2t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ &2A_3 t^3 + [-9A_3 + 2A_2]t^2 + [6A_3 - 6A_2 + 2A_1]t + [2A_2 - 3A_1 + 2A_0] \\
&+ [-B]e^t + [-2D_1 + 6D_2]\sin(2t) + [-6D_1 - 2D_2]\cos(2t) \\
&= 2t^3 + [-9]t^2 + 2t + 8 + [-1]e^t + 2\sin(2t) + 6\cos(2t)
\end{aligned}$$

d) Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned}
2A_3 &= 2 \\
2A_2 - 9A_3 &= -9 \\
2A_1 - 6A_2 + 6A_3 &= 2 \\
2A_0 - 3A_1 + 2A_2 &= 8
\end{aligned}\right\}$$

Lösung: $A_0 = 1, A_1 = -2, A_2 = 0, A_3 = 1$

$-B = -1$ Lösung: $B = 1$

$$\left.\begin{aligned}
-2D_1 + 6D_2 &= 2 \\
-6D_1 - 2D_2 &= 6
\end{aligned}\right\}$$

Lösung: $D_1 = -1,\ D_2 = 0$

e) $y_p = t^3 - 2t + 1 + te^t - \sin(2t)$

3\. Schritt: Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = C_2 e^{2t} + C_1 e^t + t^3 - 2t + 1 + te^t - \sin(2t)$$

4\. Schritt: $\dot{y} = 2C_2 e^{2t} + C_1 e^t + 3t^2 - 2 + (1+t)e^t - 2\cos(2t)$

a) AB: $y(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 + C_1 + 1 = 1$

$\dot{y}(0) = 2 \Leftrightarrow 2C_2 + C_1 - 2 + 1 - 2 = 2$

b) Lösung des Gleichungssystems in a): $C_1 = -5,\ C_2 = 5$

c) Lösung des AWP: $y = 5e^{2t} - 5e^t + t^3 - 2t + 1 + te^t - \sin(2t)$

Beispiel 1.3.19: Angebot S und Nachfrage D eines Gutes seien in Abhängigkeit vom Preis $P(t)$ gegeben durch

$$S(t) = \alpha_3 + \alpha_2 \ddot{P}(t) + \alpha_1 \dot{P}(t) + \alpha_0 P(t) \,, \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$

$$D(t) = \beta_3 - \beta_2 \ddot{P}(t) - \beta_1 \dot{P}(t) - \beta_0 P(t) \,, \qquad \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0 .$$

Angebot und Nachfrage hängen in diesem Modell auch von der Preisänderung $\dot{P}(t)$ und der Preisbeschleunigung $\ddot{P}(t)$ ab.

Gleichgewicht herrscht, wenn $S(t) = D(t)$ gilt, d.h.

$$\alpha_3 + \alpha_2 \ddot{P}(t) + \alpha_1 \dot{P}(t) + \alpha_0 P(t) = \beta_3 - \beta_2 \ddot{P}(t) - \beta_1 \dot{P}(t) - \beta_0 P(t)$$

$$\Longleftrightarrow \ (\alpha_2 + \beta_2)\ddot{P}(t) + (\alpha_1 + \beta_1)\dot{P}(t) + (\alpha_0 + \beta_0) P(t) = \beta_3 - \alpha_3$$

Für $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0$ also:

$$\ddot{P} + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 + \beta_2}\dot{P} + \frac{\alpha_0 + \beta_0}{\alpha_2 + \beta_2} P = \frac{\beta_3 - \alpha_3}{\alpha_2 + \beta_2}$$

Hat man zusätzlich noch Angaben zum Preis und zur Preisänderung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0, so hat man insgesamt ein AWP der Form $\ddot{P} + K_1 \dot{P} + K_2 P = K_3$, $P(t_0) = P_0$, $\dot{P}(t_0) = P_1$, das sich mit den hier vorgestellten Methoden lösen lässt.

Eulersche Differentialgleichung zweiter Ordnung

Unter einer Eulerschen DGL 2. Ordnung versteht man die homogene lineare DGL $\quad t^2 \ddot{y} + a_1 t \dot{y} + a_0 y = 0$

mit speziellen nichtkonstanten Koeffizienten. Diese lässt sich für $t > 0$ bzw. $t < 0$ durch geeignete Substitutionen auf eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten zurückführen.

Wir betrachten den Fall $t > 0$.

Substitution: $s = \ln t$, d.h. $t = e^s$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{ds} \,, \quad \text{d.h. } t \cdot \dot{y} = \frac{dy}{ds}$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{ds}\right) \underset{\text{Produktregel}}{=} -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{ds}\right)}_{\underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) \cdot \frac{ds}{dt}}$$

$$= -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{1}{t^2}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} \ , \text{ d.h. } t^2\cdot\ddot{y} = \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Eulersche DGL ein, so erhält man mit den Bezeichnungen $y' = \frac{dy}{ds}$, $y'' = \frac{d^2y}{ds^2}$ für die Ableitungen von y nach der neuen Variablen s die lineare homogene DGL zweiter Ordnung $\quad y'' + (a_1 - 1)y' + a_0 y = 0$

mit konstanten Koeffizienten. Das Lösungsverhalten hängt somit wieder vom Lösungsverhalten der charakteristischen Gleichung ab.

