II Differenzengleichungen

II.1 Einführende Bemerkungen

Viele Größen, die in der Wirtschaftswissenschaft beobachtet und analysiert werden, werden in festen Zeitintervallen oder zu festen Zeitpunkten aufgezeichnet. Einkommen, Konsum, Sparquoten, Zinsen etc. werden z.B. täglich, wöchentlich, monatlich, jährlich etc. betrachtet.

Gleichungen, die Zusammenhänge für solche Größen zu verschiedenen diskreten Zeitpunkten bzw. für verschiedene Zeitintervalle herstellen, sind sogenannte Differenzengleichungen. Mit $t=0,1,2,\ldots$ bezeichnen wir im Folgenden diskrete Zeitperioden oder diskrete Zeitpunkte.

Definition 2.1.1: Sei $f: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Gleichung der Form

$$y_{t+n} = f(t, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n-1}), \; n \in \mathbb{N},$$

heißt Differenzengleichung n-ter Ordnung. Eine Folge $(y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, d.h. eine Abbildung $y: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto y(t) = y_t$, die die Gleichung erfüllt, heißt Lösung der Differenzengleichung.

Bei einer Differenzengleichung n-ter Ordnung wird also ein Zusammenhang einer Größe zum Zeitpunkt $t+n$ zu den Werten dieser Größe an vorhergehenden Zeitpunkten $t+n-1, \ldots, t+1, t$ hergestellt.

Wie auch bei Differentialgleichungen gilt auch hier, dass es kein Lösungsverfahren gibt, das auf jede beliebige Differenzengleichung anwendbar ist. Außer einigen allgemeinen Betrachtungen beschränken wir uns im Rahmen dieser Vorlesung auf lineare Differenzengleichungen und diskutieren Lösungsmethoden für verschiedene Ordnungen.

Definition 2.1.2: Seien $(a_{i,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, $i=0,1,\ldots,n-1$ und $(r_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ reelle Folgen. Dann heißt eine Gleichung der Form

$$y_{t+n} + a_{n-1,t}\, y_{t+n-1} + \ldots + a_{1,t}\, y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t$$

lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung.

Ist $r_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$, so heißt sie homogen, sonst inhomogen.
Hat man Anfangswerte $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ gegeben, so lassen sich die weiteren y_t, $t = n, n+1, \dots$ prinzipiell immer rekursiv mit Hilfe der Differenzengleichung ermitteln. Wir erläutern dies zunächst am Beispiel der jährlichen Kapitalverzinsung.

Beispiel 2.1.3: Die Entwicklung eines Kapitals genügt bei jährlicher Verzinsung mit 5% der Differenzengleichung erster Ordnung

$$K_{t+1} = K_t(1+0.05) = 1.05\,K_t .$$

Ist das Anfangskapital K_0 vorgegeben, so berechnet man leicht nacheinander

$$K_1 = 1.05 \cdot K_0$$
$$K_2 = 1.05 \cdot K_1 = 1.05^2 \cdot K_0$$
$$K_3 = 1.05 \cdot K_2 = 1.05^3 \cdot K_0$$

u.s.w.

In diesem Beispiel ist es sehr einfach, eine geschlossene Formel für K_t anzugeben. Es gilt: $K_t = 1.05^t \cdot K_0$.

Nun könnte man sich damit zufrieden geben, dass man bei gegebenen Anfangswerten $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jedes gewünschte y_t rekursiv mit Hilfe der Differenzengleichung bestimmen kann. Dies ist aber in mehrerer Hinsicht unbefriedigend.

Häufig ist man interessiert

- an einer geschlossenen Formel, um y_t auch für große t schnell berechnen zu können,
- am Verhalten der Lösung für $t \to \infty$,
- Abhängigkeiten von Lösungen von weiteren Parametern untersuchen zu können,
- das Aufschaukeln von Rundungsfehlern, wie es bei der rekursiven Berechnung passieren kann, zu vermeiden.

Ideal wäre es, Lösungen von Differenzengleichungen mit Hilfe elementarer Funktionen angeben zu können, was leider nur für einige Typen geht.

II.2 Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung hat die spezielle Form
$$y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t .$$
Wir gehen nun so vor, dass wir ausgehend von spezielleren Betrachtungen schließlich eine allgemeine Lösungsformel herleiten.

