4. Matrizen Teil 2

In diesem Kapitel werden wir uns zunächst damit beschäftigen, wie man lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen und Vektoren darstellt. Das Lösungsverhalten steht in engem Zusammenhang mit Eigenschaften der Koeffizientenmatrix, die wir in diesem Kapitel untersuchen wollen. Dazu befassen wir uns mit dem sogenannten Rang einer Matrix und der Frage nach einer Inversen bezüglich der Multiplikation von Matrizen und zeigen, wie man die Rangbestimmung und im Falle der Existenz die Berechnung von inversen Matrizen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus, den wir in ersten Kapitel bereits kennengelernt haben, bewältigen kann.

Lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine (Koeffizienten-)Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ der Vektor der rechten Seite und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der Unbekannten.

Wir betrachten $A\vec{x} = \vec{b}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir zunächst

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

d.h. eine Gleichung für zwei Vektoren. Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in ihren jeweiligen Komponenten übereinstimmen, ist dies somit äquivalent zu dem in ersten Kapitel behandelten linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit m linearen Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Beispiel: Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 &= 5 \\ -\tfrac{1}{3}x_1 + 25x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

lautet in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 25 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Unbekannten}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der rechten Seite}}$$

Eng verknüpft mit der Antwort auf die Frage nach der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme, die wir (s.o.) nun in der kurzen Form $A\vec{x} = \vec{b}$ angeben, ist der Begriff des Rangs einer Matrix. Um die entsprechenden Begriffe definieren zu können, betrachten wir zunächst folgendes: Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachten wir die n Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die m Zeilenvektoren

$$\vec{a}^1 = (a_{11} \; a_{12} \dots a_{1n}), \; \vec{a}^2 = (a_{21} \; a_{22} \dots a_{2n}), \dots, \; \vec{a}^m = (a_{m1} \; a_{m2} \dots a_{mn}),$$

d.h. wir "zerlegen" die Matrix spalten- bzw. zeilenweise.

Beispiel: Sei $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Dann gehören zu der Matrix A die Spaltenvektoren

$\vec{a}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die

Zeilenvektoren $\vec{a}^1=(4 \;\; 7 \;\; 3 \;\; 5)$, $\vec{a}^2=(1 \;\; 9 \;\; 2 \;\; 0)$, $\vec{a}^3=(-3 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 1)$.

Definition: Sei $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Unter dem Spaltenrang von A versteht man die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von A, d.h. die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Entsprechend ist der Zeilenrang von A die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von A, d.h. die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Zeilenvektoren $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^m$.

Beispiel: Der Zeilen- und Spaltenrang der Einheitsmatrix $E_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ist n, da die Zeilen- und Spaltenvektoren von E_n gerade die kartesischen Basisvektoren sind, die linear unabhängig sind.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, halten wir zunächst zwei wichtige Ergebnisse fest, die uns die Rangbestimmung wesentlich erleichtern.

Satz: Der Spaltenrang und der Zeilenrang einer Matrix sind stets gleich.

Wegen der Gleichheit braucht man zwischen Spalten- und Zeilenrang nicht zu unterscheiden. Man spricht daher einfach vom Rang einer Matrix A und schreibt kurz $Rg(A)$.

Der Rang einer Matrix ist somit höchstens gleich dem Minimum über die Anzahl der Spalten und die Anzahl der Zeilen.

