9. Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

Änderungsraten, Ableitungen, Monotonie

Einführendes Beispiel: Wir erinnern uns zunächst an ein Beispiel aus Kapitel 6, in dem es um ein Modell zur Beschreibung der Kosten $b(p)$ zur Beseitigung von p% der Verunreinigungen in einem See ging.

$$b(p) = \frac{10p}{105-p}$$

Einige Werte:

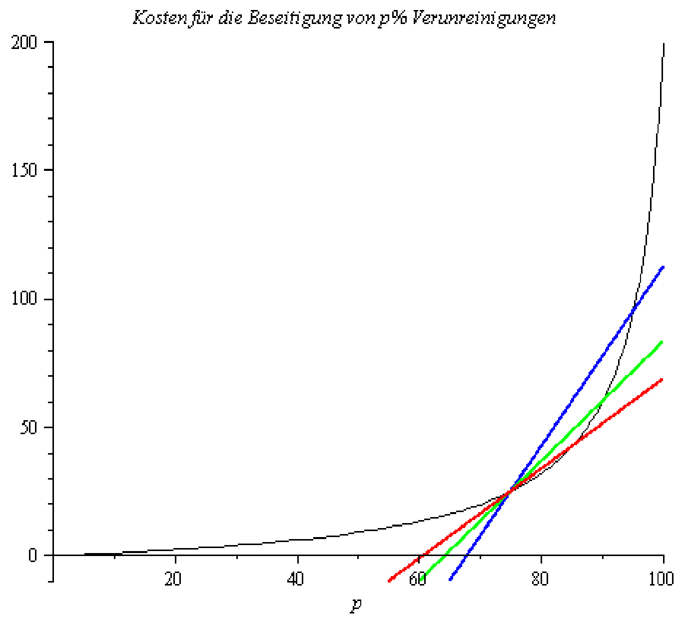
p	75	85	90	95
$b(p)$	25	42.5	60	95

Werden statt 75% der Verunreinigungen 95%, 90% bzw. 85% beseitigt, so entstehen Mehrkosten von

$$b(95)-b(75)=70\,;\; b(90)-b(75)=35\,;\; b(85)-b(75)=17.5$$

Der durchschnittliche Zuwachs an Kosten – die durchschnittliche Änderungsrate – bei Beseitigung von 95%, 90% bzw. 85% statt 75% beträgt:

$$\frac{b(95)-b(75)}{95-75}=\frac{7}{2} \qquad \frac{b(90)-b(75)}{90-75}=\frac{7}{3} \qquad \frac{b(85)-b(75)}{85-75}=\frac{7}{4}$$



Geometrisch sind dies die Steigungen der Sekanten durch die Punkte

$P_0(75,25)$ und $P_{20}(95,95)$

$P_0(75,25)$ und $P_{15}(90,60)$

$P_0(75,25)$ und $P_{10}(85,42.5)$

Allgemeiner gilt: $b(75+h) = \dfrac{10(75+h)}{105-(75+h)} = \dfrac{750+10h}{30-h}$

Die durchschnittliche Änderungsrate für die Beseitigung von $(75+h)$% statt 75% der Verunreinigungen, d.h. die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_0(75,25)$ und $P_h\left(75+h, \dfrac{750+10h}{30-h}\right)$, $h \neq 0$, beträgt

$$\frac{b(75+h)-b(75)}{(75+h)-75} = \frac{\frac{750+10h}{30-h}-25}{h} = \frac{35h}{(30-h)h} = \frac{35}{30-h}$$

Wir interessieren uns nun dafür, was passiert, wenn wir P_h immer dichter an P_0 wählen, d.h. $|h|$ immer kleiner werden lassen oder anders ausgedrückt, den Grenzwert für h gegen Null betrachten.

$$\lim_{h\to 0} \frac{b(75+h)-b(75)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{35}{30-h} = \frac{7}{6}$$

Dies ist die momentane Änderungsrate der Kosten an der Stelle $p=75$. Geometrisch handelt es sich um die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle $p=75$.

Wir betrachten nun einen beliebigen festen Wert $p \in (0,100)$. Die durchschnittliche Änderungsrate der Kosten bei Beseitigung von $(p+h)\%$ statt $p\%$ der Verunreinigungen beträgt:

$$\frac{b(p+h)-b(p)}{(p+h)-p} = \frac{\frac{10(p+h)}{105-(p+h)} - \frac{10p}{105-p}}{h}$$

$$= \frac{10(p+h)(105-p) - 10p(105-p-h)}{h(105-p-h)(105-p)}$$

$$= \frac{1050\cancel{h}}{\cancel{h}(105-p-h)(105-p)} = \frac{1050}{(105-p-h)(105-p)}$$

Geometrisch ist dies die Steigung der Sekanten durch $P_0(p, b(p))$ und $P_h(p+h, b(p+h))$.

Die momentane Änderungsrate bei den Kosten an der Stelle p, d.h. die Steigung der Tangenten an den Graphen von $b(p)$ an der Stelle p ist:

$$\lim_{h\to 0} \frac{b(p+h)-b(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1050}{(105-p-h)(105-p)} = \frac{1050}{(105-p)^2}$$

Diesem Beispiel liegt folgendes allgemeine Konzept zugrunde.

Definition: Sei $f: \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ und $x_0 \in \mathbb{D}_f$. Existiert der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$
so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar.

Der Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt 1. Ableitung von f an der Stelle x_0.

Ist I ein Intervall, so heißt f differenzierbar auf I, wenn f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist. Im Falle abgeschlossener Intervalle sind an den Randpunkten die entsprechenden einseitigen Grenzwerte gemeint.

Häufig verwendet man statt $f'(x)$ auch die Notationen $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$.

Verschiedene Bezeichnungen und Sprechweisen:

Differenzenquotient: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall zwischen x und $x+h$
- Steigung der Sekanten durch $P_0(x, f(x))$ und $P_h(x+h, f(x+h))$

Differentialquotient: $\frac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{h}$

- momentane Änderungsrate von f an der Stelle x
- Steigung der Tangenten an der Stelle x

In ökonomischen Anwendungen findet man häufig folgende Bezeichnungen für die 1. Ableitung: Grenzkosten, Grenzertrag, Grenzgewinn, Grenzneigung zum Konsum, Grenzproduktivität, etc.; allgemein Grenz- oder Marginalfunktion.

In Kapitel 6 haben wir definiert, wann eine Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist. Bei differenzierbaren Funktionen können wir das Monotonieverhalten einfacher mittels der 1. Ableitung untersuchen. Aus der geometrischen Interpretation ist unmittelbar der Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten und dem Vorzeichen der 1. Ableitung ersichtlich. Genauer gilt:

Satz: Sei I ein Intervall und f auf I differenzierbar. Dann gilt:

1) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \iff f$ monoton wachsend auf I
2) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \iff f$ monoton fallend auf I
3) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \implies f$ streng monoton wachsend auf I
4) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \implies f$ streng monoton fallend auf I

Wir erinnern uns an dieser Stelle noch einmal daran, dass die strenge Monotonie einer Funktion hinreichend für die Existenz einer Umkehrfunktion ist.

