Grundzüge der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

6. Übung

Wintersemester 2014/15

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften, Arbeitsgruppe Optimierung & Approximation
Prof. Dr. M. Heilmann, T. Schnepper M.Sc., M. Milano M.Sc.

Besprechung der Aufgaben: In den Übungen vom 24. bis 28. November 2014

Aufgabe 6.1
Gegeben seien vier Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ -3t \\ -3 \\ 2t \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ -26 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Existieren Werte für t, sodass alle vier Vektoren jeweils orthogonal zueinander sind? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 6.2

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A zu $q(x)$, sodass $q(x) = x^T Ax$ ist. Untersuchen Sie die Matrix A auf ihre Definitheit.

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2$$

b) Untersuchen Sie, ob die folgende Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}^3$ ohne den Nullvektor erfüllt ist.

$$5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 > 0$$

Aufgabe 6.3
Überprüfen Sie die Definitheitseigenschaften der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.4

a) Für welche Wahl des Parameters $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix positiv bzw. negativ definit?

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie auch einen Parameter $a \in \mathbb{R}$ an, für den die Matrix B_a indefinit ist.

b) Welche Definitheit hat eine Matrix, bei der einer der führenden Hauptminoren gerader Ordnung echt negativ ist?

Aufgabe 6.5
Ordnen Sie die Funktionen $g_1(x) = -x^2 - 2x$, $g_2(x) = 2^x$ und $g_3(x) = 4x$ den passenden Zeilen zu:

x	0	1	2
$g_?$	0	4	8
$g_?$	0	-3	-8
$g_?$	1	2	4

Zusatzaufgaben :

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bilden die vier Vektoren aus Aufgabe 6.1 eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

b) Zeigen Sie, dass die folgende Matrix positiv definit ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Allgemeine Informationen zur Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler finden Sie im Internet unter: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/wiwi/grundzuege/mathe15.html