2. Matrizen – Teil 1

In diesem Kapitel werden wir zunächst festlegen, was unter einer Matrix zu verstehen ist und wie Rechenoperationen für Matrizen definiert sind. Darüberhinaus beschäftigen wir uns mit einigen Interpretationen in wirtschaftswissenschaftlichen Zusammenhängen.

Definition: Ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Elementen aus $\mathbb{R}$ mit m Zeilen und n Spalten heißt $(m \times n)$-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ik}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

$$\uparrow$$
$$k\text{-te Spalte}$$

Mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnen wir die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen.

Die a_{ik}, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$ heißen Elemente der Matrix. Dabei ist der 1. Index immer der Zeilenindex, der 2. Index immer der Spaltenindex. Das Element a_{ik} steht also im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile mit der k-ten Spalte.

Andere gängige Bezeichnungen sind auch $(a_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}$, $(a_{ik})_{m \times n}$ oder auch einfach (a_{ik}), wenn die Zeilen- und Spaltenzahl aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Ist A eine $(n \times n)$-Matrix, so heißt A auch quadratische Matrix.

Beispiel: In einer Matrix können z.B. die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems stehen. Die zugehörige Matrix heißt dann Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems.

Die zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \phantom{{}-2x_4} &= -1 \end{aligned}$$

zugehörige Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Ein Unternehmen habe 4 Filialen F_1, F_2, F_3 und F_4, von denen jede 9 verschiedene Güter $G_1, G_2, \dots, G_9$ verkauft. Die Anzahlen a_{ik} verkaufter Güter G_i in Filiale F_k in einer festgelegten Zeitperiode lassen sich z.B. in einer Tabelle angeben.

	F_1	F_2	F_3	F_4
G_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
G_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
G_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_9	a_{91}	a_{92}	a_{93}	a_{94}

a_{23} gibt an, wie viel von G_2 in F_3 verkauft wurden. Dagegen gibt a_{32} an, wie viel von G_3 in F_2 verkauft wurden.

Statt in einer Tabelle kann man die Anzahlen a_{ik} auch in Form einer Matrix angeben.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} \end{pmatrix}$$

Der Zeilenindex gibt hier das Gut, der Spaltenindex die Filiale an. $a_{72} = 125$ würde z.B. bedeuten, dass von Gut 7 in Filiale 2 in der Zeitperiode 125 Stück verkauft wurden.

Wir haben bisher nur gesehen, dass man Matrizen benutzen kann, um in ihr z.B. Informationen statt in einer Tabelle anzugeben.

Der tatsächliche Nutzen besteht jedoch darin, dass es Regeln für das Rechnen und den Umgang mit Matrizen gibt.

Wir legen zunächst fest, wann zwei Matrizen gleich sein sollen. Dies ist nur sinnvoll, wenn die Matrizen gleiche Zeilen- und Spaltenzahl haben.

Definition: Seien $A = (a_{ik})_{m \times n}$ und $B = (b_{ik})_{m \times n}$. Dann ist

$$A = B \iff a_{ik} = b_{ik} \text{ für jedes } i \in \{1, ..., m\} \text{ und } k \in \{1, ..., n\}.$$

Die Gleichheit von Matrizen ist also elementweise definiert.

Beispiel: Gibt es $t, u, v, w \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 3t - 4v & 9u + 3v + w \\ 3t - v + w & u + 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 3v + 2w & -t - 2u + w \\ u - v & -6t - v \end{pmatrix} \text{ gilt?}$$

Wenn ja, was ist (sind) die Lösung(en)?

Die Gleichheit der beiden Matrizen ist äquivalent dazu, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} 3t - 4v &= u + 3v + 2w \\ 9u + 3v + w &= -t - 2u + w \\ 3t - v + w &= u - v \\ u + 2w &= -6t - v \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten t, u, v, w. Wir bringen dies zunächst in die standardisierte Form:

$$\begin{aligned} 3t - u - 7v - 2w &= 0 \\ t + 11u + 3v \phantom{{}+ 2w} &= 0 \\ 3t - u \phantom{{}+ v} + w &= 0 \\ 6t + u + v + 2w &= 0 \end{aligned}$$

Wir lösen das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus. Nach Vertauschen der ersten beiden Gleichungen erhalten wir das folgende Rechenschema:

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
1) & \boxed{1} & \boxed{11} & \boxed{3} & \boxed{0} & (-3)\ (-3)\ (-6) \\
 & 3 & -1 & -7 & -2 & \\
 & 3 & -1 & 0 & 1 & \\
 & 6 & 1 & 1 & 2 & \\
\hline
2) & & \boxed{-34} & \boxed{-16} & \boxed{-2} & (-1)\ \left(-\frac{65}{34}\right) \\
 & & -34 & -9 & 1 & \\
 & & -65 & -17 & 2 & \\
\hline
3) & & & \boxed{7} & \boxed{3} & \\
 & & & \frac{231}{17} & \frac{99}{17} & \cdot \frac{17}{33} \\
\hline
 & & & 7 & 3 & (-1) \\
 & & & 7 & 3 & \\
\hline
4) & & & & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Rückwärtsauflösen:

Aus 4) folgt $w = s \in \mathbb{R}$ frei wählbarer Parameter.

