Quadratische Formen

Abschließend beschäftigen wir uns noch mit einem neuen Begriff, dem der quadratischen Formen.

Quadratische Formen treten z.B. auf in der Statistik, bei Problemstellungen mit mehrdimensionalen Preis-Absatz-Beziehungen, sowie bei quadratischen Optimierungsproblemen, bei denen man das Minimum oder Maximum einer quadratischen Form (Zielfunktion) gegebenenfalls unter einschränkenden Nebenbedingungen sucht. Solche quadratischen Optimierungsprobleme werden auch zur Approximation allgemeinerer nichtlinearer Optimierungsprobleme auf. Im Zusammenhang damit stehen Definitheitseigenschaften der in quadratischen Formen auftretenden Matrizen, die in enger Beziehung zu den Eigenwerten stehen. Solche Definitheitseigenschaften von Matrizen werden wir auch im kommenden Semester benötigen, um Kriterien für lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen zu formulieren.

Ist $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ein Variablenvektor und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so nennt man $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ eine quadratische Form.

Beispiel: Für $n=2$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$q(\vec{x}) = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2$$

Man beachte, dass man mit der symmetrischen Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A+A^T)$$ auf dieselbe quadratische Form kommt.

Für $n=3$ ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\vec{q}(\vec{x}) = (x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + (a_{13}+a_{31})x_1x_3 + (a_{23}+a_{32})x_2x_3$$

Man beachte, dass man auch hier mit der symmetrischen Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12}+a_{21}) & \frac{1}{2}(a_{13}+a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) & a_{22} & \frac{1}{2}(a_{23}+a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31}+a_{13}) & \frac{1}{2}(a_{32}+a_{23}) & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$ auf dieselbe

quadratische Form kommt.

Auch in allgemeinen Fall lässt sich eine quadratische Form stets mit einer symmetrischen Matrix darstellen. Wir können also ohne Einschränkung voraussetzen, das A symmetrisch ist.

Für eine symmetrische Matrix A, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ lässt sich nun die quadratische Form allgemein berechnen zu:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2a_{ij} x_i x_j \, .$$

Beispiel: Sei $q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, A symmetrisch, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ gilt.

Offenbar ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Beispiel: Sei $q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Gesucht ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, A symmetrisch, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ gilt.

Offenbar ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

In vielen Anwendungen ist man nun an Bedingungen an die Matrix A interessiert, die sicherstellen, dass $q(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$ dasselbe Vorzeichen besitzt.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt die quadratische Form $\vec{x}^T A \vec{x}$ bzw. die Matrix A

1) positiv definit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
2) positiv semidefinit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
3) negativ definit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
4) negativ semidefinit, wenn $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$
5) indefinit, wenn sie weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$ ist positiv definit, da Quadrate stets nichtnegativ sind und für $\vec{x} \neq \vec{0}$ mindestens ein $x_i \neq 0$, d.h. $x_i^2 > 0$ sein muss.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2$$

Die Entscheidung fällt hier nicht so leicht, wie in unserem ersten Beispiel. Es gilt aber:

$$-4x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 = -\left((2x_1)^2 - 4x_1x_2 + x_2^2\right) - 3x_3^2$$
$$= -(2x_1 - x_2)^2 - 3x_3^2$$

Da Quadrate stets nichtnegativ sind, ist der Ausdruck auf jeden Fall kleiner oder gleich Null für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$. Er wird z.B. Null für $\vec{x} = (1, 2, 0)^T$. Somit ist die quadratische Form negativ semidefinit.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Entscheidung über Definitheitseigenschaften einer Matrix nicht durch einfaches Hinschauen gefällt werden kann. Wir werden uns daher mit Kriterien und geeignetem mathematischen Werkzeug für die Untersuchung von Definitheitseigenschaften von Matrizen beschäftigen.

Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der Definitheitseigenschaften quadratischer Formen bzw. symmetrischer Matrizen besteht in der Untersuchung der Vorzeichen von Determinanten gewisser Teilmatrizen von A.