Für den Fall $t<0$ verwendet man die Substitution $s = \ln(-t)$ und geht analog vor (Übung).

Beispiel 1.3.20: $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + \frac{3}{4}y = 0 \ , \ t>0$

Die oben angegebene Substitution führt dann auf die DGL

$$y'' + 2y' + \frac{3}{4}y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $y(s) = C_1 e^{-\frac{3}{2}s} + C_2 e^{-\frac{1}{2}s}$.

Rücksubstitution liefert $y(t) = C_1 t^{-3/2} + C_2 t^{-1/2}$

Beispiel 1.3.21: $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + y = 0 \ , \ t>0$

Mit der angegebenen Substitution erhalten wir die DGL

$$y'' + 2y' + y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $y(s) = C_1 e^{-s} + C_2\cdot s\cdot e^{-s}$.

Rücksubstitution liefert $y(t) = C_1\cdot\frac{1}{t} + C_2\cdot\frac{\ln t}{t}$.

Beispiel 1.3.22: $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 5y = 0 \ , \ t>0$

Wir substituieren wieder $s = \ln t$, d.h. $t = e^s$ und erhalten die DGL

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

mit der allgemeinen Lösung $y(s) = e^{-s}\{C_1\sin(2s) + C_2\cos(2s)\}$

Rücksubstitution liefert: $y(t) = t^{-1}\{C_1\sin(2\ln t) + C_2\cos(2\ln t)\}$

Beispiel 1.3.23: In der Theorie der Optionspreise trifft man auf die

DGL $\quad x^2 g''(x) + a\,x\,g'(x) + b\,g(x) = \alpha x + \beta$.

Dabei bezeichnet $g(x)$ den Wert einer Aktienoption, wenn der Wert der

Aktie x beträgt. In vielen Modellen ist $(a-1)^2>4b$, was wir im Folgenden annehmen. Außerdem setzen wir $x>0$ voraus.
Formal setzen wir noch $a+b\neq 0, b\neq 0$ und (s.u.) $\lambda_1\neq 1, \lambda_2\neq 1$ voraus.
Wir substituieren wieder $s=\ln x$, d.h. $x=e^s$ und erhalten die inhomogene lineare DGL $\frac{d^2g}{ds^2}+(a-1)\frac{dg}{ds}+bg=\alpha e^s+\beta$.

Lösen der homogenen DGL

DGL $$\frac{d^2g}{ds^2}+(a-1)\frac{dg}{ds}+bg=0$$

mit der charakteristischen Gleichung $\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0$.
Wegen der Voraussetzung $(a-1)^2>4b$ besitzt die charakteristische Gleichung die beiden verschiedenen reellen Lösungen

$$\lambda_1=\frac{1-a}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-b} \text{ und } \lambda_2=\frac{1-a}{2}-\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2-b}.$$

Somit ist $g_h(s)=C_1e^{\lambda_1 s}+C_2e^{\lambda_2 s}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Ansatz: $g_p(s)=Ae^s+B$, d.h. $\frac{dg_p}{ds}=Ae^s$, $\frac{d^2g_p}{ds^2}=Ae^s$

Einsetzen in die DGL:

$$A\cdot e^s+(a-1)Ae^s+b(Ae^s+B)=\alpha e^s+\beta$$

$$\Leftrightarrow (a+b)Ae^s+bB=\alpha e^s+\beta$$

Koeffizientenvergleich: $(a+b)A=\alpha$, $bB=\beta$, d.h. $A=\frac{\alpha}{a+b}$, $B=\frac{\beta}{b}$

Somit ist $g_p(s)=\frac{\alpha}{a+b}e^s+\frac{\beta}{b}$ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL, d.h. $g(s)=C_1e^{\lambda_1 s}+C_2e^{\lambda_2 s}+\frac{\alpha}{a+b}e^s+\frac{\beta}{b}$ die allgemeine Lösung.
Mit Hilfe der Rücksubstitution erhalten wir daraus die allgemeine Lösung unserer Ausgangsgleichung:

$$g(x)=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}+\frac{\alpha}{a+b}x+\frac{\beta}{b}$$

Stabilität linearer DGL 2ter Ordnung

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, welche Auswirkungen kleine Änderungen bei den Anfangsbedingungen auf das Lösungsverhalten bei

AWP mit linearen DGL 2ter Ordnung haben. Wir untersuchen insbesondere, welchen Effekt solche Änderungen auf das Verhalten für große Zeiten haben. Wir betrachten

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = r(t)$$

Die allgemeine Lösung ist $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$ mit den Fundamentallösungen y_1 und y_2 für die zugeordnete homogene Gleichung und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL.