Bevor wir uns die Begriffe an weiteren Beispielen klarmachen können, müssen wir zunächst wissen, was die Ableitungen unserer Grundfunktionen sind und wie man die Ableitungen verknüpfter Funktionen berechnet.

Beispiel: 1) Ist $f(x) = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so ist die Steigung des Graphen an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gleich 0, also ist $f'(x) = 0$.

2) Ist $f(x) = ax + b$, so ist die Steigung des Graphen an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gleich a, also ist $f'(x) = a$.

3) Sei $f(x) = x^2$. Dann gilt für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = 2x + h$$

Somit folgt: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$,

d.h. $f'(x) = 2x$.

4) Sei $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt für $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Somit folgt: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\lim\limits_{h \to 0} (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

d.h. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$.

Nun ist es zum Glück nicht so, dass wir ständig Ableitungen über Grenzwerte ermitteln müssen. Das haben findige Mathematiker schon längst erledigt und wir können die Ergebnisse verwenden.

Ableitungen der Potenz- und Wurzelfunktionen

Sei $f(x) = x^a$. Dann gilt:

$$f'(x) = ax^{a-1} \text{ für alle } \begin{cases} x \in D_f, \text{ falls } a \geq 1 \\ x \in D_f \setminus \{0\}, \text{ falls } (a < 1 \wedge a \neq 0) \end{cases}$$

Beispiel:

$$f_1(x) = x^5 \implies f_1'(x) = 5x^4$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \implies f_2'(x) = -2x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x^7} = x^{7/3} \implies f_3'(x) = \frac{7}{3}x^{4/3} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt[3]{x^4}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} = x^{-9/5} \implies f_4'(x) = -\frac{9}{5}x^{-14/5} = -\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^{14}}}$$

Ableitungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion

Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $f(x) = \ln x$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Um nun verknüpfte und kompliziertere Funktionen differenzieren zu können, benötigen wir Regeln dafür, wie Summen, Produkte, Quotienten und Verkettungen von Funktionen abgeleitet werden.

Wir stellen diese Regeln zusammen und zeigen exemplarisch, wie sich auch diese allgemeinen Regeln aus der Definition des Differentialquotienten herleiten lassen.

Ableitungsregeln unter der Voraussetzung, dass die auftretenden Ableitungen existieren:

Konstante Faktoren bleiben bei der Differentiation erhalten.

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$$

Summenregel: Die Ableitung einer Summe (Differenz) von Funktionen ist die Summe (Differenz) der Ableitungen.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$$

Produktregel:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

1) $f_1(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^{1/3} + x^{-3}$

$f_1'(x) = 3 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} + (-3) \cdot x^{-4} = 6x - \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x^4}$

2) $f_2(x) = x^3 \cdot \ln x$; $u(x) = x^3$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

$f_2'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1)$

3) $f_3(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2}$; $u(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $u'(x) = 4x - 5$

$v(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$, $v'(x) = 3x^2 + x$

$$f_3'(x) = \frac{(4x-5)(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2) - (2x^2 - 5x + 1)(3x^2 + x)}{(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-2x^4 + 10x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 10}{(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2)^2}$$

4) $f_4(x) = \dfrac{(0.5x^2+3)\cdot e^x}{x^2\cdot \ln x}$

Ableitung des Zählers $u(x) = (0.5x^2+3)\cdot e^x$ mit Produktregel:

$u'(x) = x\cdot e^x + (0.5x^2+3)\cdot e^x = (0.5x^2+x+3)\cdot e^x$

Ableitung des Nenners $v(x) = x^2\cdot \ln x$ mit Produktregel:

$v'(x) = 2x\cdot \ln x + x^2\cdot \frac{1}{x} = x\cdot(2\ln x+1)$

$$f_4'(x) = \frac{(0.5x^2+x+3)e^x\cdot x^2\cdot \ln x - (0.5x^2+3)\cdot e^x\cdot x\cdot(2\ln x+1)}{x^4\cdot(\ln x)^2}$$

$$= \frac{x\cdot e^x\,[(0.5x^2+3)(x\ln x-1) - 6\ln x]}{x^4\cdot(\ln x)^2}$$

Beispiel zur Interpretation der Produktregel

Bei der Förderung aus einer Ölquelle beschreibe $x(t)$ die Förderungsrate in Barel pro Tag zur Zeit t und $p(t)$ den Preis in Dollar pro Barel zur Zeit t. Sowohl die Förderungsrate als auch der Preis ändern sich mit der Zeit. Die Einnahmen in Dollar pro Tag betragen dann

$$R(t) = p(t)\cdot x(t).$$

Nach der Produktregel gilt: $R'(t) = p'(t)\cdot x(t) + p(t)\cdot x'(t)$.

Steigen $p(t)$ und $x(t)$ (z.B. wegen der Inflation und auf Grund von Erweiterungen der Kapazitäten der Fördereinrichtungen), d.h. $p'(t)>0$ und $x'(t)>0$, so wächst $R(t)$, d.h. $R'(t)>0$ aus zwei Gründen.

$R(t)$ wächst, weil der Preis steigt:

Dieses Wachstum $p'(t)\cdot x(t)$ ist proportional zur Fördermenge.

$R(t)$ wächst aber auch, weil die Förderung zunimmt:

Dieses Wachstum $p(t)\cdot x'(t)$ ist proportional zum Preis.

Die Gesamtänderungsrate ist die Summe.

Für die relative Änderungsrate gilt: $\dfrac{R'(t)}{R(t)} = \dfrac{p'(t)x(t)+p(t)x'(t)}{p(t)x(t)} = \dfrac{p'(t)}{p(t)} + \dfrac{x'(t)}{x(t)}$.

Sie ist die Summe der relativen Änderungsraten des Preises und der Fördermenge.

Kettenregel: Die Ableitung einer verketteten Funktion ist das Produkt der "äußeren" und der inneren Ableitung.

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \underbrace{\frac{d}{du} f(u(x))}_{\text{"äußere" Ableitg.}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} u(x)}_{\text{"innere" Ableitg.}} = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Beispiel: 1) $f(x) = (x^3 + 2x + 7)^{50}$ lässt sich als Verkettung von $f(u) = u^{50}$ und $u(x) = x^3 + 2x + 7$ schreiben. Es ist $f'(u) = 50u^{49}$, $u'(x) = 3x^2 + 2$.