Beispiel:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad Rg(A) \leq 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad Rg(B) \leq 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 & 3 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad Rg(C) \leq 2$$

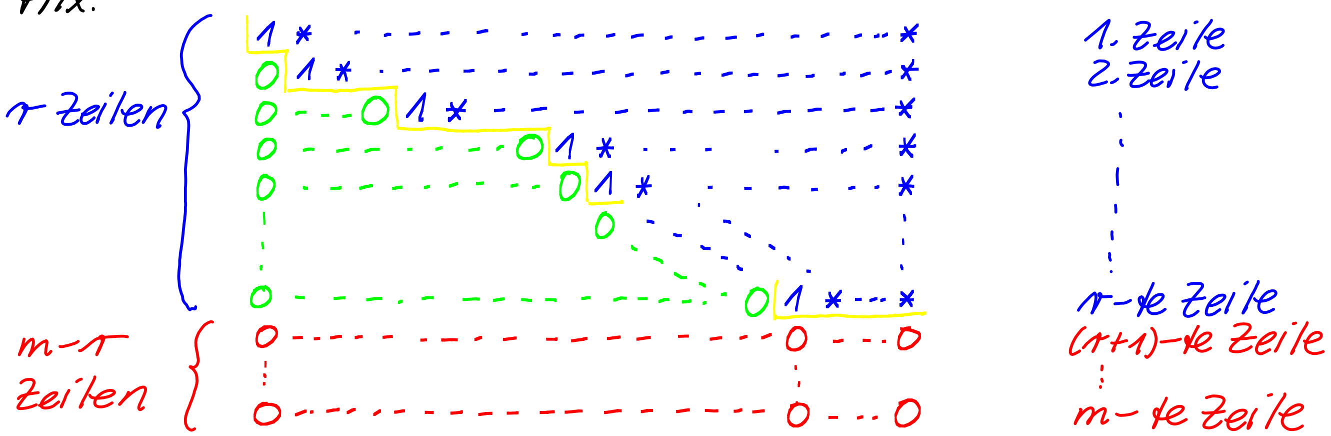
Die Rangbestimmung lässt sich gut mit Hilfe des Gauß-Algorithmus durchführen, da Folgendes gilt.

Satz: Die elementaren Zeilenumformungen, die wir beim Gauß-Algorithmus verwendet haben, ändern den Rang einer Matrix nicht.

Im Einzelnen waren dies:

- Multiplikation einer Zeile mit einem beliebigen Faktor $\alpha \neq 0$
- Vertauschen zweier Zeilen
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Wir wenden also den Gauß-Algorithmus auf die zu betrachtende Matrix an und erhalten somit am Ende eine Matrix in Zeilenstufenform, die denselben Rang besitzt wie die Ausgangsmatrix.



Die gegebenenfalls auftretenden $(m-r)$ Zeilen, die nur Nullen enthalten, tragen zum Rang der Matrix nichts bei. Die ersten r Zeilen dagegen sind linear unabhängig, d.h. der Rang der Matrix ist r.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & -1 & (-1) \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & (-1) \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Somit gilt $Rg(A) = 2$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|l} 1 & 2 & (-1)\ (-1) \\ 1 & 3 & \\ 1 & \frac{5}{2} & \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & 1 & (-\frac{1}{2}) \\ 0 & \frac{1}{2} & \\ \hline 1 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

Somit $Rg(A) = 2$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & (-2) \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Somit $Rg(A^T) = 2$

Da Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix A stets übereinstimmen, gilt auch stets $Rg(A) = Rg(A^T)$.

Da wir nun wissen, wie man an der Zeilenstufenform des letzten Gauß-Schemas den Rang einer Matrix ablesen kann, können wir nun auch überlegen, was der Rang einer Matrix mit der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme zu tun hat. Dabei unterscheiden wir, ob die rechte Seite der Nullvektor ist oder nicht.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so heißt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ homogen, für $\vec{b} \neq \vec{0}$ heißt es inhomogen.