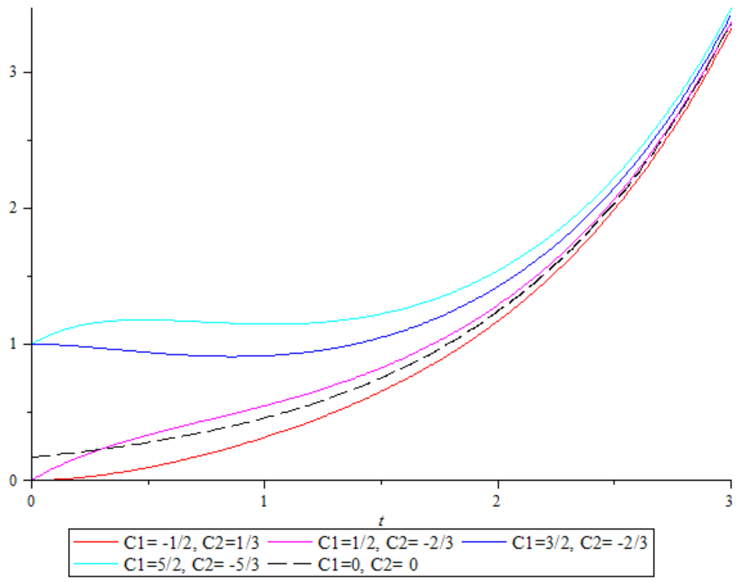
Definition 1.3.24: Die DGL $\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = r(t)$ heißt asymptotisch stabil, wenn jede Lösung $C_1 y_1 + C_2 y_2$ der zugehörigen homogenen DGL für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Gleichbedeutend damit ist offenbar, dass $\lim_{t\to\infty} y_1 = 0$ und $\lim_{t\to\infty} y_2 = 0$ gilt. Da sich die konkreten AB in den Werten für die Konstanten C_1, C_2 niederschlagen, bedeutet die asymptotische Stabilität also, dass der Effekt von Änderungen in den AB für $t \to \infty$ gegen Null geht.
Führen dagegen kleine Änderungen in den AB zu signifikanten Unterschieden im Verhalten der Lösung für $t \to \infty$, so nennt man die DGL instabil.

Wir diskutieren im Folgenden genauer die verschiedenen Fälle, die bei einer linearen DGL 2ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auftreten können, d.h. $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$.

1. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen λ_1, λ_2. Dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch: $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$
Da $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t} = 0$ genau dann, wenn $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$, ist in diesem Fall die DGL genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$ gilt.

Beispiel 1.3.25: Die DGL $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^t$ hat die allgemeine Lösung $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t$.



In der Graphik sind einige Lösungskurven zu verschiedenen AB gezeichnet.

$y(0)=0,\ \dot y(0)=0$

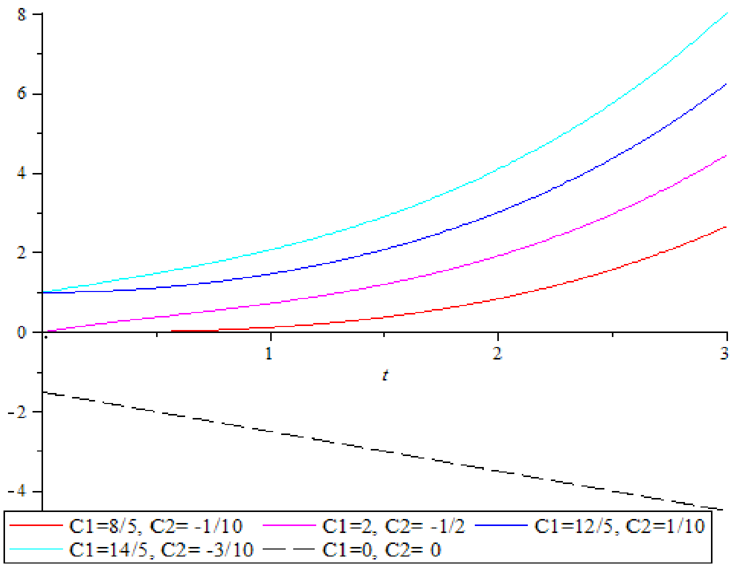
$y(0)=0,\ \dot y(0)=1$

$y(0)=1,\ \dot y(0)=0$

$y(0)=1,\ \dot y(0)=1$

Mit $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$ ist die DGL asymptotisch stabil.

Beispiel 1.3.26: Die DGL $\ddot y+\frac{3}{2}\dot y-y=t$ hat die allgemeine Lösung $y=C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2e^{-2t}-t-\frac{3}{2}$.



In der Graphik sind wieder einige Lösungskurven für verschiedene AB wiedergegeben.