Also: $f'(x) = \underbrace{50 \cdot (x^3 + 2x + 7)^{49}}_{\text{"äußere" Ableitg.}} \cdot \underbrace{(3x^2 + 2)}_{\text{"innere" Ableitg.}}$

2) $f(x) = e^{2x^2 - 5}$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u) = e^u$ und $u(x) = 2x^2 - 5$ mit $f'(u) = e^u$, $u'(x) = 4x$. Also: $f'(x) = e^{2x^2-5} \cdot 4x$.

3) $f(x) = \ln(0.3 \cdot x^3 + 2)$ lässt sich schreiben als Verkettung von $f(u) = \ln u$ und $u(x) = 0.3x^3 + 2$ mit $f'(u) = \frac{1}{u}$ und $u'(x) = 0.9x^2$

Also: $f'(x) = \dfrac{1}{0.3x^2 + 2} \cdot 0.9x^2 = \dfrac{0.9x^2}{0.3x^2 + 2}$

Differentiation der allgemeinen Exponential- und Logarithmusfunktion

Wir verwenden, dass die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus zueinander invers sind und formen unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus um.

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

Differentiation mit der Kettenregel liefert:

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = (\ln a) \cdot a^x$$

Dieser "Trick" lässt sich auch bei Funktionen verwenden, bei der die unabhängige Variable in der Basis und im Exponenten auftritt.

Beispiel: $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \tfrac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1)$$

Mit der Rechenregel $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ erhält man für $f(x) = \log_a x$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$.

Beispiel: Wir analysieren die Aufmerksamkeit des Studenten Xaver Fidelius während einer 90 Minuten dauernden "Grundzüge der Mathematik" Vorlesung über Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit, gemessen auf einer Skala von 0 bis 100, wobei der Wert 0 Tiefschlaf und 100 hellwach mit voller Aufmerksamkeit bedeutet. Beobachtungen zufolge lässt sich die Aufmerksamkeit des besagten Studenten gut durch das folgende Modell beschreiben:

$$A(t) = \frac{1}{1080} t^3 - \frac{17}{180} t^2 + \frac{4}{3} t + 60 \quad, t \in [0, 90]$$

Wir untersuchen das Monotonieverhalten mit Hilfe der 1. Ableitung

$$A'(t) = \frac{1}{360} t^2 - \frac{17}{90} t + \frac{4}{3}$$

Dies ist eine quadratische Funktion; der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen von $A'(t)$.

$$A'(t) = 0 \iff \frac{1}{360} t^2 - \frac{17}{90} t + \frac{4}{3} = 0$$

$$\iff t^2 - 68t + 480 = 0$$

$$\iff t = 34 \pm \sqrt{34^2 - 480}$$

$$\iff t = 34 \pm \sqrt{676}$$

$$\iff t = 34 \pm 26$$

$$\iff t = 8 \lor t = 60$$

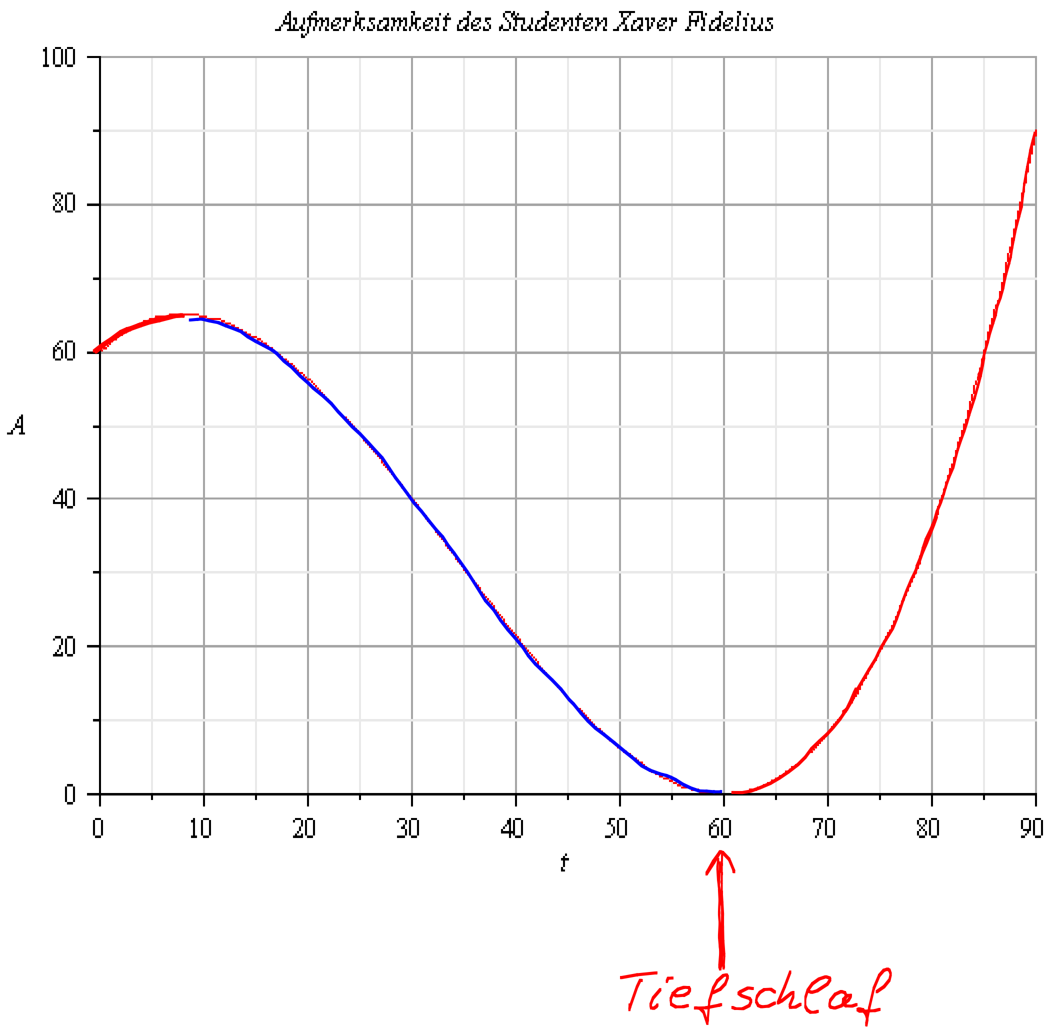
Da der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, können wir mit Hilfe der Nullstellen auf das Vorzeichenverhalten von A' und damit auf das Monotonieverhalten von A schließen.

$A'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in [0,8) \vee t \in (60,90)$

$A'(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (8,60)$

Die Aufmerksamkeit von Xaver Fidelius ist also in den ersten 8 Minuten streng monoton wachsend, zwischen der 8ten und 60ten Minute streng monoton fallend und ab der 60ten Minute wieder streng monoton wachsend.