Wir betrachten zunächst den Fall $\vec{b} = \vec{0}$. Durch die elementaren Zeilenumformungen ändert sich in diesem Fall an der rechten Seite nichts, d.h. nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhalten wir zum Schluss ein Schema der Form

$$
\begin{array}{l|cccccccccc|c|l}
 & (x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & & & & x_n) & & \\
\hline
 & 1 & * & \cdots & & & & & & & * & 0 & \text{1. Zeile}\\
 & 0 & 1 & * & \cdots & & & & & & * & 0 & \text{2. Zeile}\\
 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & & & * & 0 & \\
r \text{ Zeilen} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & * & 0 & \vdots\\
 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & \\
 & \vdots & & & & & & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \\
 & 0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 1 \; * \cdots & * & 0 & r\text{-te Zeile}\\
\hline
m-r & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \cdots & 0 & 0 & (r+1)\text{-te Zeile}\\
\text{Zeilen} & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \cdots & 0 & 0 & m\text{-te Zeile}
\end{array}
$$

Die gegebenenfalls auftretenden letzten $m-r$ Zeilen, in denen alle Einträge Null sind, brauchen wir nicht weiter zu betrachten.

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist r und die Anzahl der Freiheitsgrade ist $n-r$.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade gleich Null, d.h. $r = n$, so ist das homogene lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung ist $\vec{x} = \vec{0}$, die sogenannte triviale Lösung.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade größer als Null, d.h. $r < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen. Sie bilden einen $(n-1)$-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

Bevor wir uns mit dem inhomogenen Fall beschäftigen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Wir bestimmen die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und den Rang der Koeffizientenmatrix A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

$$\begin{array}{l|ccc|c|l}
1) & \boxed{1 \quad 3 \quad -1 \quad 0} & & & & (-3)\ (-2)\ (-2) \\
 & 3 & 4 & 0 & 0 & \\
 & 2 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 2 & -4 & 4 & 0 & \\
\hline
2) & & \boxed{-5 \quad 3 \quad 0} & & & (-1)\ (-2) \\
 & & -5 & 3 & 0 & \\
 & & -10 & 6 & 0 & \\
\hline
 & & & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
 & & & \cancel{0} & \cancel{0} &
\end{array}$$

Zunächst lesen wir aus dem Schema $Rg(A) = 2$ ab. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt $3-2=1$, d.h. ein Parameter ist frei wählbar.

Rückwärtsauflösen: $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$

Einsetzen in 2) : $x_2 = \frac{3}{5}t$

Einsetzen in 1) : $x_1 = -\frac{4}{5}t$

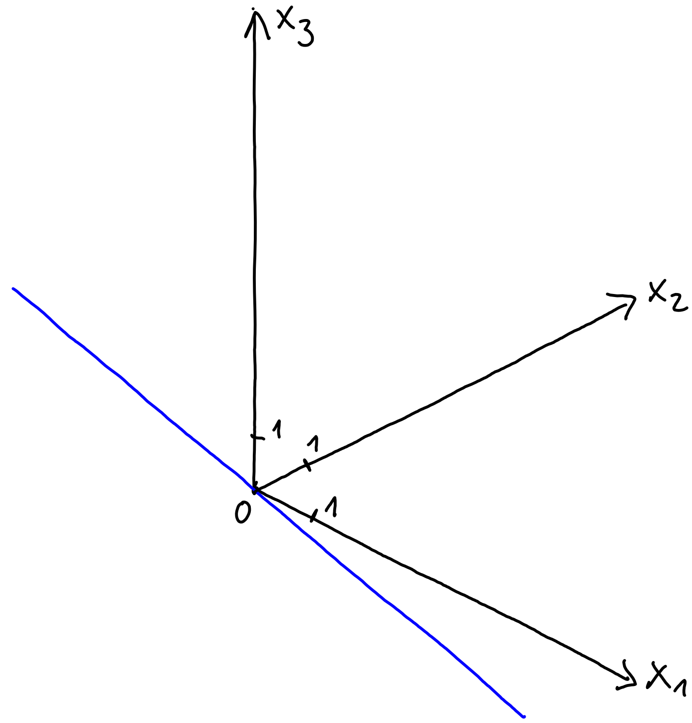
Wir schreiben die Lösungen als Vektor auf:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}t \\ -\frac{3}{5}t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$\mathbb{L} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösungsmenge ist also ein 1-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^3$, geometrisch also eine Gerade durch den Ursprung.