$y(0)=0,\ \dot y(0)=0$

$y(0)=0,\ \dot y(0)=1$

$y(0)=1,\ \dot y(0)=0$

$y(0)=1,\ \dot y(0)=1$

Wegen $\lambda_1=\frac{1}{2}>0$ ist die DGL instabil.

2. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat eine doppelte reelle Nullstelle λ. Dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch: $y_1=e^{\lambda t}$, $y_2=te^{\lambda t}$. Da $\lim\limits_{t\to\infty}e^{\lambda t}=\lim\limits_{t\to\infty}te^{\lambda t}=0$ genau dann, wenn $\lambda<0$, ist in diesem Fall die DGL genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lambda<0$ gilt.

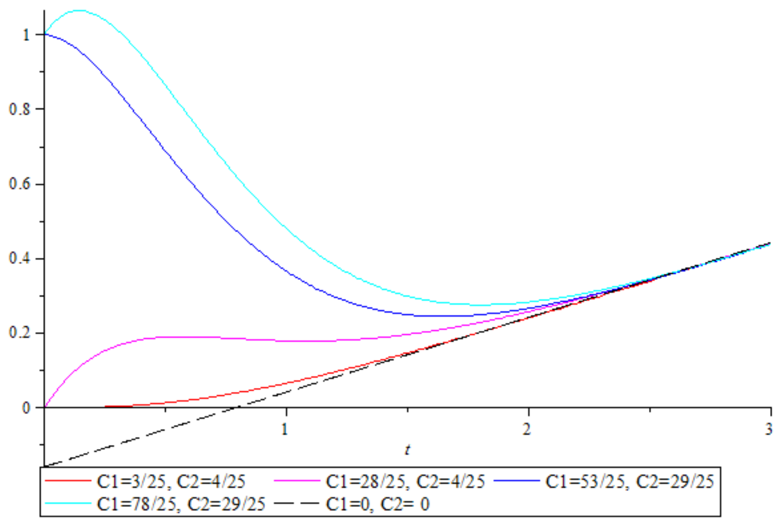
3. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat keine reellen Lösungen. Dann ist das Fundamentalsystem gegeben durch

$y_1 = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $y_2 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ mit $\alpha = -\frac{a_1}{2}$, $\beta = \sqrt{a_0 - (\frac{a_1}{2})^2}$.

Da $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t) = 0$ genau dann, wenn $\alpha < 0$, ist in diesem Fall die DGL genau dann asymptotisch stabil, wenn $\alpha = -\frac{a_1}{2} < 0$, d.h. $a_1 > 0$ gilt.

Beispiel 1.3.27: Die DGL $\ddot y + 4\dot y + 5y = t$ hat die allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{-2t}\sin t + C_2 e^{-2t}\cos t + \frac{1}{5}t - \frac{4}{25}.$$



In dem Bild sind Lösungskurven für verschiedene AB gezeichnet.

$y(0) = 0,\ \dot y(0) = 0$

$y(0) = 0,\ \dot y(0) = 1$

$y(0) = 1,\ \dot y(0) = 0$

$\dot y(0) = 1,\ \dot y(0) = 1$

Wegen $a_1 = 4 > 0$ (d.h. $\alpha = -2 < 0$) ist die DGL asymptotisch stabil. Überträgt man die für die verschiedenen Fälle gefundenen Bedingungen auf die Koeffizienten a_0, a_1 der DGL, so erhält man folgendes einfache Kriterium.

Satz 1.3.28: Die DGL $\ddot y + a_1\dot y + a_0 y = r(t)$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$ gilt.

Bemerkung 1.3.29: Wir betrachten die DGL $\ddot y + a_1 \dot y + a_0 y = c$ mit $a_0 \neq 0$, c konstant. Dann ist $y = \frac{c}{a_0}$ eine Gleichgewichtslösung, denn $y = \frac{c}{a_0}$ ist offenbar konstante Lösung der Gleichung. Alle Lösungen der DGL streben für $t \to \infty$ gegen diese Gleichgewichtslösung, wenn $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ gilt (d.h. die DGL asymptotisch stabil ist).

Die Gleichgewichtslösung $y = \frac{c}{a_0}$ heißt dann asymptotisch stabil.

I.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

In diesem Kapitel werden wir einige Resultate und Methoden des letzten Kapitels in allgemeinerer Form behandeln.

Wir befassen uns mit linearen DGL n-ter Ordnung, d.h. mit DGL vom Typ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\, y = r(t)$$

mit auf einem Intervall stetigen Funktionen $a_{n-1}(t), \ldots, a_1(t), a_0(t), r(t)$.

Wie auch im letzten Kapitel heißt die DGL homogen, falls die Störfunktion $r(t) = 0$ ist, sonst inhomogen.

Definition 1.4.1: Seien $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ n Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathbb{D}$. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_n y_n(t) = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ besitzt, andernfalls linear abhängig.