Für $t=60$ gilt: $A(60)=0$ "Tiefschlaf"



Ableitungen höherer Ordnung, Krümmungsverhalten

Ist die 1. Ableitung f' einer Funktion f wieder differenzierbar, dann können wir die Ableitung von f', also

$(f')'$ bilden. Diese wird mit f'' bezeichnet und heißt 2. Ableitung von f.

Andere übliche Schreibweisen sind

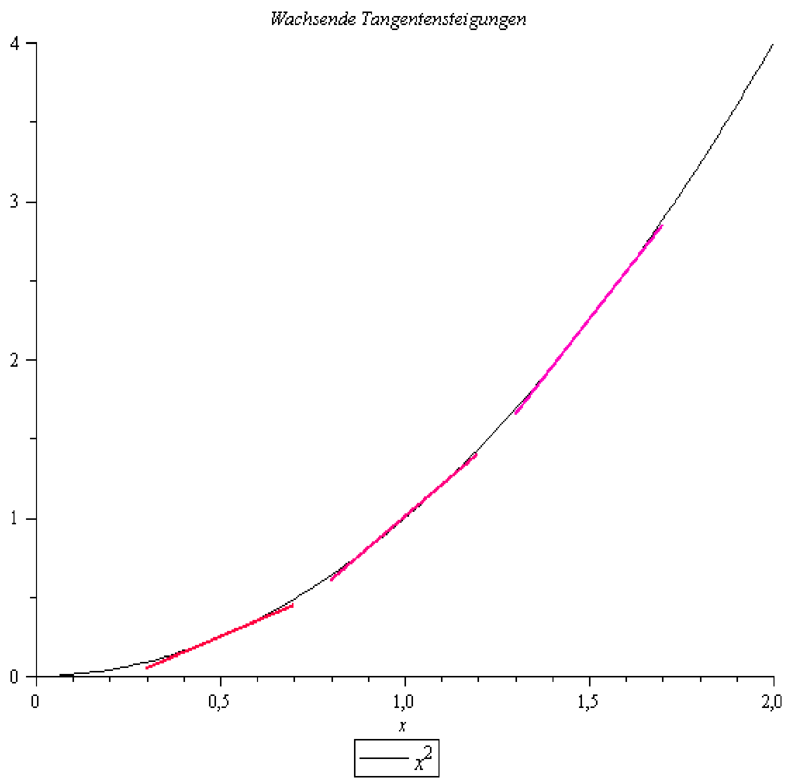
$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Entsprechend kann man nun im Falle der Differenzierbarkeit wieder die Ableitung von f'' bilden und erhält die 3. Ableitung f''' von f u.s.w.

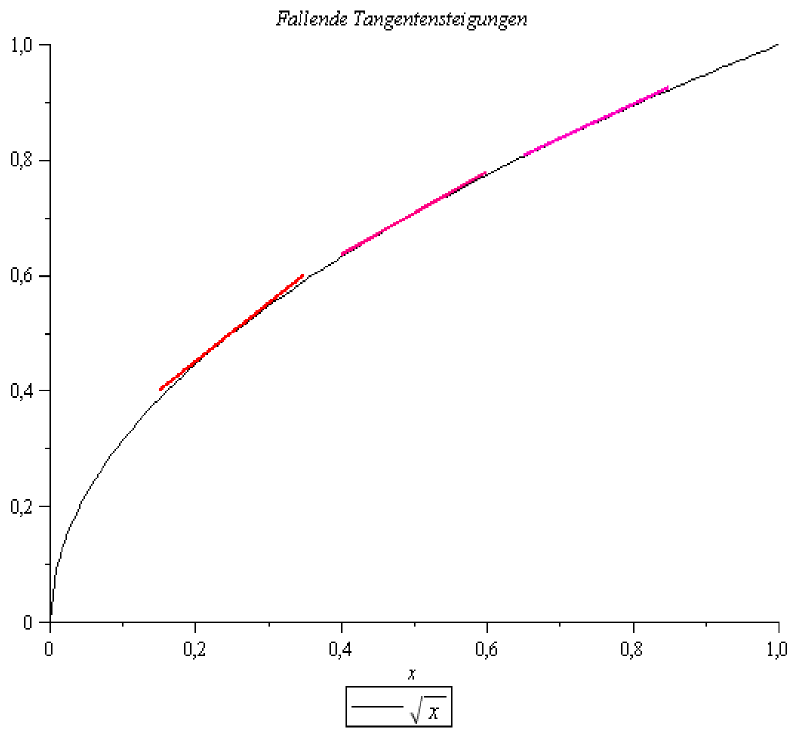
Wir befassen uns nun zunächst genauer mit der 2. Ableitung und erinnern uns daran, wie das Vorzeichen der Ableitung mit dem Vorzeichen zusammenhängt. Wenden wir die Ergebnisse auf f' an, so erhalten wir mit der Bezeichnung I für ein Intervall:

1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f'$ monoton wachsend auf I

2) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \Longleftrightarrow f'$ monoton fallend auf I



Die Steigung der Tangenten ist mit zunehmendem x monoton wachsend, $f''(x) \geq 0$. Der Graph beschreibt eine Linkskurve.



Die Steigung der Tangenten ist mit zunehmendem x monoton fallend, $f''(x) \leq 0$. Der Graph beschreibt eine Rechtskurve.

Dieses Krümmungsverhalten wird nun exakter definiert. Anschließend geben wir an, wie man dies im Falle der zweimaligen Differenzierbarkeit mit Hilfe der zweiten Ableitung untersuchen kann.

Definition: Eine Funktion f heißt konvex auf einem Intervall I, falls jede Strecke, die zwei beliebige Punkte des Graphen verbindet, oberhalb oder auf dem Graphen verläuft, was einer Linkskurve des Graphen entspricht.
Eine Funktion f heißt konkav auf einem Intervall I, falls jede Strecke, die zwei beliebigige Punkte des Graphen verbindet, unterhalb oder auf dem Graphen verläuft, was einer Rechtskurve des Graphen entspricht.

Aus den oben angegebenen geometrischen Überlegungen kann man folgendes einsehen.

Satz: Die Funktion f sei auf einem Intervall I zweimal differenzierbar. Dann gilt:

1) $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist konvex auf I

2) $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I \iff f$ ist konkav auf I

In vielen ökonomischen Modellen ist die Unterscheidung zwischen konvexen und konkaven Funktionen, zusammen mit dem Monotonieverhalten von Bedeutung.

Beispiel: Bei einem Einkommen zwischen 4000 € und 10 000 € sollen die Abgaben

$$s(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^2 - 5 \cdot 10^{-2} x$$ betragen.