Einsetzen in 3) liefert

$$v = -\frac{3}{7}s$$

Einsetzen in 2) liefert

$$u = \frac{1}{7}s$$

Einsetzen in 1) liefert

$$t = -\frac{2}{7}s$$

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ sind die beiden Matrizen für $t = -\frac{2}{7}s$, $u = \frac{1}{7}s$, $v = -\frac{3}{7}s$ und $w = s$ gleich.

Probe: $\begin{pmatrix} 3t - 4v & 9u + 3v + w \\ 3t - v + w & u + 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7}s & s \\ \frac{4}{7}s & \frac{15}{7}s \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u + 3v + 2w & -t - 2u + w \\ u - v & -6t - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7}s & s \\ \frac{4}{7}s & \frac{15}{7}s \end{pmatrix}$

Wir kommen nun zu den Rechenoperationen für Matrizen.

Definition: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ik})_{m \times n}$. Dann ist die Multiplikation der Matrix A mit dem Skalar α definiert durch

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ik})_{m \times n}.$$

Jedes Matrixelement wird also mit α multipliziert.

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 3 & 11 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 & -12 \\ 9 & 33 & 3 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{16} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -6 & -8 & 12 \\ 5 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

Definition: Seien $A = (a_{ik})_{m \times n}$ und $B = (b_{ik})_{m \times n}$. Dann ist die Addition bzw. Subtraktion der Matrizen erklärt durch:

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ik} - b_{ik})_{m \times n}.$$

Es werden also jeweils die Elemente mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex addiert bzw. subtrahiert.

Wichtig! Addition und Subtraktion sind nur für Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl definiert!

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+(-2) & 7+3 & -3+4 \\ 9+6 & 5+(-2) & -1+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 15 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-(-2) & 7-3 & -3-4 \\ 9-6 & 5-(-2) & -1-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Welchen Sinn solche Rechenoperationen in Sachzusammenhängen machen können, erschließen wir uns an einem Beispiel.

Beispiel: Das Zentrallager einer Firma liefert an seine vier Filialen in Wuppertal, Remscheid, Solingen und Schwelm jeweils fünf verschiedene Modelle von Computern. Der Lieferumfang für den Monat Januar wird durch folgende Tabelle gegeben.

Filiale \ Typ	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
Wuppertal	20	30	30	10	10
Remscheid	20	25	30	15	10
Solingen	15	20	25	10	10
Schwelm	20	20	30	15	15

Zunächst schreiben wir die gegebenen Informationen in Form einer Matrix $A = (a_{ik})_{4 \times 5}$ auf, wobei a_{ik} die Anzahl der zur Filiale F_i, $i = 1, .., 4$ gelieferten Computer des Modells k, $k = 1, .., 5$ bedeutet. Dabei legen wir fest, dass F_1-Wuppertal, F_2-Remscheid, F_3-Solingen, F_4-Schwelm sein soll.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 30 & 15 & 10 \\ 15 & 20 & 25 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 30 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

In den Monaten Februar bis November werden die Filialen jeweils mit den gleichen Stückzahlen beliefert wie im Januar, im Dezember erhalten die Filialen Lieferungen gemäß der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 35 & 20 & 15 \\ 25 & 35 & 40 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 30 & 25 & 15 \\ 30 & 25 & 35 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen diejenige Matrix, die die Lieferumfänge der verschiedenen Modelle für die fünf Filialen für das gesamte Jahr beschreibt: $11 \cdot A + B$

$$= 11 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 30 & 30 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 30 & 15 & 10 \\ 15 & 20 & 25 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 30 & 15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 40 & 35 & 20 & 15 \\ 25 & 35 & 40 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 30 & 25 & 15 \\ 30 & 25 & 35 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 220 & 330 & 330 & 110 & 110 \\ 220 & 275 & 330 & 165 & 110 \\ 165 & 220 & 275 & 110 & 110 \\ 220 & 220 & 330 & 165 & 165 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 40 & 35 & 20 & 15 \\ 25 & 35 & 40 & 20 & 20 \\ 25 & 30 & 30 & 25 & 15 \\ 30 & 25 & 35 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 250 & 370 & 365 & 130 & 125 \\ 245 & 310 & 370 & 185 & 130 \\ 190 & 250 & 305 & \boxed{135} & 125 \\ 250 & 245 & 365 & 185 & 190 \end{pmatrix}$$

z.B. erhält Solingen von Modell 4 im ganzen Jahr 135 Stück.