Sind n linear unabhängige Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Lösungen der linearen homogenen DGL $y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,\dot{y} + a_0(t)\, y = 0$, so heißt $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem der DGL.

Beispiel 1.4.2:

(i) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ldots, y_j(t) = e^{\lambda_j t}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ sind linear unabhängig.

(ii) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda t}, y_2(t) = t e^{\lambda t}, \ldots, y_j(t) = t^{j-1} e^{\lambda t}$ sind linear unabhängig.

(iii) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), y_2(t) = e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), y_3(t) = e^{\alpha_2 t}\sin(\beta_2 t), y_4(t) = e^{\alpha_2 t}\cos(\beta_2 t), \ldots, y_{2j-1}(t) = e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), y_{2j}(t) = e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$, wobei bei jeweils zwei Funktionen y_{2e}, y_{2e+2} bzw. y_{2e-1}, y_{2e+1} die zugehörigen α_e, α_{e+1} oder die β_e, β_{e+1} verschieden sind, sind linear unabhängig.

(iv) Die Funktionen $y_1(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_2(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_3(t) = t \cdot e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_4(t) = t \cdot e^{\alpha t}\cos(\beta t), \ldots, y_{2j-1}(t) = t^{j-1} e^{\alpha t}\sin(\beta t), y_{2j}(t) = t^{j-1} e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ sind linear unabhängig.

(v) Kombinationen von Funktionen aus (i)–(iv) sind linear unabhängig.

In Verallgemeinerung von Satz 1.3.6 gilt nun folgendes zentrale Resultat:

Satz 1.4.3: Es sei $y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=r(t)$ eine lineare DGL n-ter Ordnung und $y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_1(t)\dot{y}+a_0(t)y=0$ die zugeordnete homogene Gleichung. Dann gilt:

(1) Ist $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL, dann ist $y_h(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\dots+C_ny_n(t)$, $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

(2) Ist darüberhinaus $y_p(t)$ eine partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen DGL, so ist $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Wir benötigen also wieder einerseits eine Methode, um ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu bestimmen und andrerseits Verfahren, um eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu finden.

Wir betrachten nun im Folgenden nur noch speziell

lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Dies sind DGL der Form

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{y}+a_0y=r(t) \text{ mit Konstanten } a_0, a_1, \dots, a_{n-1}.$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{y}+a_0y=0$.

Wir benötigen ein Fundamentalsystem, d.h. n linear unabhängige Lösungen.

Ansatz: $y=e^{\lambda t}$ mit den Ableitungen $\dot{y}=\lambda e^{\lambda t}, \dots, y^{(n-1)}=\lambda^{n-1}e^{\lambda t}, y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda t}$.

Einsetzen in die DGL liefert:

$$\lambda^n e^{\lambda t}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\dots+\lambda a_1 e^{\lambda t}+a_0 e^{\lambda t}=0 \quad | : e^{\lambda t}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0=0 \quad \text{(Charakteristische Gleichung)}$$

Auf der linken Seite der charakteristischen Gleichung steht ein Polynom n-ten Grades, dessen Nullstellenverhalten die Fundamentallösungen bestimmt.

Um diese genauer angeben zu können, benötigen wir zunächst eine Aussage zur Faktorisierung von Polynomen:

Satz 1.4.4: Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ein Polynom vom Grad n. Dann besitzt $p(x)$ stets eine Produktdarstellung aus linearen Faktoren $(x - x_\alpha)$, quadratischen Faktoren $(x^2 + p_\beta x + q_\beta)$, die keine reellen Nullstellen besitzen, d.h.

$$p(x) = a_n (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_\ell)^{m_\ell}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_ix+q_i)^{k_i}$$

mit $m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell + 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_i) = n$.

Für Polynome vom Grad 2 liefert die pq-Formel die Faktorisierung. Für Polynome vom Grad 3 und 4 gibt es zwar geschlossene Formel, die aber sehr kompliziert sind. Für Polynome vom Grad 5 und höher gibt es keine allgemeinen Formeln. Häufig lassen sich jedoch Nullstellen mit Hilfe des folgenden Satzes ermitteln.

Satz 1.4.5: Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten, d.h. $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

(1) Ist $P(x^*) = 0$ mit $x^* \in \mathbb{Z}$, dann ist x^* Teiler der Konstanten a_0, d.h. wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so sind sie unter den Teilern von a_0 zu finden.

(2) Allgemeiner ist sogar folgendes erfüllt: Ist $P(x^*) = 0$ mit $x^* = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (in gekürzter Form), so ist a Teiler von a_0 und b Teiler von a_n.