Es gilt: $s'(x) = 8 \cdot 10^{-5} x - 5 \cdot 10^{-2}$

$$s'(x) \geq 0 \iff 8 \cdot 10^{-5} x - 5 \cdot 10^{-2} \geq 0$$

$$\iff x \geq \frac{5}{8} \cdot 10^3$$

Also ist $s'(x)$ insbesondere auf $[4000, 10000]$ monoton wachsend.

Weiter ist $s''(x) = 8 \cdot 10^{-5} \geq 0$

Damit ist s monoton wachsend und konvex auf $[4000, 10000]$. In diesem Zusammenhang spricht man auch von progressivem Wachstum.

	$f' \geq 0$ (f wachsend)	$f' \leq 0$ (f fallend)
$f'' \geq 0$ (f konvex)	progressiv wachsend	degressiv fallend
$f'' \leq 0$ (f konkav)	degressiv wachsend	progressiv fallend

Beispiel: Wir untersuchen folgende kubische Kostenfunktion.

$$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 1, \quad x \geq 0.$$

Es gilt $C'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$C''(x) = x - 2$

Weiter ist $C'(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0$

$\iff (x-2)^2 = 0$

$\iff x = 2$

Da der Graph von C' eine nach oben geöffnete Parabel und $x=2$ die einzige Nullstelle ist, gilt

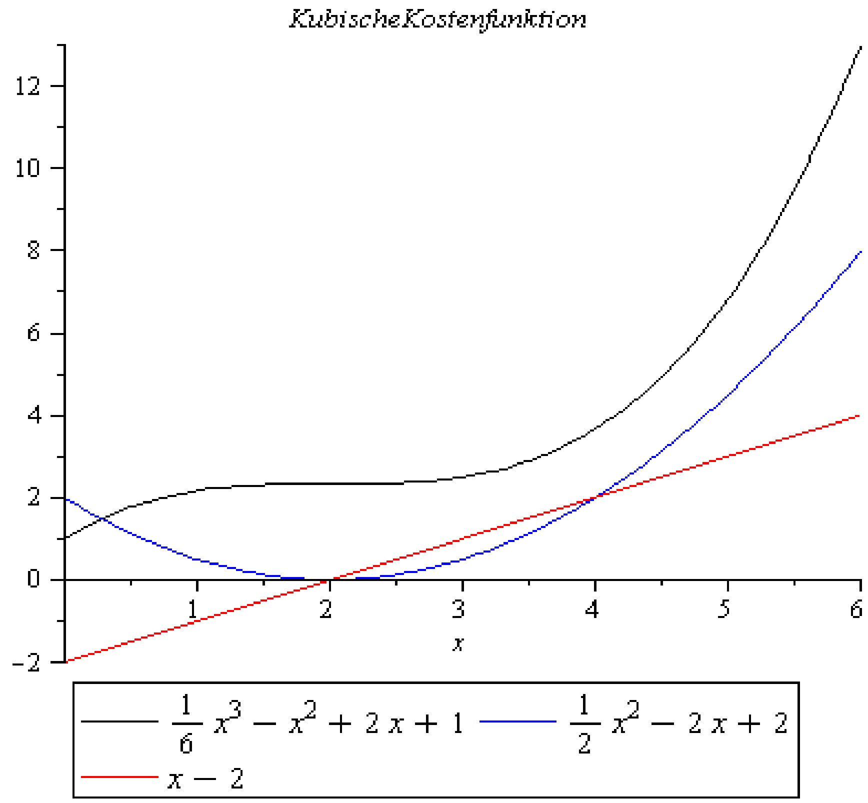
$C'(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$.

Somit ist $C(x)$ insgesamt monoton wachsend.

Ferner ist $C''(x) \geq 0 \iff x \geq 2$ und

$C''(x) \leq 0 \iff x \leq 2$,

d.h. $C(x)$ ist konkav auf $[0,2]$ und konvex auf $[2,\infty)$.



Beispiel: Wir betrachten eine allgemeine Produktions-funktion in Abhängigkeit vom Kapital $K > 0$:

$$y(K) = A \cdot K^a \text{ mit } A > 0 \text{ konstant}$$

und $a > 0$, $a \neq 1$.

$$y'(K) = A \cdot a \cdot K^{a-1}$$

$$y''(K) = A \cdot a(a-1)\, K^{a-2}$$

Es gilt: $y'(K) \geq 0$ für alle $a > 0$ und $K > 0$, also ist $y(K)$ monoton wachsend.

$$y''(K) \geq 0 \Leftrightarrow a > 1$$

$$y''(K) \leq 0 \Leftrightarrow a < 1$$

Also ist $y(K)$ konkav für $0 < a < 1$ und konvex für $a > 1$ mit $K > 0$.

Lokale und globale Extrema

In vielen ökonomischen Anwendungen treten Fragen nach optimalen Lösungen auf. Beispiele hierfür sind:

Wie lassen sich Kapital und Arbeitskraft in einem Unternehmen so einsetzen, dass der Gewinn maximiert oder die Kosten minimiert werden?

Wie viel Dünger sollte eingesetzt werden, um in einem landwirtschaftlichen Betrieb einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen?

Bei zugrundeliegenden mathematischen Modellen in Form von Funktionen bedeutet dies, maximale bzw. minimale Funktionswerte zu bestimmen und Stellen, an denen diese angenommen werden. Bevor wir auf konkrete Beispiele eingehen können, müssen wir uns zunächst mit dem mathematischen Werkzeug, insbesondere im Zusammenhang mit den Methoden der Differentialrechnung, befassen.

Definition: Sei $f: \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ und $x_0 \in \mathbb{D}_f$.

1) Globale Extrema

a) f hat an der Stelle x_0 ein globales Minimum $f(x_0)$, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

b) f hat an der Stelle x_0 ein globales Maximum $f(x_0)$, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe Optimal-, Extremalstellen und Optimal-, Extremwert.

2) Lokale (relative) Extrema

Zu $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(x_0)$ das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

a) f hat an der Stelle x_0 ein lokales (relatives) Minimum $f(x_0)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

b) f hat an der Stelle x_0 ein lokales (relatives) Maximum $f(x_0)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe lokale (relative) Extremalstellen und Extremwerte.

Wir beschäftigen uns nun mit Kriterien, wann Minima und Maxima existieren und mit Methoden, wie man diese findet. Ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Existenz liefert der folgende Satz.

Satz: Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in [a,b]$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein $x_1 \in [a,b]$, in dem f ein Maximum besitzt, d.h.

