7. Verknüpfungen von Funktionen

Wir haben nun einen gewissen (unvollständigen) Vorrat an Grundfunktionen. Diese kommen, wie wir bereits in den Beispielen des letzten Kapitels gesehen haben, normalerweise nicht "in Reinform" daher, sondern werden je nach Problemstellung miteinander verknüpft.

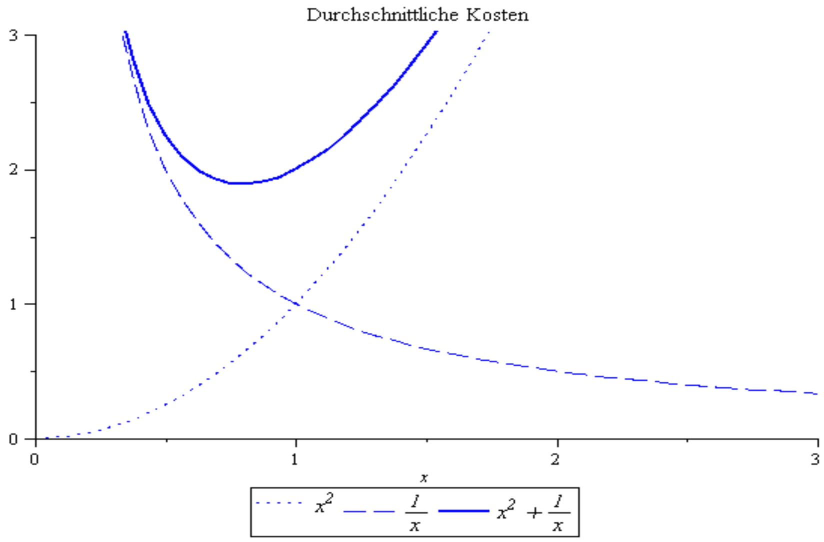
Als mögliche Verknüpfungen behandeln wir neben der einfachen Multiplikation mit einer Konstanten, Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen von Funktionen.

Weitere Möglichkeiten, Funktionen aus den Grundfunktionen oder den verknüpften Funktionen zu gewinnen, lassen sich geometrisch als Verschiebungen, Streckungen/Stauchungen und Spiegelungen an den Koordinatenachsen veranschaulichen.

Beispiel: Die Kosten für x Einheiten eines Gutes seien gegeben durch $C(x) = x^3 + 1$. Die Durchschnittskosten $A(x)$ sind die Kosten pro produzierter Einheit, d.h.

$A(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

$A(x)$ ist Summe aus $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = \frac{1}{x}$.



Definition: Sind f und g zwei Funktionen mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{D}_g$ mit $\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g \neq \{\ \}$, so sind Summe und Differenz der beiden Funktionen definiert durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \ x \in \mathbb{D}_{f+g} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \ x \in \mathbb{D}_{g-f} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$$

Beispiel: $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Es gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}^*$, $\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g = \mathbb{R}^*$

$(f+g)(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}^*$.

Wenn wir zusätzlich noch die Multiplikation von Funktionen mit einer Konstanten c betrachten, erhalten wir mit Summen und Differenzen der Potenzfunktionen x^k, $k \in \mathbb{N}_0$, die Polynome, d.h. Funktionen der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Beispiel: Ein Unternehmen bietet ein Produkt zum von der abgenommenen Menge x abhängigen Preis von $p(x) = \frac{10x+110}{x+10}$ an.