Bevor wir uns weiter mit dem Fundamentalsystem für homogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschäftigen, behandeln wir einige Beispiele zur Faktorisierung. Dabei gehen wir so vor, dass wir schrittweise Linearfaktoren abspalten, d.h. wir nutzen folgenden Sachverhalt: Ist $P(x^*) = 0$, so ist $P(x) = (x - x^*)\,Q(x)$, wobei $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist, das mit Hilfe von Polynomdivision ermittelt werden kann.

Beispiel 1.4.6: Sei $P(x)=2x^3+4x^2-10x-12$. Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur die Teiler von -12, d.h. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ in Frage, die man nacheinander probieren kann. Man ermittelt: $P(-1)=0$. Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+4x^2-10x-12):(x+1)=2x^2+2x-12 \\
\underline{2x^3+2x^2} \\
\qquad\quad 2x^2-10x \\
\qquad\quad \underline{2x^2+2x} \\
\qquad\qquad\quad -12x-12 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-12x-12} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Somit gilt $P(x)=(x+1)\cdot Q(x)$ mit $Q(x)=2x^2+2x-12$

Wegen $2x^2+2x-12=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=2$$

gilt $Q(x)=2(x+3)(x-2)$, also $P(x)=2(x+1)(x+3)(x-2)$.

Beispiel 1.4.7: Sei $P(x)=3x^3-x^2+6x-2$. Als ganzzahlige Nullstellen kommen die Teiler von -2, d.h. $\pm1, \pm2$ in Frage. Man berechnet $P(1)=6\neq0$, $P(-1)=-12\neq0$, $P(2)=30\neq0$, $P(-2)=-42\neq0$.

Mit Satz 1.4.5 (1) schließen wir, dass $P(x)$ keine ganzzahligen Nullstellen besitzt. Wir wenden Satz 1.4.5 (2) an und probieren $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$. Es gilt: $P(\frac{1}{3})=0$. Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{l}
(3x^3-x^2+6x-2):(x-\frac{1}{3})=3x^2+6 \\
\underline{3x^3-x^2} \\
\qquad\qquad 6x-2 \\
\qquad\qquad \underline{6x-2} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Somit gilt: $P(x)=(x-\frac{1}{3})(3x^2+6)=3(x-\frac{1}{3})(x^2+2)$.

Da x^2+2 keine reellen Nullstellen besitzt, ist dies die vollständige Faktorisierung.

Wir wenden uns nun wieder dem linearen homogenen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu. Wie wir gesehen haben führt der Ansatz $y=e^{\lambda x}$ auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Das Fundamentalsystem hängt nun von den Lösungen der charakteristischen Gleichung bzw. anders ausgedrückt von der Faktorisierung von $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ ab.

Nach Satz 1.4.4 gilt nun:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda-\lambda_l)^{m_l} \underbrace{(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)}^{k_1} \cdot \dots \cdot \underbrace{(\lambda^2+p_i\lambda+q_i)}^{k_i}$$

keine reellen Nullstellen!

mit $m_1+\dots+m_l+2(k_1+\dots+k_i)=n$. Zu jedem Linearfaktor $(\lambda-\lambda^*)^{m^*}$ gehören m^* Funktionen des Fundamentalsystems: $e^{\lambda^* t}, te^{\lambda^* t}, \dots, t^{m^*-1}e^{\lambda^* t}$

Zu jedem quadratischen Faktor $(\lambda^2+p\lambda+q)^{k^*}$ gehören $2k^*$ Funktionen des Fundamentalsystems: $e^{\alpha^* t}\sin(\beta^* t), te^{\alpha^* t}\sin(\beta^* t), \dots, t^{k^*-1}e^{\alpha^* t}\sin(\beta^* t)$, $e^{\alpha^* t}\cos(\beta^* t), te^{\alpha^* t}\cos(\beta^* t), \dots, t^{k^*-1}e^{\alpha^* t}\cos(\beta^* t)$ mit $\alpha^*=-\frac{p}{2}$, $\beta^*=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}$.

Die so gewonnenen n Fundamentallösungen sind stets linear unabhängig.

Die allgemeine Lösung ist jede Linearkombination der Fundamentallösungen.

Beispiel 1.4.8: $y^{(7)}+3y^{(6)}-y^{(5)}-23y^{(4)}-56y^{(3)}-68\ddot{y}-44\dot{y}-12y=0$

Der Ansatz $y=e^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^7+3\lambda^6-\lambda^5-23\lambda^4-56\lambda^3-68\lambda^2-44\lambda-12=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\lambda-3)(\lambda+1)^2(\underbrace{\lambda^2+2\lambda+2}_{\text{keine reellen Nullstellen}})^2 = 0$$

Aus der faktorisierten Darstellung lässt sich das Fundamentalsystem bestimmen zu:

$$y_1=e^{3t}, y_2=e^{-t}, y_3=te^{-t}, y_4=e^{-t}\sin(t), y_5=te^{-t}\sin(t), y_6=e^{-t}\cos(t), y_7=te^{-t}\cos(t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist somit:

$$y_h = C_1e^{3t}+(C_2+C_3t)e^{-t}+(C_4+tC_5)e^{-t}\sin(t)+(C_6+tC_7)e^{-t}\cos(t).$$

Ähnlich wie im Fall $n=2$ kann man für das Auffinden einer partikulären Lösung im inhomogenen Fall z.B. bei Störfunktionen vom Typ Polynom, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktion passende Ansätze wählen, die wir im Folgenden zusammenstellen.