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

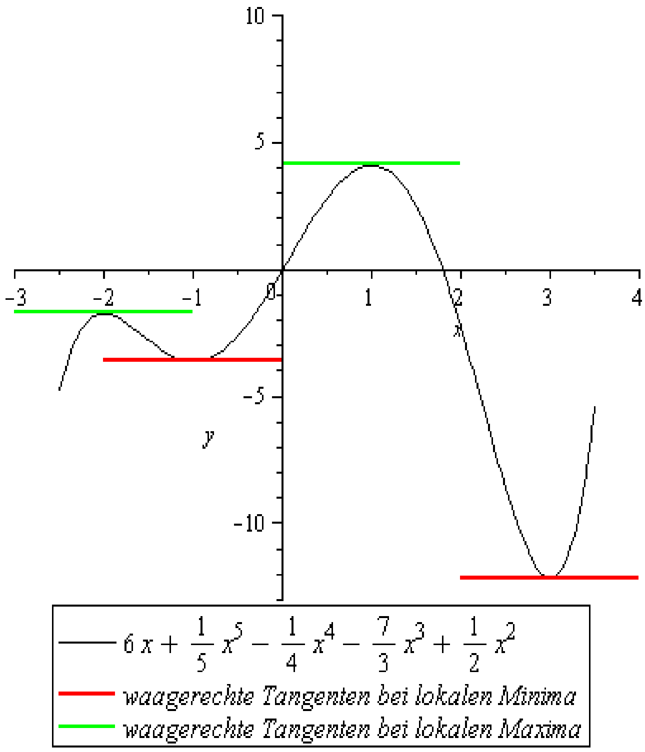
Zur Bestimmung globaler Extrema sind folgende Punkte abzuarbeiten:

- Bestimmung aller lokalen Extrema
- gegebenenfalls Untersuchung der Funktion
  - an Intervallrändern
  - für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$
  - an Definitionslücken

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Bestimmung lokaler Extrema mit Hilfe der Methoden der Differentialrechnung, d.h. unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die zu untersuchende Funktion.

Anschaulich sollte zunächst folgendes klar sein.

Bei einem lokalen Minimum ist die Funktion vor dem Minimum fallend und danach wachsend. Ist f differenzierbar, so heißt dies, dass die Tangentensteigung vor dem Minimum kleiner oder gleich Null, im Minimum gleich Null und danach größer oder gleich Null ist. Weiter sieht man, dass der Graph der Funktion im Bereich des Minimums eine Linkskurve beschreibt, d.h. f konvex ist, was sich mit dem Vorzeichen der 2. Ableitung beschreiben lässt.



Bei einem lokalen Maximum ist die Funktion vor dem Maximum wachsend und danach fallend. Ist f differenzierbar, so heißt dies, dass die Tangentensteigung vor dem Maximum größer oder gleich Null, im Maximum gleich Null und danach kleiner oder gleich Null ist. Weiter sieht man, dass der Graph von f im Bereich des Maximums eine Rechtskurve beschreibt, d.h. f konkav ist, was sich mit dem Vorzeichen der 2. Ableitung beschreiben lässt.

Wir fassen diese anschaulichen Überlegungen in einem Satz zusammen, der einen Überblick über die wichtigsten Kriterien zum Auffinden lokaler Extrema liefert.
Dabei bezeichnen wir Punkte $(x_0, f(x_0))$, in denen $f'(x_0)=0$ ist (d.h. Punkte mit waagerechter Tangente bzw. Punkte, in denen die momentane Änderungsrate Null ist) als stationäre Punkte.

Satz:

1) Notwendige Bedingung für lokale Extrema.
Eine differenzierbare Funktion f besitzt an einer lokalen Extremalstelle x_0 stets eine waagerechte Tangente, d.h. es gilt $f'(x_0)=0$.

2) Untersuchung mit Hilfe der 1. Ableitung
Ist f eine differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f, dann gilt:

a) Ist für ein $\varepsilon>0$ $f'(x)\leq 0$ für alle $x\in(x_0-\varepsilon, x_0)$ und $f'(x)\geq 0$ für alle $x\in(x_0, x_0+\varepsilon)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

b) Ist für ein $\varepsilon>0$ $f'(x)\geq 0$ für alle $x\in(x_0-\varepsilon, x_0)$ und $f'(x)\leq 0$ für alle $x\in(x_0, x_0+\varepsilon)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

3) Untersuchung mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung
Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f, dann gilt:

a) Ist für ein $\varepsilon>0$ $f''(x)\geq 0$ für alle $x\in U_\varepsilon(x_0)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

b) Ist für ein $\varepsilon>0$ $f''(x)\leq 0$ für alle $x\in U_\varepsilon(x_0)$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

c) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ ein Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente, dazu später mehr).

4) Untersuchung mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung

Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein stationärer Punkt von f, dann gilt:

a) Ist $f''(x_0) > 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

b) Ist $f''(x_0) < 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

c) Ist $f''(x_0) = 0$, dann liefert das Kriterium keine Aussage.

Beispiel: Wir bestimmen alle lokalen Extrema von

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2.$$

Es gilt $f'(x) = 3x^2 + 6x$ und

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 3x^2 + 6x = 0 \\ &\iff x(x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \lor x = -2 \end{aligned}$$

Somit sind $P(0,-2)$ und $Q(-2,2)$ stationäre Punkte von f und damit Kandidaten für lokale Extrema.

Weiter gilt $f''(x) = 6x + 6$ und

$f''(0) = 6 > 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$.

Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = -2$ besitzt.

Aus $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) < 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = -2$ ein lokales Maximum $f(-2) = 2$ besitzt.

Beispiel: Wir bestimmen alle lokalen Extrema von

$$f(x) = x^2 \cdot 2^x .$$

Zunächst sei daran erinnert, dass $2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln 2}$ gilt, d.h. $\frac{d}{dx}(2^x) = \ln 2 \cdot e^{x \cdot \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

Damit gilt $f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^x = (2x + \ln 2 \cdot x^2) \cdot 2^x$

und $f'(x) = 0 \iff (2x + x^2 \cdot \ln 2) \cdot 2^x = 0 \quad | : 2^x \neq 0$

$$\iff x(2 + x \cdot \ln 2) = 0$$

$$\iff x = 0 \lor x = -\frac{2}{\ln 2}$$

Somit sind $P(0,0)$ und $Q\left(-\frac{2}{\ln 2}, \frac{4}{(\ln 2)^2} \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}\right)$ stationäre Punkte von f und damit Kandidaten für lokale Extrema.