Ein Kunde, der eine Menge x kauft, muss somit

$$P(x) = \frac{10x+110}{x+10} \cdot x \quad \text{bezahlen.}$$

$P(x)$ ist somit das Produkt aus $\frac{10x+110}{x+10}$ und x bzw. $p(x)$ der Quotient aus $\frac{10x+110}{x+10} \cdot x$ und x.

z.B. ist für $x = 10$: $P(10) = 105$, $p(x) = 10.5$

$x = 30$: $P(30) = 307.5$, $p(x) = 10.25$

Definition: Sind f und g zwei Funktionen mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}_f$ und $\mathbb{D}_g$ mit $\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g \neq \{\ \}$, so sind Produkt und Quotient der beiden Funktionen definiert durch:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}_{f \cdot g} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}_{\frac{f}{g}} = \mathbb{D}_f \cap \{\mathbb{D}_g \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}\}$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$

Es gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+^*$; $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ für alle $x \in \mathbb{D}_{f \cdot g} = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g = \mathbb{R}_+^*$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ für alle $x \in \mathbb{D}_{\frac{f}{g}} = \{\mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ für alle $x \in \mathbb{D}_{\frac{g}{f}} = \{\mathbb{D}_g \cap \mathbb{D}_f\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \mathbb{R}_+^*$

Wenn wir nun Quotienten der vorher gebildeten Polynome betrachten, erhalten wir die rationalen Funktionen, d.h. Funktionen der Form

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_R = \{x \in \mathbb{R} : b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

Beispiel: Wir bestimmen den Definitionsbereich von $R(x) = \frac{x^2 - 7x + 5}{6x^2 + x - 1}$.

Dazu müssen wir die Nullstellen der quadratischen Funktion im Nenner bestimmen.

$$
\begin{aligned}
& 6x^2 + x - 1 = 0 && | :6 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 + \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{6} = 0 && | \text{ Anwendung pq-Formel} \\
\Longleftrightarrow\ & x = -\tfrac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + \tfrac{1}{6}} \\
\Longleftrightarrow\ & x = -\tfrac{1}{12} \pm \sqrt{\tfrac{25}{12^2}} \\
\Longleftrightarrow\ & x = -\tfrac{1}{2} \vee x = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Somit ist der Definitionsbereich der Funktion $\mathbb{D}_R = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

Beispiel: Die Nachfrage nach einem bestimmten Gut sei in Abhängigkeit vom Preis P gegeben durch $N(P) = 10 - 0.5P$.

Wir nehmen an, dass der Preis P nicht konstant ist, sondern in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben ist durch $P(t) = 0.01 \cdot 2^t$.

Wir können dann die Nachfrage als Funktion von t ausdrücken, d.h.

$$N(P(t)) = 10 - 0.5 \cdot P(t) = 10 - 0.005 \cdot 2^t$$

Es handelt sich hierbei um eine sogenannte Verkettung von Funktionen. Man setzt zunächst die Variable t in die "innere" Funktion $P(t)$ ein. Den so ermittelten Wert für den Preis P setzt man dann in die "äußere" Funktion ein.

Bevor wir den Begriff der Verkettung von Funktionen genauer definieren, machen wir uns zunächst an einem weiteren Beispiel klar, was bzgl. des Definitionsbereiches zu beachten ist.

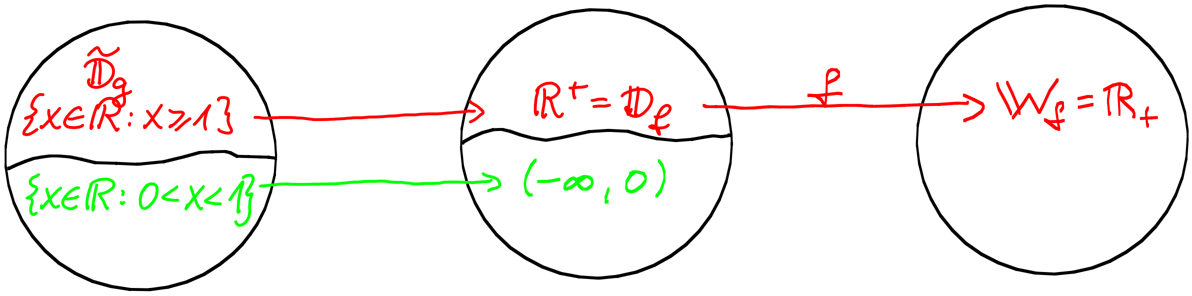
Beispiel: Seien $f(x)=\sqrt{x}$ und $g(x)=\ln x$ mit den Definitionsbereichen $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{D}_g=\mathbb{R}_+^*$.