Konstanter Koeffizient und konstante Inhomogenität

Wir betrachten den Fall $(a_{0,t})_{t\in\mathbb{N}_0} = (a_0)_{t\in\mathbb{N}_0}$, $(r_t)_{t\in\mathbb{N}_0} = (r)_{t\in\mathbb{N}_0}$, d.h. $a_{0,t} = a_0$ und $r_t = r$ sind konstant für alle $t\in\mathbb{N}_0$:
$$y_{t+1} + a_0 y_t = r \iff y_{t+1} = -a_0 y_t + r$$
Ist y_0 gegeben, so berechnet man rekursiv
$$y_1 = -a_0 y_0 + r$$
$$y_2 = -a_0 y_1 + r = -a_0(-a_0 y_0 + r) + r = a_0^2 y_0 + (1-a_0) r$$
$$y_3 = -a_0 y_2 + r = -a_0(a_0^2 y_0 + (1-a_0) r) + r = -a_0^3 y_0 + (1-a_0+a_0^2) r$$
$$y_4 = -a_0 y_3 + r = -a_0(-a_0^3 y_0 + (1-a_0+a_0^2) r) + r = a_0^4 y_0 + (1-a_0+a_0^2-a_0^3) r$$
u.s.w.

Man erkennt, dass man allgemein berechnen kann:
$$y_t = (-a_0)^t y_0 + r \sum_{i=0}^{t-1} (-a_0)^i$$

Für $a_0 = -1$ erhält man daraus unmittelbar: $y_t = y_0 + t\cdot r$.

Für $a_0 \neq -1$ benutzen wir die Formel für die geometrische Summe und erhalten
$$y_t = (-a_0)^t y_0 + \frac{1-(-a_0)^t}{1-(-a_0)}\cdot r$$
$$= (-a_0)^t y_0 + \frac{1-(-a_0)^t}{1+a_0}\cdot r$$

Beispiel 2.2.1: $y_{t+1} - y_t = 3$, $y_0 = 2$

Hier ist $a_0 = -1$ und $r = 3$. Somit lautet die Lösung
$$y_t = 2 + 3t$$

Beispiel 2.2.2: $y_{t+1} - 2y_t = 4$, $y_0 = 2$.

Hier ist $a_0 = -2$ und $r = 4$. Somit lautet die Lösung
$$y_t = 2^t\cdot 2 + \frac{1-2^t}{1-2}\cdot 4 = 2^{t+1} + (2^t - 1)\cdot 4 = 2^{t+1} + 2^{t+2} - 4$$

Bemerkungen zu Gleichgewichtslösungen und Stabilität

Eine konstante Lösung, d.h. eine Gleichgewichtslösung der Differenzengleichung $y_{t+1} + a_0 y_t = r$, ist eine Lösung, für die $y_{t+1} = y_t = y^*$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt, d.h. es muss gelten $y^* + a_0 y^* = r$.

Für $a_0 \neq -1$ erhalten wir also die Gleichgewichtslösung $y^* = \frac{r}{1+a_0}$.

Nun gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} (-a_0)^t = 0 \iff |a_0| < 1$.

Somit folgt: Ist $|a_0| < 1$, dann gilt

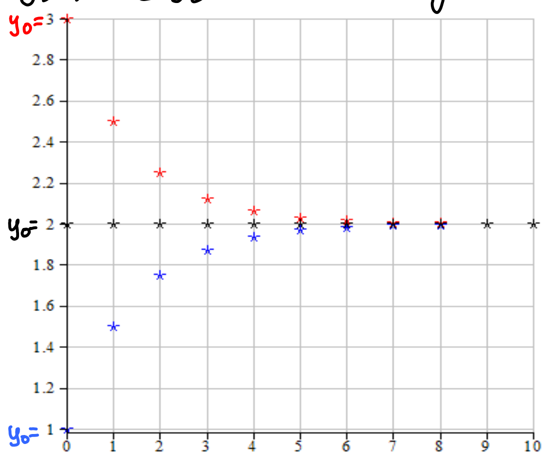
$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty}\left[(-a_0)^t y_0 + \frac{1-(-a_0)^t}{1+a_0} r\right] = \frac{1}{1+a_0}\cdot r,$$

d.h. y_t konvergiert gegen die Gleichgewichtslösung, falls $|a_0| < 1$.

Die Gleichung heißt dann global asymptotisch stabil.

Beispiel 2.2.3: Wir untersuchen das Stabilitätsverhalten in unterschiedlichen Situationen.

1) $y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 1$. Gleichgewichtslösung: $y^* = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$



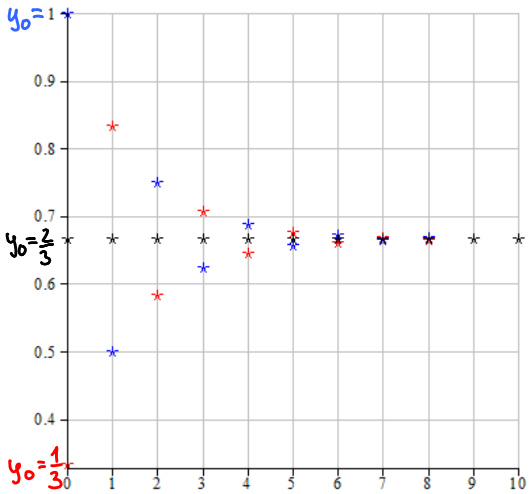
Für $y_0 = 1$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2^{-t}$$