<u>Definition:</u> Ein Hauptminor der Ordnung r einer $(n \times n)$-Matrix A ist die Determinante einer Matrix, die aus der Matrix A durch Streichung von $(n-r)$ Zeilen und $(n-r)$ Spalten entsteht. Dabei wird eine bestimmte Zeile i genau dann gestrichen, wenn auch die i-te Spalte gestrichen wird bzw. umgekehrt.

Ein Hauptminor heißt führender Hauptminor der Ordnung r einer $(n\times n)$-Matrix A, wenn er aus den ersten r Zeilen und Spalten von A besteht, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

<u>Beispiel:</u> Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Die führenden Hauptminoren von A sind

$$\det(1) = 1, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -7, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = -19$$

Alle Hauptminoren von A

der Ordnung $r=1$ sind $\det(1)=1$, $\det(5)=5$, $\det(6)=6$

der Ordnung $r=2$ sind $\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=-7$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}=13$, $\det\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=12$

der Ordnung $r=3$ ist $\det(A)=-19$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Führende Hauptminoren: $\det(a_{11})$, $\det(A)$

Alle Hauptminoren: $\det(a_{11})$, $\det(a_{22})$, $\det(A)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Führende Hauptminoren: $\det(b_{11}), \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \det(B)$

Alle Hauptminoren: $\det(b_{11})$, $\det(b_{22})$, $\det(b_{33})$

$$\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(B)$$

Während es zu einer quadratischen $(n \times n)$-Matrix n führende Hauptminoren gibt, beträgt die Anzahl aller Hauptminoren $2^n - 1$. Für die Untersuchung der positiven bzw. negativen Definitheit sind (nur) die führenden Hauptminoren heranzuziehen, für die Semidefinitheit alle Hauptminoren, was in dem folgenden Satz festgehalten wird, der auch unter dem Stichwort Hurwitz-Kriterium in der Literatur zu finden ist.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir bezeichnen mit D_r den führenden Hauptminor der Ordnung r und mit Δ_r einen beliebigen Hauptminor der Ordnung r. Dann gilt:

1) A positiv definit $\iff$ $D_r > 0$ für alle $r = 1, \ldots, n$
2) A positiv semidefinit $\iff$ $\Delta_r \geq 0$ für alle Hauptminoren der Ordnung $r = 1, \ldots, n$
3) A negativ definit $\iff$ $(-1)^r D_r > 0$ für alle $r = 1, \ldots, n$
4) A negativ semidefinit $\iff$ $(-1)^r \Delta_r \geq 0$ für alle Hauptminoren der Ordnung $r = 1, \ldots, n$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det(2) = 2 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 7 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 19 > 0$.

Alle führenden Hauptminoren sind positiv, also ist A positiv definit.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det(-2) = -2 < 0$, $\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 8 > 0$, $\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -12 < 0$.

Die führenden Hauptminoren ungerader Ordnung sind negativ, der führende Hauptminor gerader Ordnung positiv, also ist A negativ definit.

Beispiel:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die führenden Hauptminoren:

$$\det(0) = 0, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8 < 0, \quad \det(C) = 24 > 0$$

Die führenden Hauptminoren ungerader Ordnung sind somit kleiner oder gleich 0, die gerader Ordnung größer oder gleich 0.

Achtung! Damit lässt sich nur schließen, dass C nicht positiv definit, nicht negativ definit und nicht positiv semidefinit ist. Für die Frage, ob C **negativ semidefinit** ist, müssen auch die anderen Hauptminoren von C untersucht werden.

Betrachtet man den Hauptminor

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \text{ (Streichen der 2. Zeile und Spalte in } C\text{)},$$

so hat man einen Hauptminor ungerader Ordnung gefunden, der positiv ist. C ist somit auch nicht negativ semidefinit.
Insgesamt ist also C indefinit.