Wir betrachten nun die verkettete Funktion $f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\ln x}$.

Um den Definitionsbereich der verketteten Funktion zu bestimmen, müssen wir herausfinden, für welche $x\in\mathbb{D}_g$ gilt, dass $g(x)=\ln x\geqslant 0$ gilt, denn nur für solche x ist $f(g(x))$ definiert.

Anders ausgedrückt, müssen wir diejenige Teilmenge $\tilde{\mathbb{D}}_g$ von $\mathbb{D}_g$ bestimmen, für die der zugehörige Wertebereich $\tilde{\mathbb{W}}_g\subseteq\mathbb{D}_f$ ist.

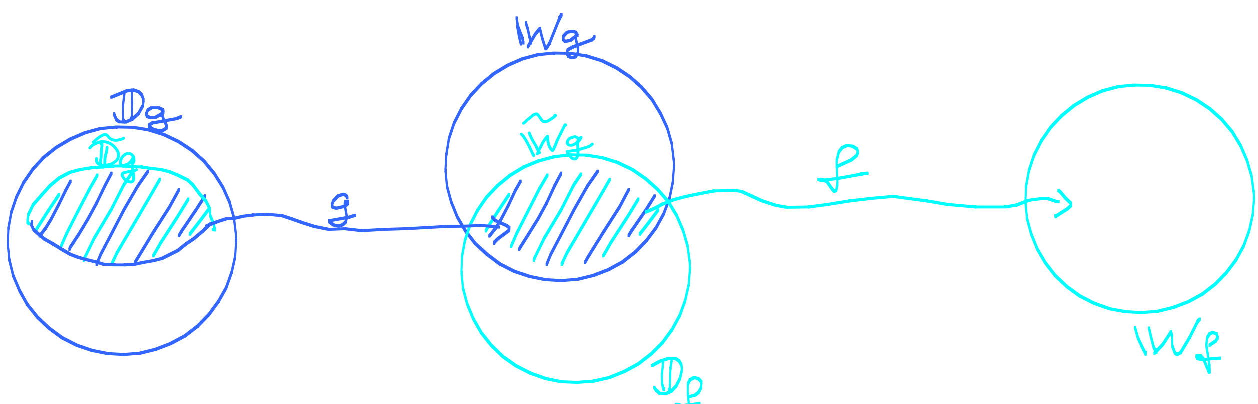
$g:\ \mathbb{D}_g=\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{W}_g=\mathbb{R}\nsubseteq\mathbb{D}_f=\mathbb{R}_+$



In $\tilde{\mathbb{D}}_g$ sind nur diejenigen x, für die $\ln x\geqslant 0$ ist, d.h. $x\geqslant 1$.

Auch dieses Beispiel zeigt wieder, wie wichtig es ist, die Grundfunktionen mit ihren Eigenschaften gut zu kennen.

Allgemeiner kann man sich die Situation so veranschaulichen:



Es müssen diejenigen Elemente von $\mathbb{D}_g$ bestimmt werden, für die die Funktion g Werte liefert, die von f weiterverarbeitet werden können.

Definition: Seien f und g Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ bzw. $\mathbb{D}_g$. Der Wertebereich von g sei $\mathbb{W}_g$ und es gelte $\mathbb{W}_g \cap \mathbb{D}_f \neq \{\ \}$. Dann ist die Verkettung (Hintereinanderausführung) von f und g definiert durch

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{D}_g : g(x) \in \mathbb{D}_f\}.$$

Man nennt g dann auch die "innere" und f die "äußere" Funktion.

Achtung: Die Verkettung von Funktionen ist nicht kommutativ!