Für $y_0 = 3$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot 3 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 2^{-t}$$

2) $y_{t+1} + \frac{1}{2} y_t = 1$. Gleichgewichtslösung: $y^* = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$



Für $y_0 = 1$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^t + \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^t}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{-t}$$

Für $y_0 = \frac{1}{3}$ erhalten wir die Lösung

$$y_t = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot \frac{1}{3} + \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^t}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{-t}$$

Konstanter Koeffizient und beliebige Inhomogenität

Wir setzen nun nur $(a_{0,t})_{t\in\mathbb{N}_0} = (a_0)_{t\in\mathbb{N}_0}$ als konstant voraus. Ist wieder y_0 gegeben, so berechnen wir nun rekursiv

$$y_1 = -a_0 y_0 + r_0$$

$$y_2 = -a_0 y_1 + r_1 = -a_0(-a_0 y_0 + r_0) + r_1 = a_0^2 y_0 - a_0 r_0 + r_1$$

$$y_3 = -a_0 y_2 + r_2 = -a_0(a_0^2 y_0 - a_0 r_0 + r_1) + r_2 = -a_0^3 y_0 + a_0^2 r_0 - a_0 r_1 + r_2$$

$$y_4 = -a_0 y_3 + r_3 = -a_0(-a_0^3 y_0 + a_0^2 r_0 - a_0 r_1 + r_2) + r_3$$
$$= a_0^4 y_0 - a_0^3 r_0 + a_0^2 r_1 - a_0 r_2 + r_3$$

u.s.w.

Allgemein erhält man aus diesen Überlegungen die Formel

$$y_t = (-a_0)^t y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} (-a_0)^{t-1-i} r_i = (-a_0)^t y_0 + \sum_{k=1}^{t} (-a_0)^{t-k} r_{k-1} = (-a_0)^t y_0 + \sum_{j=0}^{t-1} (-a_0)^j r_{t-1-j}$$

Beispiel 2.2.3: $\quad y_{t+1} - y_t = t+1$

Hier ist $a_0 = -1$ und $r_t = t+1$.

$$y_t = y_0 + \sum_{k=1}^{t} k = y_0 + (1+2+\ldots+t)$$
$$= y_0 + \frac{t(t+1)}{2}.$$

Beispiel 2.2.4: $\quad y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 3^t$

Hier ist $a_0 = -\frac{1}{2}$ und $r_t = 3^t$.

$$y_t = \left(\tfrac{1}{2}\right)^t \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1-i} \cdot 3^i = 2^{-t} \cdot y_0 + 2^{-t+1} \sum_{i=0}^{t-1} 6^i$$

geometrische Summe

$$= 2^{-t} y_0 + 2^{-t+1} \cdot \frac{1-6^t}{1-6}$$

$$= 2^{-t}\left(y_0 - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5} \cdot 6^t\right)$$

Der allgemeine lineare Fall

Der allgemeine Fall $\quad y_{t+1} + a_{0,t} y_t = r_t \quad$ ist nun etwas komplizierter aufzuschreiben. Analoges Vorgehen wie oben führt bei bekanntem y_0 zu

$$y_1 = -a_{0,0} y_0 + r_0$$

$$y_2 = -a_{0,1} y_1 + r_1 = -a_{0,1}(-a_{0,0} y_0 + r_0) + r_1 = a_{0,1} a_{0,0} y_0 - a_{0,1} r_0 + r_1$$

$$y_3 = -a_{0,2}\, y_2 + r_2 = -a_{0,2}(a_{0,1} a_{0,0} y_0 - a_{0,1} r_0 + r_1) + r_2$$
$$= -a_{0,2}\, a_{0,1}\, a_{0,0}\, y_0 + a_{0,2} a_{0,1} r_0 - a_{0,2} r_1 + r_2$$
$$y_4 = -a_{0,3}\, y_3 + r_3 = -a_{0,3}(-a_{0,2} a_{0,1} a_{0,0}\, y_0 + a_{0,2} a_{0,1} r_0 - a_{0,2} r_1 + r_2) + r_3$$
$$= a_{0,3} a_{0,2}\, a_{0,1} a_{0,0}\, y_0 - a_{0,3} a_{0,2} a_{0,1} r_0 + a_{0,3} a_{0,2} r_1 - a_{0,3} r_2 + r_3$$

u.s.w.