Als nächstes betrachten wir den Fall $\vec{b} \neq \vec{0}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhalten wir also allgemein ein Schema der Form:

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
(x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & & & & x_n) & \\
1 & * & \cdots & & & & & & \cdots & * & d_1 \\
0 & 1 & * & \cdots & & & & & \cdots & * & d_2 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & & \cdots & * & d_3 \\
0 & \cdots & & 0 & 1 & * & \cdots & & \cdots & * & d_4 \\
0 & \cdots & & & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * & d_5 \\
\vdots & & & & & 0 & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & 0 & 1 & * \cdots & * & d_r \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & \cdots & 0 & d_m
\end{array}
$$

Wir bezeichnen mit $(A, \vec{b})$ diejenige $m \times (n+1)$-Matrix, deren erste n Spalten die Matrix A und deren letzte Spalte der Vektor $\vec{b}$ ist. Der Rang von $(A, \vec{b})$ ist dann gleich dem Rang der Matrix, die aus dem Endschema des Gauß-Algorithmus erweitert um die umgeformte rechte Seite besteht und im Folgenden mit $(\tilde{A}, \vec{d})$ bezeichnet wird. Den Rang von $\tilde{A}$ und den Rang von $(\tilde{A}, \vec{d})$

können wir direkt aus dem Schema ablesen. Dabei können zwei Fälle auftreten.

Gibt es unter den $d_{r+1},\dots,d_m$ (mindestens) eines, das von Null verschieden ist, so gilt $Rg(\tilde{A}) \neq Rg((\tilde{A},\vec{d}))$ (genauer $Rg((\tilde{A},\vec{d})) = Rg(\tilde{A})+1$). In diesem Fall hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Gilt $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$, so gilt $Rg(\hat{A}) = Rg((\hat{A},\vec{d}))$ und das lineare Gleichungssystem ist lösbar mit $(n-r)$ Freiheitsgraden.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade gleich Null, d.h. $n=r$, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Ist $n > r$, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Sie bilden einen sogenannten affin linearen Teilraum der Dimension $n-r$, d.h. einen linearen Teilraum, der mittels eines Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ "an die richtige Stelle verschoben wird" (geometrisch z.B. eine Gerade (oder Ebene), die nicht durch den Ursprung verläuft). Diese Beobachtung legt nahe, dass es auch einen Zusammenhang zwischen der Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, und dem zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{0}$ mit derselben Koeffizientenmatrix A gibt. Bevor wir dies genauer untersuchen, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhält man am Ende folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -5 \\ & & 1 & 3 \end{array}$$

Daraus lässt sich nun ablesen:

- $Rg(A) = Rg(A,\vec{b}) = 3$
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist Null
- Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhält man am Ende folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & & 0 & -6 \end{array}$$

Daraus lässt sich nun ablesen:

- $Rg(A) = 2 \neq Rg(A, \vec{b}) = 3$
- Das Gleichungssystem ist nicht lösbar

Beispiel: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus erhält man am Ende folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \\ \hline & & 0 & 0 \end{array}$$

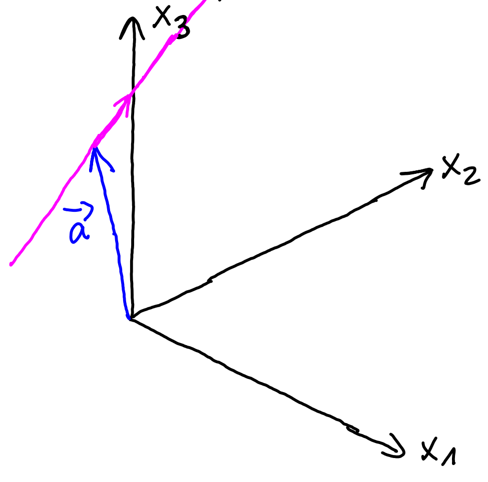
Daraus lässt sich nun ablesen:

- $Rg(A) = Rg(A, \vec{b}) = 2$
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist 1
- Es gibt unendlich viele Lösungen; die Lösungsmenge ist ein 1-dimensionaler affin-linearer Teilraum des $\mathbb{R}^3$

Rückwärtsauflösen liefert: $x_3 = 2$, $x_2 = t$, $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$; $t \in \mathbb{R}$,

d.h. $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometrisch beschreibt die Lösungsmenge also eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die durch den Zielpunkt des Ortsvektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft.



Der Zusammenhang zwischen Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x}=\vec{b}$ mit $\vec{b}\neq\vec{o}$ und des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $A\vec{x}=\vec{o}$ lässt sich relativ einfach einsehen.

Satz: Sei $\vec{a}$ eine beliebige feste Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$. Dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{\vec{a}+\vec{y} : A\vec{y}=\vec{o}\}$.

denn:

Für ein beliebiges $\vec{y}$ mit $A\vec{y}=\vec{o}$ gilt:

$A(\vec{a}+\vec{y}) = A\vec{a}+A\vec{y} = \vec{b}+\vec{o}=\vec{b}$, d.h. $\vec{a}+\vec{y}$ Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$.

Ist $\vec{x}$ eine beliebige Lösung von $A\vec{x}=\vec{b}$, so gilt für $\vec{y}=\vec{x}-\vec{a}$:

$A\vec{y} = A(\vec{x}-\vec{a}) = A\vec{x}-A\vec{a} = \vec{b}-\vec{b}=\vec{o}$ und somit $\vec{x}=\vec{a}+\vec{y}$ mit $A\vec{y}=\vec{o}$.

Beispiel: Wir betrachten noch einmal das letzte Beispiel

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}$

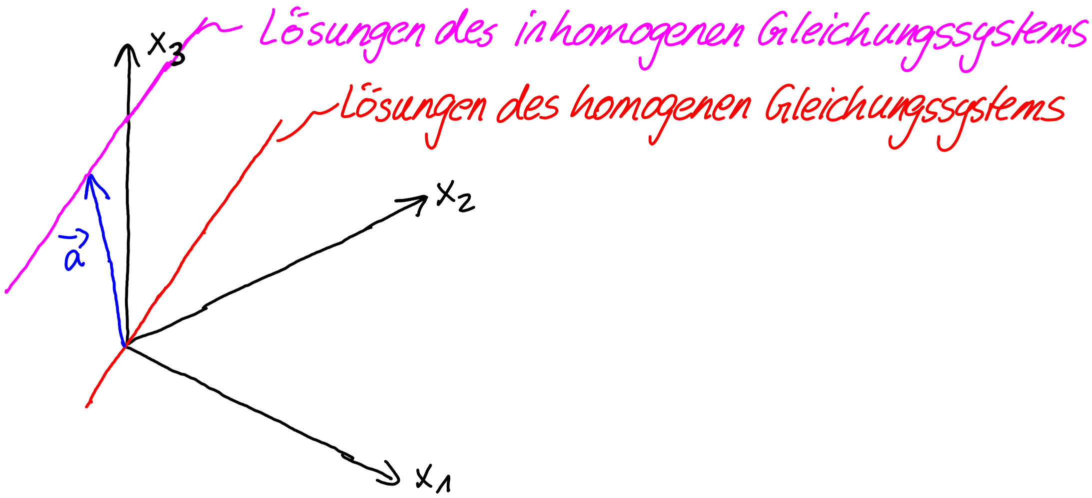
Das zugehörige homogene Gleichungssystem lautet

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nach Durchführung des Gauß-Algorithmus

erhält man das Schema $\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ & & 1 & 0 \end{array}$

d.h. nach Rückwärtsauflösen $x_3=0$, $x_2=t$, $x_1=-\frac{1}{2}t$ und

somit die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}$, einen 1-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^3$, d.h. geometrisch eine Gerade durch den Ursprung, die parallel zu der Geraden verläuft, die die Lösungsmenge des inhomogenen Systems beschreibt.