Beispiel: Wenn Sie bei der Berechnung mit dem Taschenrechner erst für x den Wert 3 eingeben, dann die Funktionstaste x^2 drücken und anschließend die Funktionstaste 10^x drücken, erhalten Sie schematisch:

$$3 \xrightarrow{x^2} 9 \xrightarrow{10^x} 10^9$$

Wenn Sie statt dessen nach der Eingabe von 3 für x erst die Funktionstaste 10^x drücken und anschließend die Funktionstaste x^2, so ergibt sich schematisch:

$$3 \xrightarrow{10^x} 10^3 \xrightarrow{x^2} 10^6$$

Beispiel:

Auf den 10 DM Scheinen befand sich eine Funktion, die im Bereich der Statistik eine große Rolle spielt:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

mit den Parametern σ für die Standardabweichung und μ für den Erwartungswert.

Es handelt sich um die Dichtefunktion der Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve).

Wir schreiben f als Verkettung zweier Funktionen.

Mit $h(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^x$ und $g(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ gilt:

$$f(x)=h(g(x)) \text{ mit } \mathbb{D}_{h\circ g}=\mathbb{R}.$$

Beispiel: $f(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=\ln x$, $g(x)=x^2-1$.

Wir betrachten $(f\circ h\circ g)(x)=\sqrt{\ln(x^2-1)}$ und bestimmen den Definitionsbereich. Wir müssen sicherstellen, dass unter der Wurzel ein nichtnegativer Wert steht, d.h. dass $\ln(x^2-1)\geqslant 0$ ist.

Damit $\ln(x^2-1)$ definiert ist, benötigen wir $x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1$

Nun gilt: $\ln(x^2-1)\geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2-1\geqslant 1$ (Damit gilt auch $x^2>1$)

$$\Longleftrightarrow x^2-2\geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow x\leqslant-\sqrt{2} \vee x\geqslant\sqrt{2}$$

(Anschaulich: Der Graph von $y=x^2-2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x=-\sqrt{2}$ und $x=+\sqrt{2}$)

Also ist $\mathbb{D}_{f\circ h\circ g}=\{x\in\mathbb{R}: x\leqslant-\sqrt{2} \vee x\geqslant\sqrt{2}\}=(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$

Beispiel: $f(x)=\ln x$, $g(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln|x|.$$

Da $|x|>0 \Longleftrightarrow x\neq 0$, gilt: $\mathbb{D}_{f\circ g}=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Wir greifen an dieser Stelle die Frage nach der Umkehrbarkeit von Funktionen noch einmal auf und bestimmen für Beispiele komplizierterer Funktionen (falls möglich) Umkehrfunktionen.

Beispiel: $f(x)=y=\frac{3x-1}{3x+1}$ mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$.

Man kann die Funktionsvorschrift auch umformen zu:

$$y=\frac{3x+1-2}{3x+1}=1-\frac{2}{3x+1}.$$

An dieser Darstellung lässt sich ablesen, dass y nicht 1 werden kann. Wegen der Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $-\frac{1}{3}$ ergibt sich somit der Wertebereich zu $\mathbb{W}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Wir lösen nun die Gleichung $y=\frac{3x-1}{3x+1}$ für $x\neq-\frac{1}{3}, y\neq 1$ nach x auf.

$$y=\frac{3x-1}{3x+1} \iff (3x+1)\,y=3x-1$$
$$\iff 3xy-3x=-y-1$$
$$\iff x\cdot 3(y-1)=-(y+1)$$
$$\iff x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{y+1}{y-1}$$

Die Umkehrfunktion zu $f(x)$ ist also $g(y)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{y+1}{y-1}$ mit $\mathbb{D}_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ und $\mathbb{W}_g=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$.

Wie kann man feststellen, ob man eventuell den Definitionsbereich einschränken muss? Wir erläutern dies an einem Beispiel.

Beispiel: Wir lösen $f(x)=y=x^2+x-6$ nach x auf.

$$y=x^2+x-6 \iff x^2+x-6-y=0$$
$$\iff x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6+y} \qquad (*)$$
$$\iff x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+y}$$

Zu jedem y mit $y>-\frac{25}{4}$ gibt es also zwei verschiedene x mit $f(x)=y$. Mit $(*)$ können wir sehen, dass die Funktion für den eingeschränkten Definitionsbereich $[-\frac{1}{2},\infty)$ umkehrbar ist.