Auch hier lässt sich bei genauerem Hinsehen ein Bildungsgesetz erkennen, das aber schwieriger zu formulieren ist.
Wir verwenden (analog zur Schreibweise für Summen) für Produkte folgende Abkürzung: $b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k = \prod_{j=0}^{k} b_k$

Damit lässt sich y_t angeben durch

$$y_t = \left(\prod_{j=0}^{t-1}(-a_{0,j})\right) y_0 + \left(\prod_{j=1}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_0 + \left(\prod_{j=2}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_1$$
$$+ \ldots + \left(\prod_{j=t-1}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_{t-2} + r_{t-1}$$
$$= \left(\prod_{j=0}^{t-1}(-a_{0,j})\right) y_0 + \sum_{i=0}^{t-2}\left(\prod_{j=i+1}^{t-1}(-a_{0,j})\right) r_i + r_{t-1}$$

Beispiel 2.2.5: $\quad y_{t+1} - (t+1)\, y_t = t$

Mit $-a_{0,j} = j+1$ ergibt sich zunächst

$$\prod_{j=0}^{t-1}(-a_{0,j}) = \prod_{j=0}^{t-1}(j+1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot t = t!$$
$$\prod_{j=i+1}^{t-1}(-a_{0,j}) = \prod_{j=i+1}^{t-1}(j+1) = (i+2)\cdot(i+3)\cdot \ldots \cdot t = \frac{t!}{(i+1)!}$$

Setzt man dies in die obige allgemeine Formel ein, so erhält man mit $r_i = i$

$$y_t = t! \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-2} \frac{t!}{(i+1)!} \cdot i + \underbrace{(t-1)}_{= \frac{t!}{t!} \cdot (t-1)}$$

$$= t! \left\{ y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \frac{i}{(i+1)!} \right\}$$

Im folgenden Abschnitt werden wir nun exemplarisch Anwendungsmöglichkeiten für lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung behandeln.

Beispiele für ökonomische Anwendungen

Beispiel 2.2.5: Der Schweinezyklus – ein Spinnennetzmodell

Die Kosten für die Aufzucht von q Schweinen sei gegeben durch

$$K(q) = \alpha q + \beta q^2, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Wir nehmen an, dass es N gleiche Schweinezuchtbetriebe gibt.

Die Nachfrage nach Schweinen sei in Abhängigkeit vom Preis p pro Schwein durch

$$D(p) = \gamma - \delta p, \quad \gamma, \delta > 0$$

gegeben. Wir nehmen an, dass jeder Züchter seinen Gewinn

$$G(q) = p \cdot q - K(q) = pq - \alpha q - \beta q^2$$

bei gegebenem Preis p maximieren möchte.

Es gilt: $G'(q) = p - \alpha - 2\beta q$, $G''(q) = -2\beta$

$$G'(q) = 0 \iff q = \frac{p-\alpha}{2\beta}$$

$G''\left(\frac{p-\alpha}{2\beta}\right) = -2\beta < 0$, da β nach Voraussetzung positiv ist.

Unter der Voraussetzung $p > \alpha$ wird also der Gewinn maximal für

$$q = \frac{p-\alpha}{2\beta}.$$

Die Gesamtmenge der von den N Züchtern angebotenen Schweine zum Preis p pro Schwein ist durch die Angebotsfunktion

$$S(p) = N \cdot \frac{p-\alpha}{2\beta}, \quad p > \alpha,$$

gegeben.

Das Modell geht nun von folgenden weiteren Annahmen aus:

Jeder Schweinezüchter orientiert sich am Preis p_t, der in der t-ten Zeitperiode pro Schwein bezahlt wird, um die Zahl der Schweine für die Aufzucht in der folgenden Zeitperiode festzulegen, d.h.

$$S(p_t) = N \cdot \frac{p_t - \alpha}{2\beta}.$$

Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage in allen Zeitperioden bedeutet

$$S(p_t) = D(p_{t+1}), \text{ d.h. } N \cdot \frac{p_t - \alpha}{2\beta} = \gamma - \delta p_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

bzw. äquivalent dazu

$$p_{t+1} + \frac{N}{2\beta\delta} p_t = \frac{N\alpha + 2\beta\gamma}{2\beta\delta}.$$

Mit der allgemeinen Lösungsformel auf S. 3 erhalten wir mit

$$a_0 = \frac{N}{2\beta\delta}, \quad r = \frac{N\alpha + 2\beta\gamma}{2\beta\delta}:$$

$$p_t = \left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t p_0 + \frac{1-\left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t}{1+\frac{N}{2\beta\delta}} \cdot \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{2\beta\delta}$$

$$= \left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t p_0 + \left(1-\left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t\right) \cdot \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{N+2\beta\delta}$$

Der Gleichgewichtspreis ist $p^* = \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{2\beta\delta} \cdot \frac{1}{1+\frac{N}{2\beta\delta}} = \frac{N\alpha+2\beta\gamma}{N+2\beta\delta}$.

Damit lässt sich p_t ausdrücken durch

$$p_t = p^* + \left(-\frac{N}{2\beta\delta}\right)^t (p_0 - p^*)$$

Die Differenzengleichung ist global asymptotisch stabil, wenn

$$\left|-\frac{N}{2\beta\delta}\right| = \frac{N}{2\beta\delta} < 1, \text{ d.h. } N < 2\beta\delta$$

gilt. In diesem Fall gilt $\lim_{t\to\infty} p_t = p^*$.