Inverse Matrizen

Wir haben bereits festgestellt, dass es einige Ähnlichkeiten bei den Rechenoperationen für Matrizen zu denen mit reellen Zahlen gibt. So spielt z.B. die Einheitsmatrix die Rolle der 1 bei der Matrizenmultiplikation.

Betrachten wir im Bereich der reellen Zahlen unter der Bedingung $a \neq 0$ die Gleichung $ax = 1$, so wissen wir, dass $x = a^{-1} = \frac{1}{a}$ die eindeutige Lösung dieser Gleichung ist. a^{-1} ist das zu a inverse Element bezüglich der Multiplikation reeller Zahlen.

Entsprechend sucht man für eine Matrix A eine Matrix X, so dass $A \cdot X = E$ gilt. Gibt es eine solche Lösung X, dann wird diese mit A^{-1} bezeichnet. A^{-1} heißt dann die zu A inverse Matrix. Wir fragen uns nun, unter welchen Bedingungen an die Matrix A eine inverse Matrix A^{-1} existiert. Die Antwort auf diese Frage ist leider etwas komplizierter als bei den reellen Zahlen.

Als erste Bedingung setzen wir für A voraus, dass A eine quadratische Matrix ist, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bevor wir an Hand von Beispielen weitere Bedingungen erarbeiten, überlegen wir zunächst allgemeiner, wie man das Lösen einer Matrixgleichung der Form $A \cdot X = B$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und der gesuchten Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ auf das Lösen von p linearen Gleichungssystemen zurückführen kann. Dazu bezeichnen wir wieder mit $\vec{a}^{\,i}$, $i=1,\dots,m$, die Zeilenvektoren der Matrix A und mit $\vec{x}_k$, $k=1,\dots,p$, die Spaltenvektoren der Matrix X.

Dann lässt sich die Produktmatrix $A \cdot X$ schreiben als

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_p \rangle \\ \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_p \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_1 \rangle & \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_p \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $A \cdot X = B$ ist nun äquivalent dazu, dass die Spalten von $A \cdot X$ mit den entsprechenden Spalten von B übereinstimmen müssen, d.h. es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_1 \rangle \\ \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_2 \rangle \\ \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_p \rangle \\ \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_p \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_p \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{mp} \end{pmatrix}$$

Nun ist aber $\begin{pmatrix} \langle \vec{a}^{\,1}, \vec{x}_j \rangle \\ \langle \vec{a}^{\,2}, \vec{x}_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}^{\,m}, \vec{x}_j \rangle \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}_j$.

Bezeichnen wir die Spaltenvektoren der Matrix B mit $\vec{b}_k$, $k=1,\dots,p$, so erhalten wir die p linearen Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A \vec{x}_2 = \vec{b}_2$, $\dots$, $A \cdot \vec{x}_p = \vec{b}_p$, die alle dieselbe Koeffizientenmatrix A haben. Gleichungssgsteme mit übereinstimmender Koeffizientenmatrix lassen sich simultan mit dem Gauß-Algorithmus lösen. Wie das funktioniert, betrachten wir an einem Beispiel.