Weiter gilt $f''(x) = (2 + 2 \cdot \ln 2 \cdot x) \cdot 2^x + (2x + \ln 2 \cdot x^2) \cdot \ln 2 \cdot 2^x$

$$= (2 + 4 \cdot \ln 2 \cdot x + (\ln 2)^2 \cdot x^2) \cdot 2^x \text{ und}$$

$f''(0) = 2 > 0$ und

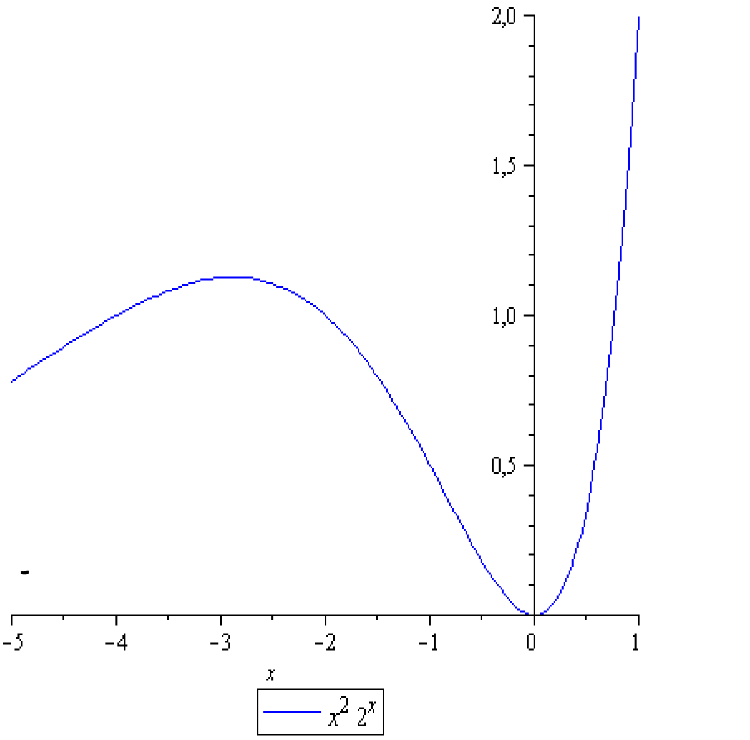
$$f''\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = \left(2 + 4 \cdot \cancel{\ln 2} \cdot \frac{-2}{\cancel{\ln 2}} + \cancel{(\ln 2)^2} \cdot \frac{4}{\cancel{(\ln 2)^2}}\right) \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} = -2 \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} < 0 .$$

Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = 0$ besitzt.

Aus $f'\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = 0$ und $f''\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) < 0$ folgt, dass f an der Stelle $x = -\frac{2}{\ln 2}$ ein lokales Maximum

$$f\left(-\frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{4}{(\ln 2)^2} \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$$

besitzt.



Wir erinnern uns daran, dass wir zur Bestimmung globaler Extrema gegebenenfalls auch Grenzwerte betrachten müssen, wenn Intervallrandpunkte nicht zum Definitionsbereich gehören, wenn die Funktion Definitionslücken hat oder das Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ untersucht werden muss.

In diesem Zusammenhang treten häufig Quotienten von Funktionen auf, in denen bei Grenzbetrachtungen sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion beide gegen Null oder beide gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ streben. Man kann dann nicht so einfach auf das Verhalten der Quotientenfunktion schließen. Dies hängt wesentlich vom Verhältnis des Wachstumsverhaltens der Zähler- und Nennerfunktion ab.

Beispiel:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ist ein (zunächst unbestimmter) Ausdruck vom Typ „$\frac{0}{0}$".

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ ist ein (zunächst unbestimmter) Ausdruck vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$".

Häufig gelingt es, Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$" durch die folgende Regel zu bestimmen.

Regel von L'Hospital: f und g seien in x_0 differenzierbare Funktionen mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ wenn } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Der Satz gilt auch für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ und einseitige Grenzwerte.

Achtung! Die Voraussetzungen müssen geprüft werden. Sind diese nicht erfüllt, so erhält man in der Regel falsche Ergebnisse.

Beispiel:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\cdot e^x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

4) Sei $a>1$. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{a^x}$ ist vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln a \cdot a^x}$ wieder vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\ln a \cdot a^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(\ln a)^2\cdot a^x} = 0$

Entsprechend kann man vorgehen, um zu zeigen, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ ist für $n\in\mathbb{N}$ und $a>1$.

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz x^n. Kurz: "Exponentiale ertränken Potenzen".

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$ ist vom Typ "$0\cdot(-\infty)$". Indem wir $x\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ schreiben, erhalten wir

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ vom Typ "$\frac{-\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

Beispiel: Wir betrachten noch einmal die Funktion $f(x)=x^2\cdot 2^x$ und untersuchen, ob die Funktion globale Extrema besitzt. Wir hatten bereits festgestellt, dass f an der Stelle $x=0$ ein lokales Minimum $f(0)=0$ und an der Stelle $x=-\frac{2}{\ln 2}$ ein lokales Maximum $f\left(-\frac{2}{\ln 2}\right)=\frac{4}{(\ln 2)^2}\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}}$ besitzt.

Weiter gilt nun $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot 2^x=\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot 2^x$ ist vom Typ "$\infty\cdot 0$". Durch Umschreiben in $x^2\cdot 2^x=\frac{x^2}{2^{-x}}$ erhalten wir

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot 2^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2^{-x}}$ vom Typ "$\frac{\infty}{\infty}$".

Somit: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot 2^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{-\ln 2\cdot 2^{-x}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(\ln 2)^2\cdot 2^{-x}}=0$$

Damit besitzt f an der Stelle $x=0$ ein globales Minimum $f(0)=0$. f besitzt aber wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ kein globales Maximum.

Beispiel: Der Student Xaver Fidelius ist in seinem letzten Studienjahr und hat 6000€ zur Verfügung. Im Folgejahr werden es 36000€ sein. Er plant für sein letztes Studienjahr einen Konsum von c_1, für das Folgejahr einen Konsum von c_2 so, dass die Nutzenfunktion

$$U=\ln(1+c_1)+\frac{1}{1.03}\ln(1+c_2)\quad,\ c_1,c_2>0$$

maximiert wird. Dazu hat er die Möglichkeit Geld mit einem Zinssatz von 10% zu leihen, damit er in seinem letzten Studienjahr mehr als

6000 € ausgeben kann. Den geliehenen Betrag von $c_1 - 6000$ muss er dann im nächsten Jahr zusammen mit den Zinsen zurückzahlen.

Wir überlegen zunächst, wie c_1 und c_2 zueinander in Beziehung stehen.

$$c_2 = 36000 - \underbrace{\left(1+\frac{10}{100}\right)(c_1-6000)}_{\text{geliehenes Geld + Zinsen}} = 42600 - 1.1 \cdot c_1$$

Damit $c_2 \geq 0$ bleibt, muss $c_1 \leq \frac{42600}{1.1} = \frac{426000}{11}$ sein.

Wir setzen den Ausdruck für c_2 in die Nutzenfunktion ein und erhalten

$$U = \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03} \ln(1+42600-1.1 \cdot c_1)$$

$$= \ln(1+c_1) + \frac{1}{1.03} \ln(42601 - 1.1 \cdot c_1)$$

nur noch in Abhängigkeit von c_1.