Eine Grafik, die die Gesamtsituation noch einmal verdeutlicht und eine Erklärung für den Begriff "Spinnennetzmodell" liefert findet man z.B. in K. Sydsaeter, P. Hammond, A. Seierstad, A. Strøm: Further Mathematics for Economic Analysis, S. 397.

Beispiel 2.2.6: Das Anlagevermögen auf einem Konto am Ende der Periode t betrage w_t. Mit c_t bezeichnen wir die Abhebungen vom und mit y_t die Einzahlungen auf das Konto während der Periode t. Das Vermögen wird jeweils am Ende einer Zeitperiode konstant mit $i = p\%$ verzinst. Damit ergibt sich die Differenzengleichung

$$w_{t+1} = \underbrace{(1+i)}_{=-a_0} w_t + \underbrace{y_{t+1} - c_{t+1}}_{=r_t}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

mit der Lösung

$$w_t = (1+i)^t w_0 + \sum_{k=1}^{t} (1+i)^{t-k} (y_k - c_k)$$

Bezeichnen wir mit $D_t = (1+i)^{-t}$ den Diskontierungsfaktor, so erhalten wir daraus den Barwert (PDV - present discounted value) $D_t w_t = w_0 + \sum_{k=1}^{t} D_k (y_k - c_k)$.

Beispiel 2.2.7: Mit den Bezeichnungen wie in Beispiel 2.2.6 betrachten wir nun den Fall, dass der Zins, der auf w_t gezahlt wird, variabel ist, d.h. $i_t = p_t\,\%$.

Die zugehörige Differenzengleichung lautet dann

$$w_{t+1} = \underbrace{(1+i_t)}_{=-a_{0,t}} w_t + \underbrace{y_{t+1} - c_{t+1}}_{=r_t}, \quad t = 0, 1, \ldots$$

mit der Lösung

$$w_t = \left(\prod_{j=0}^{t-1}(1+i_j)\right) w_0 + \sum_{k=0}^{t-2}\left(\prod_{j=k+1}^{t-1}(1+i_j)\right)(y_{k+1} - c_{k+1}) + (y_t - c_t)$$

Mit dem Diskontierungsfaktor $D_t = \prod_{j=0}^{t-1}(1+i_j)^{-1}$ erhält man daraus wieder den Barwert

$$D_t w_t = w_0 + \sum_{k=0}^{t-1} D_{k+1}(y_{k+1} - c_{k+1}) = w_0 + \sum_{\ell=1}^{t} D_\ell (y_\ell - c_\ell),$$

da $D_t \cdot \prod_{j=k+1}^{t-1}(1+i_j) = \dfrac{\cancel{(1+i_{k+1})}\cancel{(1+i_{k+2})}\cdot\ldots\cdot\cancel{(1+i_{t-1})}}{(1+i_0)\cdot\ldots\cdot(1+i_k)\cancel{(1+i_{k+1})}\cdot\ldots\cdot\cancel{(1+i_{t-1})}} = D_{k+1}$.

II.3 lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten

$$y_{t+2} + a_{1,t}\, y_{t+1} + a_{0,t}\, y_t = r_t \quad \text{mit} \quad (a_{0,t})_{t\in\mathbb{N}_0} \neq (0)_{t\in\mathbb{N}_0}.$$

Ist $r_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$, so heißt die Gleichung homogen, sonst inhomogen.
Ähnlich wie bei den Differentialgleichungen lassen sich allgemeine Aussagen zur Lösungsstruktur angeben. Dazu müssen wir zunächst den Begriff der linearen Unabhängigkeit für die hier passende Situation angeben.

Definition 2.3.1: n Folgen $(u_{1,t})_{t\in\mathbb{N}_0}, \ldots, (u_{n,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha_1 u_{1,t} + \alpha_2 u_{2,t} + \ldots + \alpha_n u_{n,t} = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{N}_0$$

nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ besitzt.

Handelt es sich bei den Folgen um Lösungen einer linearen Differenzengleichung, so lässt sich ein handliches Kriterium für die lineare Unabhängigkeit angeben. Wir formulieren das Kriterium zunächst nur für den Fall $n=2$ und geben den allgemeinen Satz für beliebiges n im nächsten Abschnitt an.

Satz 2.3.2: Zwei Folgen $(u_{1,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, $(u_{2,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, die Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung $y_{t+2}+a_{1,t}y_{t+1}+a_{0,t}y_t=0$ sind, sind genau dann linear unabhängig, wenn $\begin{vmatrix} u_{1,0} & u_{2,0} \\ u_{1,1} & u_{2,1}\end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Über die Lösungsstruktur kann man folgende Aussagen festhalten.

Satz 2.3.3: Sind $(u_{1,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$, $(u_{2,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$ zwei linear unabhängige Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung

$$y_{t+2}+a_{1,t}y_{t+1}+a_{0,t}y_t=0,$$

dann ist $y_{h,t}=C_1u_{1,t}+C_2u_{2,t}$ die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung.