Dann gilt nämlich:

$$y=x^2+x-6 \wedge x\geqslant-\frac{1}{2} \iff x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+y} \wedge x\geqslant-\frac{1}{2}$$
$$\iff x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+y}$$

Für $f(x)=x^2+x-6$ mit $\mathbb{D}_f=[-\frac{1}{2},\infty)$ ist $g(y)=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+y}$ Umkehrfunktion.

Im Folgenden betrachten wir, wie man Verschiebungen und Streckungen / Stauchungen von Funktionsgraphen durch geeignete Veränderungen der Funktionsterme erreichen kann.

Beispiel: Für ein Einkommen x zwischen 4000 € und 10000 € werden Abgaben von

$$s(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^2 + 5 \cdot 10^{-2} x$$

erhoben. Zur Senkung der Abgaben werden folgende Modelle vorgeschlagen:

Modell 1: In Zukunft darf jeder pauschal einen Betrag von 500 € von der ermittelten Steuer abziehen.

Modell 2: Vor Ermittlung der Abgaben darf in Zukunft pauschal ein Freibetrag von 800 € vom Einkommen abgezogen werden.

Die Herren A. Besser, B. Weniger und C. Schnurz äußern sich folgendermaßen zu den Modellen:

A. Besser: „Ich bin für Modell 1, weil es für mich besser ist."

B. Weniger: „Ich hätte lieber Modell 2, da muss ich weniger zahlen."

C. Schnurz: „Mir ist das egal, ich spare bei beiden Modellen gleich viel."

In welchen Bereichen befinden sich die Einkommen der Herren A. Besser und B. Weniger?

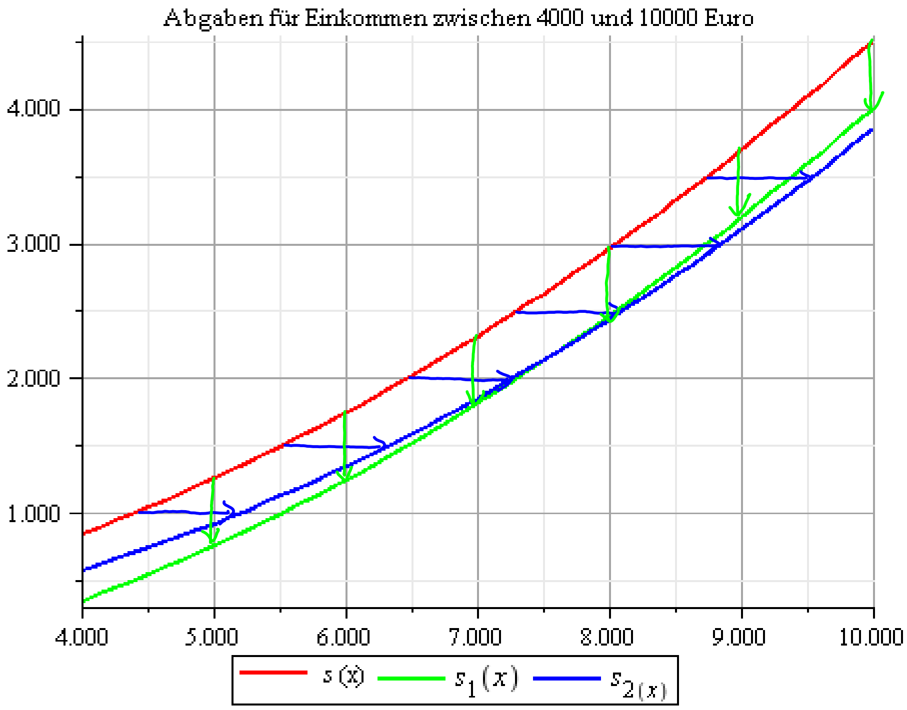
Wie hoch ist das Einkommen von Herrn C. Schnurz?

Wir überlegen zunächst, wie man die Funktionen s_1 und s_2 für die Abgaben in den beiden Modellen mit Hilfe der Funktion s ausdrücken kann.