Ist $r(t)$ ein Polynom vom Grad m, so macht man den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} Q_m(t) & \text{, falls } a_0 \neq 0 \\ t^k Q_m(t) & \text{, falls } a_0 = \dots = a_{k-1} = 0 \end{cases}$$

Zu bestimmende Parameter sind die $m+1$ Koeffizienten von $Q_m(t)$.

Ist $r(t)$ eine Exponentialfunktion $r(t) = a \cdot e^{ct}$, so macht man den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} A \cdot e^{ct}, & \text{falls } c \text{ nicht Nullstelle der charakteristischen Gleichung} \\ A t^k e^{ct}, & \text{falls } c \text{ k-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung} \end{cases}$$

Zu bestimmen ist der Parameter A.

Ist $r(t)$ eine trigonometrische Funktion $r(t) = a\sin(ct) + b\cos(ct)$, $c>0$, so macht man den Ansatz

$$y_p = \begin{cases} A\sin(ct) + B\cos(ct), & \text{falls das charakt. Polynom keinen Faktor } (\lambda^2+c) \text{ besitzt} \\ t^k[A\sin(ct) + B\cos(ct)], & \text{falls das charakteristische Polynom den Faktor } (\lambda^2+c)^k \text{ der Vielfachheit } k \text{ besitzt} \end{cases}$$

Zu bestimmen sind die Parameter A und B.

Beispiel 1.4.9: AWP $y^{(3)} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 4y = 12e^{2t}$, $y(0) = \frac{1}{4}$, $\dot{y}(0) = \frac{3}{2}$, $\ddot{y}(0) = -5$

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL

$$y^{(3)} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 4y = 0$$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$$\iff (\lambda+2)^2(\lambda+1) = 0$$

$$\iff \lambda_{1,2} = -2, \ \lambda_3 = -1$$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = t \cdot e^{-2t}$, $y_3 = e^{-t}$

Allgemeine Lösung: $y_h = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} + C_3 e^{-t}$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL.

Ansatz: $y_p = A \cdot e^{2t}$, $\dot{y}_p = 2Ae^{2t}$, $\ddot{y}_p = 4Ae^{2t}$, $y_p^{(3)} = 8Ae^{2t}$

Einsetzen in die DGL: $8Ae^{2t}+20Ae^{2t}+16Ae^{2t}+4Ae^{2t}=12e^{2t} \quad |:e^{2t}$

$$\Leftrightarrow \quad 48A=12 \Leftrightarrow A=\frac{1}{4}$$

Somit $y_p=\frac{1}{4}e^{2t}$

3. Schritt: Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y=(C_1+C_2t)e^{-2t}+C_3e^{-t}+\frac{1}{4}e^{2t}$$

4. Schritt: Lösen des AWP

$$\dot{y}=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{-2t}-C_3e^{-t}+\frac{1}{2}e^{2t}$$

$$\ddot{y}=(4C_1-4C_2+4C_2t)e^{-2t}+C_3e^{-t}+e^{2t}$$

AB: $y(0)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow C_1+C_3+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow C_1+C_3=0$

$\dot{y}(0)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow -2C_1+C_2-C_3+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow -2C_1+C_2-C_3=1$

$\ddot{y}(0)=-5 \Leftrightarrow 4C_1-4C_2+C_3+1=-5 \Leftrightarrow 4C_1-4C_2+C_3=-6$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $C_1=2,\ C_2=3,\ C_3=-2$

Somit löst $y=(2+3t)e^{-2t}-2e^{-t}+\frac{1}{4}e^{2t}$ das AWP.

Beispiel 1.4.10: $\quad y^{(4)}+2\ddot{y}+y=18\sin(2t)-27\cos(2t)$

1. Schritt: Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL

$$y^{(4)}+2\ddot{y}+y=0$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$$\Leftrightarrow \quad (\underbrace{\lambda^2+1}_{})^2=0$$

keine reellen Nullstellen; Vielfachheit 2

Fundamentalsystem: $y_1=C_1\sin(t),\ y_2=C_2t\sin(t),\ y_3=C_3\cos(t),\ y_4=C_4t\cos(t)$.