Ist darüber hinaus $(y_{p,t})_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $y_{t+2}+a_{1,t}y_{t+1}+a_{0,t}y_t=r_t$, so ist

$$y_t=y_{h,t}+y_{p,t}=C_1u_{1,t}+C_2u_{2,t}+y_{p,t}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Hat man y_0, y_1 vorgegeben, so lassen sich die Konstanten C_1, C_2 eindeutig bestimmen.

Wie auch bei den Differentialgleichungen gibt es keine allgemein anwendbare Methode zur Bestimmung der beiden linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung. Hat man diese bestimmt, so kann man allerdings immer die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung angeben als:

$$y_t=C_1u_{1,t}+C_2u_{2,t}-u_{1,t}\sum_{k=1}^{t}\frac{r_{k-1}u_{2,k}}{U_k}+u_{2,t}\sum_{k=1}^{t}\frac{r_{k-1}u_{1,k}}{U_k}$$

mit $U_t=u_{1,t}u_{2,t+1}-u_{1,t+1}u_{2,t}$. Im Folgenden wenden wir uns dem Spezialfall konstanter Koeffizienten zu.

Lineare Differenzengleichungen 2ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir behandeln $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ konstant, $a_0 \neq 0$.

Wir benötigen zunächst zwei linear unabhängigen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$.

Ansatz: $u_t = \lambda^t$ mit $\lambda \neq 0$, d.h. $u_{t+1} = \lambda^{t+1}$, $u_{t+2} = \lambda^{t+2}$

Einsetzen in die homogene Differenzengleichung liefert:

$$\lambda^{t+2} + a_1 \lambda^{t+1} + a_0 \lambda^t = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda^t (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0$$

Für $\lambda \neq 0$ erhalten wir somit die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$.

1.Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 > a_0$.

Dann sind $u_{1,t} = \lambda_1^t$, $u_{2,t} = \lambda_2^t$ linear unabhängige Lösungen und

$$y_{h,t} = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung.

2.Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ hat eine (doppelte) reelle Lösung $\lambda = -\frac{a_1}{2}$, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 = 0$.

Dann ist $u_{1,t} = \lambda^t = \left(-\frac{a_1}{2}\right)^t$ Lösung der homogenen Differenzengleichung.

Wir zeigen, dass $u_{2,t} = t \cdot \lambda^t$ in diesem Fall ebenfalls (linear unabhängige) Lösung ist.

Einsetzen von $u_{2,t} = t \cdot \lambda^t$, $u_{2,t+1} = (t+1)\lambda^{t+1}$, $u_{2,t+2} = (t+2)\lambda^{t+2}$ in die homogene Differenzengleichung liefert:

$$(t+2)\lambda^{t+2} + a_1 (t+1) \lambda^{t+1} + a_0 t \lambda^t$$

$$= t\lambda^t \underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)}_{\substack{=0 \\ \text{(charakt. Gleichg.)}}} + \lambda^{t+1} \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{= 2 \cdot \left(-\frac{a_1}{2}\right) + a_1 = 0} = 0$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_{h,t} = C_1 \lambda^t + C_2 t \lambda^t = (C_1 + C_2 t) \cdot \left(-\frac{a_1}{2}\right)^t$$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ hat keine reelle Lösung, d.h. $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_0<0 \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{2}\right)^2<a_0$.
Man kann zeigen, dass die linear unabhängigen Lösungen in diesem Fall durch $u_{1,t}=(\sqrt{a_0})^t\cos(\theta t)$, $u_{2,t}=(\sqrt{a_0})^t\sin(\theta t)$
mit $\cos\theta=-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}$. Wegen $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2<a_0$ gilt $\left|\frac{a_1}{2}\right|<\sqrt{a_0}$, d.h.
$-1<-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}<1$. Somit ist $\theta=\arccos\left(-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}\right)\in(0,\pi)$, wobei arccos die Umkehrfunktion von cos bezeichnet. Die Lösungen lassen sich durch Einsetzen in die Differenzengleichung bestätigen. Wir verzichten hier darauf, man benötigt dafür Additionstheoreme für sin und cos.

Beispiel 2.3.4: $y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=3$$

linear unabhängige Lösungen: $u_{1,t}=2^t$, $u_{2,t}=3^t$.