Modell 1: Da jeder pauschal einen Betrag von 500 € von den Abgaben s abziehen kann, sind die Abgaben nach Modell 1 gegeben durch $s_1(x) = s(x) - 500$. Dies entspricht einer Verschiebung des Graphen von s um 500 nach unten.

Modell 2: Da in diesem Modell das Einkommen zunächst um einen Freibetrag von 800 € vermindert wird, sind die Abgaben nach Modell 2 gegeben durch $s_2(x) = s(x-800)$. Dies entspricht einer Verschiebung von s um 800 nach rechts.

Graphen der Abgabefunktionen:



Herr A. Besser verdient eher im unteren, Herr B. Weniger im oberen Bereich der Spanne zwischen 4000 und 10 000 €.

Was Herr C. Schnurz verdient, stellen wir nun rechnerisch fest, indem wir bestimmen, für welchen Wert x die Abgaben nach Modell 1 und 2 übereinstimmen.

$$s_1(x) = s_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad s(x) - 500 = s(x-800)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cdot 10^{-5}x^2 + 5\cdot 10^{-2}x - 500 = 4\cdot 10^{-5}(x-800)^2 + 5\cdot 10^{-2}(x-800)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{4\cdot 10^{-5}x^2} + \cancel{5\cdot 10^{-2}x} - 500 = \cancel{4\cdot 10^{-5}x^2} - 64\cdot 10^{-3}x + 256\cdot 10^{-1} + \cancel{5\cdot 10^{-2}x} - 40$$

$$\Leftrightarrow \quad 64\cdot 10^{-3}x = 500 + 256\cdot 10^{-1} - 40$$

$$\Leftrightarrow \quad 64x = 485600$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 7587.5$$

Insgesamt ist somit Modell 1 besser für ein Einkommen von 4000 € bis 7587.50 €, Modell 2 für Einkommen von 7587.50 bis 10000 €.

Wir schauen nun allgemein, wie man aus einem bekannten Graphen einer Funktion $f(x)$ den Graphen von $y = c \cdot f(a(x-x_0)) + y_0$ (*) mit Konstanten a und c ungleich Null erhält. Mit $d = \frac{1}{c}$ schreiben wir (*) um in die Form $d(y-y_0) = f(a(x-x_0))$.

Vertikale Streckung/Stauchung
$|d| < 1$: Streckung
$|d| > 1$: Stauchung
$d < 0$: zusätzlich Spiegelung an horizontaler Achse

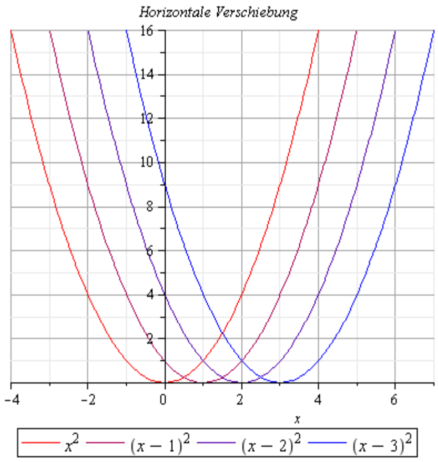
Verschiebung um x_0 in x-Richtung
$x_0 > 0$: nach rechts
$x_0 < 0$: nach links