Beispiel: Gesucht ist die Matrix $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass $A \cdot X = B$ gilt, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach unseren obigen Überlegungen ist das Lösen von $A\cdot X = B$ äquivalent zum Lösen der drei linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da die Rechenoperationen im Gauß-Algorithmus nur von den Einträgen der Koeffizientenmatrix abhängen, werden nun die drei verschiedenen rechten Seiten simultan im Schema mitgeführt.

$$\begin{array}{ccc|c:c:c|l}
\boxed{1} & 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & (-3) \\
3 & -1 & 2 & 2 & 3 & 2 & \\
0 & 7 & -2 & 1 & 1 & -1 & \\
\hline
 & \boxed{-7} & 8 & -10 & 0 & 2 & (1) \\
 & 7 & -2 & 1 & 1 & -1 & \\
\hline
 & & 6 & -9 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Rückwärtsauflösen der drei Gleichungssysteme liefert:

1. System	2. System	3. System
$x_{31} = -\frac{3}{2}$	$x_{32} = \frac{1}{6}$	$x_{33} = \frac{1}{6}$
$x_{21} = -\frac{2}{7}$	$x_{22} = \frac{4}{21}$	$x_{23} = -\frac{2}{21}$
$x_{11} = \frac{11}{7}$	$x_{12} = \frac{20}{21}$	$x_{13} = \frac{11}{21}$

Die Gleichung $A\cdot X = B$ ist somit eindeutig lösbar. Die Lösung ist

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{20}{21} & \frac{11}{21} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Wir kommen nun auf die Frage zurück, unter welchen Bedingungen eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Inverse A^{-1} besitzt. Dazu betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir untersuchen die Lösbarkeit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist wieder eine Matrixgleichung wie in unserem letzten Beispiel. Da die Spaltenvektoren der Einheitsmatrix gerade die kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ sind, entspricht dem Lösen der Matrixgleichung das Lösen der drei linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1 \,,\quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2 \,,\quad A\vec{x}_3 = \vec{e}_3 \,.$$

Wir wenden wieder den Gauß-Algorithmus simultan auf die drei Gleichungssysteme an.

$$\begin{array}{ccc|c:c:c|l}
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & (-\frac{1}{2}) \\
1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & (\frac{2}{5}) \\
 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \frac{1}{2} \\
 & \frac{5}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdot \frac{2}{5} \\
 & & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \cdot 5 \\
\hline
1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\
 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \\
 & & 1 & -1 & 2 & 5 &
\end{array}$$

Man sieht:

$Rg(A) = Rg(A, \vec{e}_1) = Rg(A, \vec{e}_2) = Rg(A, \vec{e}_3) = 3$

Alle drei linearen Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar.

1. System	2. System	3. System
$x_{31} = -1$	$x_{32} = 2$	$x_{33} = 5$
$x_{21} = -1$	$x_{22} = 2$	$x_{23} = 4$
$x_{11} = 0$	$x_{12} = 1$	$x_{13} = 2$

Die Matrix A besitzt also eine Inverse A^{-1}. Sie ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $A\cdot X = E$, d.h.

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Beispiel:</u> Gegeben sei die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Wir untersuchen, ob es zu B eine inverse Matrix gibt, d.h. ob die Gleichung $B\cdot X = E$ lösbar ist. Dazu wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die drei linearen Gleichungssysteme $B\vec{x}_1 = \vec{e}_1$, $B\vec{x}_2 = \vec{e}_2$, $B\vec{x}_3 = \vec{e}_3$ an.

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & (3)\ (-4) \\
-6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
8 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & (\frac{5}{6}) \\
 & 0 & -5 & -4 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & 6 & 3 & 1 & 0 & \\
 & & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} & 1 &
\end{array}$$

Man sieht:

$Rg(B) = 2 \neq Rg(B,\vec{e}_1) = Rg(B,\vec{e}_2) = Rg(B,\vec{e}_3) = 3$

Die linearen Gleichungssysteme sind nicht lösbar. Die Matrix B besitzt keine Inverse.