Allgemeine Lösung: $y_{h,t}=C_1\cdot 2^t+C_2\cdot 3^t$

Beispiel 2.3.5: $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-6\lambda+9=0$

$$\Leftrightarrow (\lambda-3)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=3$$

linear unabhängige Lösungen: $u_{1,t}=3^t$, $u_{2,t}=t\cdot 3^t$

Allgemeine Lösung: $y_{h,t}=(C_1+C_2t)\cdot 3^t$

Beispiel 2.3.6: $y_{t+2}-y_{t+1}+y_t=0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2-\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}$

keine reelle Lösung

linear unabhängige Lösungen: $\sqrt{a_0}=1$, d.h. $(\sqrt{a_0})^t=1$

$\theta=-\frac{a_1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_0}}=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{1}{3}\pi$

Also: $u_{1,t} = \cos(\frac{1}{3}\pi t)$, $u_{2,t} = \sin(\frac{1}{3}\pi t)$

Allgemeine Lösung: $y_{h,t} = C_1 \cos(\frac{1}{3}\pi t) + C_2 \sin(\frac{1}{3}\pi t)$

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$ kann man prinzipiell die Formel auf S. 10 unten verwenden. Dies ist aber häufig mit sehr hohem Aufwand verbunden. Man kann hier ähnlich wie bei den Differentialgleichungen je nach Struktur von r_t spezielle Ansätze machen. Dabei ist wieder darauf zu achten, ob r_t bereits Lösung der homogenen Gleichung ist. Wir behandeln die Fragestellung an einigen Beispielen.

Beispiel 2.3.7: $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 4$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y_{h,t} = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t$

Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$u_{p,t} = A$

Einsetzen in die Differenzengleichung:

$$A - 5A + 6A = 4 \iff A = 2$$

Also: $u_{p,t} = 2$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_t = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t + 2$$

Beispiel 2.3.7: $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 8$

Lösen der homogenen Gleichung: $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 0$

Charakterische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$$\iff \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y_{h,t} = C_1(-3)^t + C_2$

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

Da jede konstante Folge bereits Lösung der homogenen Gleichung ist, muss der Ansatz modifiziert werden.

Wir probieren den Ansatz: $u_{p,t} = A \cdot t$, d.h. $u_{p,t+2} = A \cdot (t+2)$, $u_{p,t+1} = A(t+1)$.
Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$A \cdot (t+2) + 2A(t+1) - 3At = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 4A = 8 \Leftrightarrow A = 2$$

Somit ist $u_{p,t} = 2 \cdot t$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist $y_t = C_1(-3)^t + C_2 + 2t$.

Beispiel 2.3.8: $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 10$

Lösen der homogenen Gleichung: $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$
Charakterische Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$
doppelte Nullstelle $\lambda = 1$.

Allgemeine lösung der homogenen Gleichung: $y_{h,t} = C_1 \cdot 1^t + C_2 \cdot t \cdot 1^t = C_1 + C_2 t$.
Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.
Da jede konstante Folge und jede Folge der Form $A \cdot t$ bereits Lösung der homogenen Gleichung ist, muss der Ansatz weiter modifiziert werden.
Wir probieren den Ansatz: $u_{p,t} = A \cdot t^2$, d.h. $u_{p,t+2} = A \cdot (t+2)^2$, $u_{p,t+1} = A(t+1)^2$.
Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$A \cdot (t+2)^2 - 2A(t+1)^2 + At^2 = 10 \Leftrightarrow A(t^2+4t+4) - 2A(t^2+2t+1) + At^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow t^2(A - 2A + A) + t(4A - 4A) + 4A - 2A = 10 \Leftrightarrow 2A = 10 \Leftrightarrow A = 5$$

Somit ist $u_{p,t} = 5t^2$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ist $y_t = C_1 + C_2 t + 5t^2$.

Die obigen Beispiele zeigen ganz gut, wie der "eigentliche" Ansatz zu modifizieren ist, wenn r_t bereits Lösung der homogenen Gleichung ist. Wir betrachten nun noch ein Beispiel, in dem sich r_t aus verschiedenen Termen zusammensetzt und zusätzlich Anfangswerte für y_0, y_1 vorgegeben sind.

Beispiel 2.3.9: $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 4^t + t^2 + 3$, $y_0 = \frac{5}{2}$, $y_1 = -5$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hatten wir bereits bestimmt zu: $y_{h,t} = C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot 3^t$.

Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz: $u_{p,t} = A\cdot 4^t + B_2 t^2 + B_1 t + B_0$, d.h.

$$u_{p,t+2} = A\cdot 4^{t+2} + B_2(t+2)^2 + B_1(t+2) + B_0, \quad u_{p,t+1} = A\cdot 4^{t+1} + B_2(t+1)^2 + B_1(t+1) + B_0$$

Einsetzen in die Differenzengleichung liefert:

$$A\cdot 4^{t+2} + B_2(t+2)^2 + B_1(t+2) + B_0 - 5\cdot A\cdot 4^{t+1} - 5B_2(t+1)^2 - 5B_1(t+1) - 5B_0$$
$$+ 6A\cdot 4^t + 6B_2 t^2 + 6B_1 t + 6B_0 = 4^t + t^2 + 3$$
$$\Longleftrightarrow 2A\cdot 4^t + 2B_2 t^2 + 2(B_1 - 3B_2)t + 2B_0 - 3B_1 - B_2 = 4^t + t^2 + 3$$