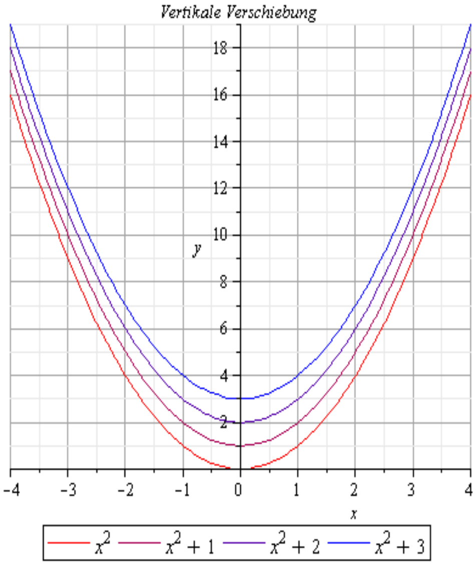
$$d(y - y_0) = f(a(x - x_0))$$

Verschiebung um y_0 in y-Richtung
$y_0 > 0$: nach oben
$y_0 < 0$: nach unten

Horizontale Streckung/Stauchung
$|a| < 1$: Streckung
$|a| > 1$: Stauchung
$a < 0$: zusätzlich Spiegelung an vertikaler Achse

Beispiel: $f(x) = x^2$
Verschiebung in x-Richtung um $x_0 = 1, 2, 3$
$y = f(x - x_0)$, d.h.
$y = (x - x_0)^2$





Verschiebung in y-Richtung um

$y_0 = 1, 2, 3$

$y = f(x) + y_0$, d.h. $y = x^2 + y_0$

(bzw. $y - y_0 = x^2$)

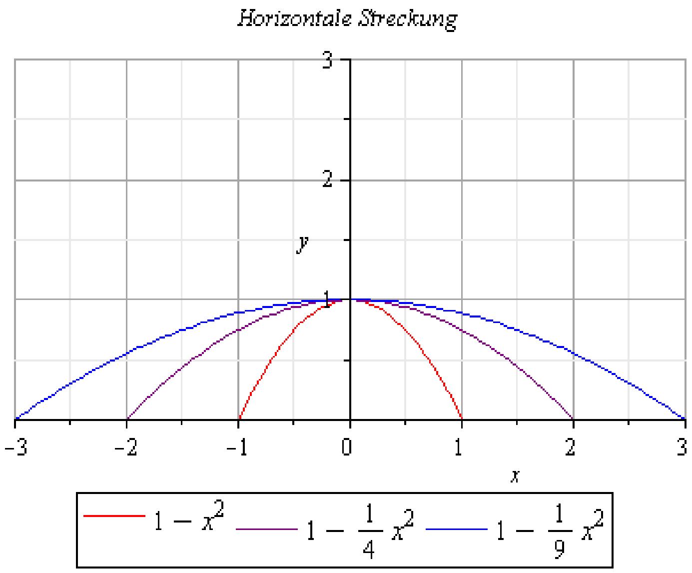
Beispiel: $f(x) = 1 - x^2$

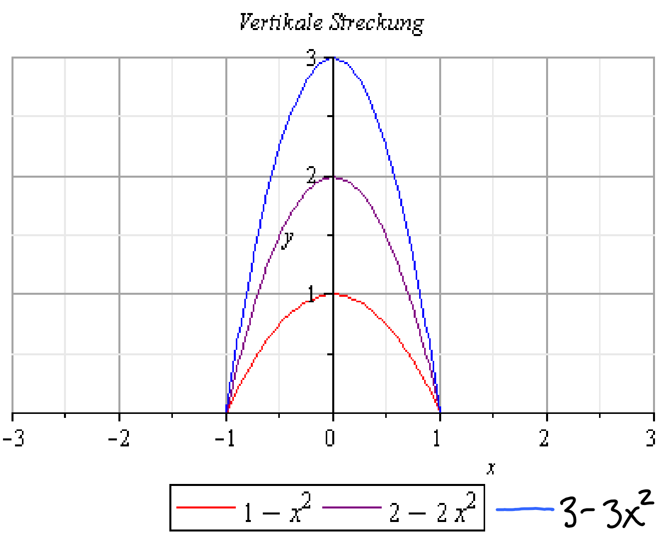
Streckung in x-Richtung

$a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$y = f(a \cdot x)$, d.h.

$y = 1 - (a \cdot x)^2$





Streckung in y-Richtung

$c = 2, 3$ (bzw. $d = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$)

$y = c \cdot f(x)$, d.h.

$y = c \cdot (1 - x^2)$

(bzw. $dy = 1 - x^2$ mit $d = \frac{1}{c}$)