Wie wir in den Beispielen gesehen haben, hängt die Existenz einer Inversen von der Lösbarkeit der entstehenden Gleichungssysteme ab. Die Lösbarkeit ist nur dann gewährleistet, wenn die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang besitzt (d.h. $Rg(A) = n$). Dann gilt auch $Rg(A) = Rg(A,\vec{e}_i) = n$ für alle $i = 1,\dots,n$, und die Lösungen der linearen Gleichungssysteme sind eindeutig, d.h. in die-

sem Fall besitzt die Matrix A eine eindeutig bestimmte Inverse.
Ist $Rg(A) < n$, so gilt für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ $Rg(A, \vec{e}_i) > Rg(A)$.
Damit ist mindestens eins der entstehenden linearen Gleichungssysteme nicht lösbar und die Gleichung $A \cdot X = E$ besitzt keine Lösung, d.h. A besitzt keine Inverse.

Zusammenfassend halten wir fest:

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt regulär, wenn eine eindeutig bestimmte Matrix A^{-1} existiert, die die Gleichung $A \cdot A^{-1} = E$ erfüllt. A^{-1} heißt dann die zu A inverse Matrix. Ist A nicht regulär, so heißt A auch singulär.

In dem folgenden Satz sind die Bedingungen für die Regularität einer Matrix angegeben.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A ist genau dann regulär, wenn A vollen Rang hat, d.h. $Rg(A) = n$ gilt.

Im Folgenden halten wir einige wichtige Eigenschaften inverser Matrizen fest.

Satz: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre Matrizen mit den Inversen A^{-1} und B^{-1}. Dann gilt:

1) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, d.h. die Rechtsinverse stimmt mit der Linksinversen überein. (Dies ist zunächst nicht selbstverständlich, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.)
2) $(A^{-1})^{-1} = A$. Die inverse Matrix zu A^{-1} ist A.
3) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

denn:

zu 1) Wir bezeichnen zunächst mit A_R^{-1} bzw. A_L^{-1} die Rechts- bzw. Linksinverse und zeigen $A_R^{-1} = A_L^{-1}$. Es gilt:

$$A_L^{-1} = A_L^{-1} \cdot \underbrace{(A \cdot A_R^{-1})}_{=E} = \underbrace{(A_L^{-1} \cdot A)}_{=E} \cdot A_R^{-1} = A_R^{-1}$$

zu 2) $A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = E$ kann nur gelten für $(A^{-1})^{-1} = A$, da die Inverse eindeutig bestimmt ist.

zu 3) Es gilt: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{=E} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$, also ist $(B^{-1} A^{-1})$ Inverse zu $(A \cdot B)$.

Wir erinnern uns nun noch daran, was wir im Zusammenhang mit der Cramerschen Regel über die eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme festgehalten haben.

Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen für n Unbekannte ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante, d.h. die Determinante der Koeffizientenmatrix A (kurz $\det(A)$) ungleich Null ist. Damit haben wir ein weiteres Kriterium für die Regularität einer Matrix zur Verfügung. Wir fassen die möglichen Charakterisierungen für die Regularität zusammen.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A \text{ regulär} &\iff A \text{ invertierbar, d.h. } A^{-1} \text{ existiert} \\
&\iff Rg(A) = n \\
&\iff \text{Alle Spaltenvektoren von } A \text{ sind linear unabhängig} \\
&\iff \text{Alle Zeilenvektoren von } A \text{ sind linear unabhängig} \\
&\iff \det(A) \neq 0
\end{aligned}
$$

Beispiel: Wir untersuchen, ob $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ regulär ist.

$$\det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-92) - 5 \cdot (186) = 654 \neq 0$$

Also ist die Matrix regulär.

Kennt man die zu einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inverse Matrix A^{-1}, so lassen sich alle Gleichungssysteme der Form

$A \cdot X = B$ mit $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ Matrix der Unbekannten

unmittelbar lösen: $A \cdot X = B \quad | \cdot A^{-1}$ von links

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. In einem früheren Beispiel haben wir bereits $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ berechnet.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Matrixgleichung $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ist

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 13 \\ 3 & 11 & 17 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Matrixgleichung $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$$Y = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 1 & 8 \\ 10 & -3 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$