Wir untersuchen die Funktion mit Hilfe ihrer 1. Ableitung nach c_1.

$$\frac{dU}{dc_1} = \frac{1}{1+c_1} + \frac{1}{1.03} \cdot \frac{1}{42601 - 1.1 \cdot c_1} \cdot (-1.1)$$

$$= \frac{1}{1+c_1} - \frac{1.1}{1.03 \cdot (42601 - 1.1 \cdot c_1)}$$

$$= \frac{1.03 \cdot (42601 - 1.1 \cdot c_1) - 1.1 \cdot (1+c_1)}{(1+c_1) \cdot 1.03 \cdot (42601 - 1.1 \cdot c_1)}$$

$$= \frac{43877.93 - 2.233 c_1}{\underbrace{(1+c_1)}_{>0} \cdot 1.03 \cdot \underbrace{(42601 - 1.1 c_1)}_{= 1 + c_2 > 0}}$$

Da der Nenner stets größer als Null ist, hängt das Vorzeichen von $\frac{dU}{dc_1}$ nur vom Zähler ab.

Es gilt:

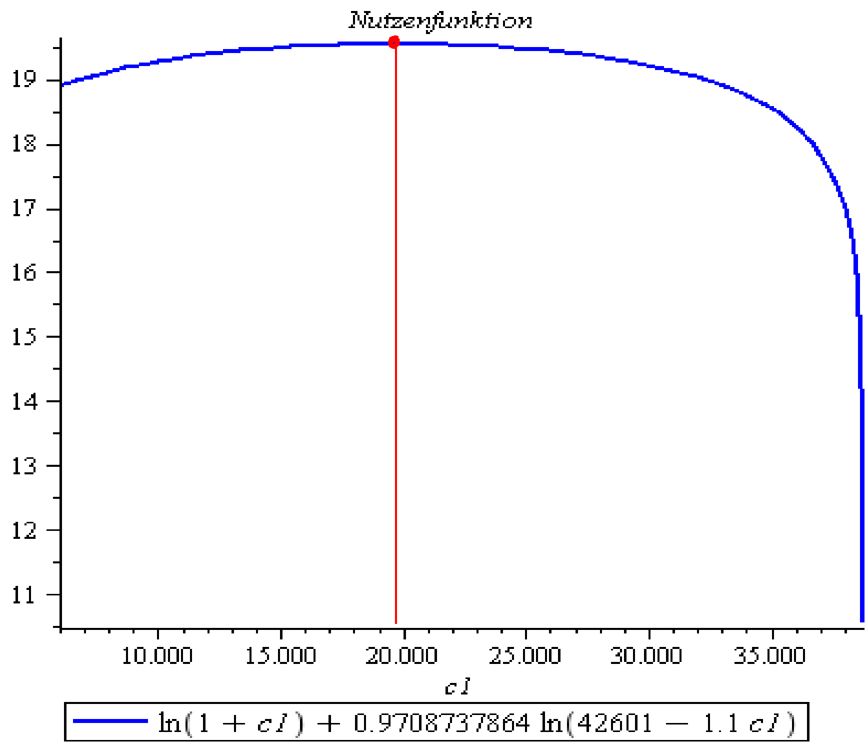
$$\frac{dU}{dc_1} > 0 \iff c_1 < \frac{43877.93}{2.233}$$

$$\frac{dU}{dc_1} = 0 \iff c_1 = \frac{43877.93}{2.233}$$

$$\frac{dU}{dc_1} < 0 \iff c_1 > \frac{43877.93}{2.233}$$

Somit ist U streng monoton wachsend $[6000, c_1^*]$ und streng monoton fallend auf $(c_1^*, \frac{426000}{11}]$ mit $c_1^* = \frac{43877.93}{2.233} \approx 19649.77$.

U besitzt also an der Stelle c_1^* ein absolutes Maximum. Insgesamt wird der Student nach diesen Überlegungen einen Betrag von $c_1^* - 6000 \approx 13649.77$ leihen, im letzten Studienjahr $c_1^* \approx 19649.77$ ausgeben und im Folgejahr $c_2^* = 42600 - 1.1 \cdot c_1^* \approx 20985.26$.



Wendepunkte

Definition: Sei f eine Funktion. Punkte, an denen der Graph der Funktion von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt übergeht, heißen Wendepunkte. An Wendepunkten wechselt also das Verhalten der Funktion von konkav nach konvex bzw. umgekehrt. Wendepunkte mit waagerechter Tangente heißen Sattelpunkte.

Die wichtigsten Kriterien zum Auffinden von Wendestellen sind in dem folgenden Satz zusammengefasst.

Satz:

1) Notwendige Bedingung
   Besitzt eine zweimal differenzierbare Funktion an einer Stelle x_0 eine Wendestelle, so gilt $f''(x_0)=0$.
2) Untersuchung mit Hilfe der 2. Ableitung
   Sei f zweimal differenzierbar und $f''(x_0)=0$. Dann gilt: Wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, dann ist $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt von f.
3) Untersuchung mit Hilfe der 2. und 3. Ableitung
   Ist die Funktion f dreimal differenzierbar und gilt $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ Wendepunkt von f.

Beispiel: Wir bestimmen Wendepunkte von

$$f(x)=\frac{1}{10}x^6-x^4.$$

Es gilt: $f'(x)=\frac{3}{5}x^5-4x^3$

$$f''(x)=3x^4-12x^2=3x^2(x^2-4)=3x^2(x-2)(x+2)$$

Also ist: $f''(x)=0 \iff x=0 \lor x=2 \lor x=-2$

Somit sind die Punkte $P(0,0)$, $Q(2,-\frac{48}{5})$ und $R(-2,-\frac{48}{5})$ mögliche Kandidaten für Wendepunkte.

Weiter gilt: $f'''(x) = 12x^3 - 24x$

$f'''(0) = 0$, $f'''(2) = 48$, $f'''(-2) = -48$

Somit gilt:

$f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$, also ist $Q(2,-\frac{48}{5})$ Wendepunkt von f.

$f''(-2) = 0$ und $f'''(-2) \neq 0$, also ist $R(-2,-\frac{48}{5})$ Wendepunkt von f.

Aus $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 0$ können wir nichts schließen. Wir müssen daher das Vorzeichen von f'' links und rechts um die Stelle 0 untersuchen.

Für $x \in (-2,0)$ gilt $f''(x) < 0$ und für $x \in (0,2)$ ebenfalls $f''(x) < 0$. Somit hat f'' an der Stelle 0 keinen Vorzeichenwechsel, d.h. in im Bereich von $P(0,0)$ konkav.

$P(0,0)$ ist somit kein Wendepunkt.