Allgemeine homogene Lösung:

$$y_h=(C_1+C_2t)\sin(t)+(C_3+C_4t)\cos(t)$$

2. Schritt: Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

Ansatz: $y_p=A\sin(2t)+B\cos(2t),\ \dot{y}_p=2A\cos(2t)-2B\sin(2t)$

$\ddot{y}_p=-4A\sin(2t)-4B\cos(2t),\ y_p^{(3)}=-8A\cos(2t)+8B\sin(2t),$

$y_p^{(4)}=16A\sin(2t)+16B\cos(2t)$

Einsetzen in die DGL:

$$16A\sin(2t)+16B\cos(2t)-8A\sin(2t)-8B\cos(2t)+A\sin(2t)+B\cos(2t)$$
$$= 18\sin(2t)-27\cos(2t)$$

$\Leftrightarrow \; 9A\sin(2t)+9B\cos(2t) = 18\sin(2t)-27\cos(2t)$

Koeffizientenvergleich: $9A = 18 \Leftrightarrow A=2$

$9B=-27 \Leftrightarrow B=-3$

Somit ist $y_p = 2\sin(2t)-3\cos(2t)$ partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

3. Schritt: Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = (C_1+C_2t)\sin(t)+(C_3+C_4t)\cos(t)+2\sin(2t)-3\cos(2t)$$

Stabilität linearer DGL n-ter Ordnung

Analog zum Fall 2ter Ordnung nennen wir eine lineare DGL n-ter Ordnung global asymptotisch stabil, wenn die allgemeine Lösung $y_h = C_1y_1+\ldots+C_ny_n$ der zugeordneten homogenen DGL gegen 0 konvergiert für t gegen unendlich für beliebige $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Gleichbedeutend damit ist, dass für jede Fundamentallösung y_i gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} y_i = 0$.

Wir betrachten speziell wieder den Fall der linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie wir gesehen haben, ist jede Fundamentallösung eine Funktion des folgenden Typs:

$$e^{\lambda t},\; t^ke^{\lambda t},\; e^{\alpha t}\sin(\beta t),\; e^{\alpha t}\cos(\beta t),\; t^ke^{\alpha t}\sin(\beta t),\; t^ke^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

Es gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow \lambda<0$, $\lim\limits_{t\to\infty} t^ke^{\lambda t}=0 \Leftrightarrow \lambda<0$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\sin(\beta t)=0,\; \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\cos(\beta t)=0 \Leftrightarrow \alpha<0$$

$$\lim_{t\to\infty} t^ke^{\alpha t}\sin(\beta t)=0,\; \lim_{t\to\infty} t^ke^{\alpha t}\cos(\beta t)=0 \Leftrightarrow \alpha<0$$

Die asymptotische Stabilität lässt sich also an der faktorisierten Form der charakteristischen Gleichung ablesen. Die DGL in Beispiel 1.4.9 ist global asymptotisch stabil, die in Beispiel 1.4.10 instabil.

Es gibt noch ein weiteres nützliches Kriterium, das eine notwendige und hinreichende Bedingung für die global asymptotische Stabilität einer linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten liefert. Dazu betrachtet man die aus den Koeffizienten der DGL bzw. der charakteristischen Gleichung gebildete Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Zum besseren Verständnis schreiben wir die Matrizen für spezielle n auf.

$$n=2:\ A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix},\quad n=3:\ A=\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix},\quad n=4:\ A=\begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Das Kriterium für globale asymptotische Stabilität beruht nun auf gewissen Vorzeichenbedingungen für aus der Matrix A gebildeten Determinanten. Wir benötigen:

Definition 1.4.11: Ein Hauptminor der Ordnung r einer $n \times n$-Matrix A ist die Determinante einer Matrix, die aus der Matrix A durch Streichung von $(n-r)$ Zeilen und $(n-r)$ Spalten entsteht. Dabei wird eine bestimmte Zeile i genau dann gestrichen, wenn auch die i-te Spalte gestrichen wird und umgekehrt.

Ein Hauptminor heißt führender Hauptminor der Ordnung r einer $n \times n$-Matrix A, wenn er aus den ersten r Zeilen und Spalten von A besteht.

Beispiel 1.4.12: Die führenden Hauptminoren von $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sind 3, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 11$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 50$

Nun können wir das gewünschte Kriterium formulieren.

Satz 1.4.13: Die lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = r(t)$ ist genau dann global asymptotisch stabil, wenn alle führenden Hauptminoren der aus den Koeffizienten der DGL gebildeten Matrix A (s.o.) positiv sind.

Beispiel 1.4.14: $y^{(3)} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + y = 5e^{2t}$

Wir untersuchen die Vorzeichen der führenden Hauptminoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die führenden Hauptminoren gilt:

$$5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 39 > 0, \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39 > 0,$$

d.h. die DGL ist global asymptotisch stabil.

Beispiel 1.4.15: $y^{(4)} + 2\ddot{y} + y = 18\sin(2t) - 27\cos(2t)$

Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Da bereits der erste führende Hauptminor 0 und damit nicht größer als 0 ist, wissen wir nach Satz 1.4.13, dass die DGL nicht global asymptotisch stabil ist.