Koeffizientenvergleich: $2A = 1$, $2B_2 = 1$, $2(B_1 - 3B_2) = 0$, $2B_0 - 3B_1 - B_2 = 3$

Lösung: $A = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{2}$, $B_1 = \frac{3}{2}$, $B_0 = 4$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_t = C_1\cdot 2^t + C_2\cdot 3^t + \frac{1}{2}\cdot 4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$$

Startbedingungen:

$$y_0 = \frac{5}{2} \Longleftrightarrow C_1 + C_2 + \frac{9}{2} = \frac{5}{2} \Longleftrightarrow C_1 + C_2 = -2$$
$$y_1 = -5 \Longleftrightarrow 2C_1 + 3C_2 + 8 = -5 \Longleftrightarrow 2C_1 + 3C_2 = -13$$

Lösung: $C_1 = 7$, $C_2 = -9$

Somit erfüllt $y_t = 7\cdot 2^t - 9\cdot 3^t + \frac{1}{2}\cdot 4^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$ die Differenzengleichung mit den vorgegebenen Startbedingungen.

Bemerkungen zur Stabilität linearer Differenzengleichungen

Ähnlich wie bei linearen DGL nennen wir eine lineare Differenzengleichung global asymptotisch stabil, wenn die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung gegen Null strebt für $t \to \infty$.

Ist $y_{h,t} = C_1 u_{1,t} + C_2 u_{2,t}$ die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung $y_{t+2} + a_{1,t} y_{t+1} + a_{0,t} y_t = 0$, so ist die Gleichung

$y_{t+2} + a_{1,t} y_{t+1} + a_{0,t} y_t = r_t$ global asymptotisch stabil

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} u_{1,t} = 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} u_{2,t} = 0$.

Wir diskutieren wieder allgemein die drei verschiedenen Fälle, die bei linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten auftreten. Im Folgenden betrachten wir also

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t .$$

Die zugeordnete homogene Gleichung ist $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$ mit der charakteristischen Gleichung: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

1. Fall: Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$, $\lambda_2 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$.
   Dann ist $u_{1,t} = \lambda_1^t$, $u_{2,t} = \lambda_2^t$ und somit:
   $\lim_{t\to\infty} \lambda_1^t = 0$ und $\lim_{t\to\infty} \lambda_2^t = 0 \iff |\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| < 1$

2. Fall: Die charakterische Gleichung hat eine (doppelte) reelle Lösung $\lambda = -\frac{a_1}{2}$. Dann ist $u_{1,t} = \lambda^t$ und $u_{2,t} = t\cdot\lambda^t$ und somit:
   $\lim_{t\to\infty} \lambda^t = 0$ und $\lim_{t\to\infty} t\cdot\lambda^t = 0 \iff |\lambda| < 1$

3. Fall: Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Nullstelle.
   Dann ist $u_{1,t} = (\sqrt{a_0})^t \cos(\theta t)$, $u_{2,t} = (\sqrt{a_0})^t \sin(\theta t)$ und somit
   $\lim_{t\to\infty} (\sqrt{a_0})^t \cos(\theta t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} (\sqrt{a_0})^t \sin(\theta t) = 0 \iff \sqrt{a_0} < 1 \iff a_0 < 1$.

Auch hier gibt es ein handliches Kriterium, das allein auf Eigenschaften der Koeffizienten a_1, a_0 beruht. Solche Kriterien sind insbesondere für Differenzengleichungen höherer Ordnung wichtig, wenn das Stabilitätsverhalten untersucht werden soll, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

Satz 2.3.10: Die Differenzengleichung $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$ ist genau dann global asymptotisch stabil, wenn $|a_1| < 1 + a_0$ und $a_0 < 1$.

Beispiel 2.3.11: $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + 0.9\, y_t = r_t$ global asymptotisch stabil
$\iff |a_1| < 1.9 \iff a_1 \in (-1.9, 1.9)$

Beispiel 2.3.12: $y_{t+2} + 2y_{t+1} + a_0 y_t = r_t$ ist für keinen Wert von a_0 asymptotisch stabil, da $|2| < 1 + a_0$ und $a_0 < 1$ für kein a_0 erfüllbar ist.

II.4 Bemerkungen zu linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung

Ähnlich wie bei linearen DGl lassen sich die Betrachtungen, die wir für lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung angestellt haben, auf lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung übertragen.
Dies betrifft insbesondere die Struktur der Lösungen, die Vorgehensweise zur Ermittlung von Lösungen im Fall konstanter Koeffizienten und die Überlegungen zur Stabilität.
Im Rahmen dieser Veranstaltung gehen wir darauf nicht näher ein und verweisen auf:

Knut Sydsaeter, Peter Hammond, Atle Seierstad, Arne Strøm:
Further Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2008, S. 410 ff.