Wir stellen nun einige Rechenregeln für die Addition von Matrizen und die Multiplikation mit Skalaren zusammen. Die Gültigkeit der Regeln ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen und den entsprechenden Regeln für reelle Zahlen.

Regeln für die Addition von Matrizen

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ diejenige $(m \times n)$-Matrix, deren Einträge alle Null sind. Dann gilt:

$A + B = B + A$ (Kommutativgesetz der Addition)

$(A+B)+C = A+(B+C)$ (Assoziativgesetz der Addition)

$A + \mathcal{O} = A$ (Nullelement der Addition)

$A + (-A) = \mathcal{O}$ (Inverses Element der Addition)

Regeln für die Multiplikation mit Skalaren

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

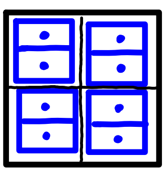
$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

Während die bisher behandelten Rechenoperationen recht einfach sind, ist die Multiplikation von Matrizen komplizierter. Bevor wir eine exakte Definition angeben, betrachten wir zunächst ein einführendes Beispiel.

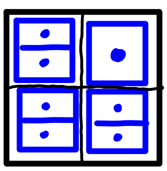
Beispiel: Ein Baumarkt bietet für Kleinteile wie Nägel, Schrauben etc. ein Ordnungssystem an, das aus den Bestandteilen B_1–Korpus, B_2–Schubfächer klein, B_3–Schubfächer groß zu 5 verschiedenen Modellen M_k, $k = 1, 2, \ldots, 5$ zusammengestellt werden kann.

Modell 1



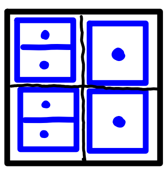
$1 \times B_1$
$4 \times B_2$

Modell 2



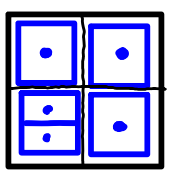
$1 \times B_1$
$3 \times B_2$
$1 \times B_3$

Modell 3



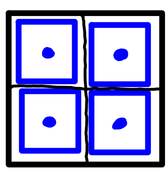
$1 \times B_1$
$2 \times B_2$
$2 \times B_3$

Modell 4



$1 \times B_1$
$1 \times B_2$
$3 \times B_2$

Modell 5



$1 \times B_1$

$4 \times B_3$

Wir stellen den Bedarf b_{ik} an den Bestandteilen B_i, $i = 1, 2, 3$, für die Modelle M_k, $k = 1, \dots, 5$, in einer Matrix B zusammen:

Modellmatrix: $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ein erster Kunde möchte die Modelle in folgenden Stückzahlen kaufen:

$M_1: 20$, $M_2: 15$, $M_3: 10$, $M_4 = 8$, $M_5 = 12$

Wir können dies auch in einer (5×1)-Matrix (Spaltenvektor) zusammenstellen:

Auftragsmatrix (Vektor): $$A = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen, wie viele der jeweiligen Bestandteile er jeweils kaufen muss:

$P_{11}: 1 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 12 = 65$

$P_{21}: 4 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 12 = 153$

$P_{31}: 0 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 107$

Das Ergebnis stellen wir in einer (3×1)-Matrix (Spaltenvektor) zusammen: Produktionsmatrix (Vektor): $P = \begin{pmatrix} 65 \\ 153 \\ 107 \end{pmatrix}$

Man sieht, wie sich die Elemente der Produktionsmatrix als Summen der Produkte von Elementen einer Zeile der Modellmatrix B mit den Elementen der Auftragsmatrix A ergeben.

Wir erweitern das Beispiel, indem wir einen zweiten Kunden betrachten, der die Modelle in den Stückzahlen

$M_1: 14$, $M_2: 9$, $M_3: 11$, $M_4 = 13$, $M_5 = 7$ bestellt.

Wir ergänzen die Auftragsmatrix um eine zweite Spalte zu:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 15 & 9 \\ 10 & 11 \\ 8 & 13 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

Analog berechnen wir für den zweiten Kunden

$P_{12}: 1 \cdot 14 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 7 = 54$

$P_{22}: 4 \cdot 14 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 + 0 \cdot 7 = 118$

$P_{32}: 0 \cdot 14 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 7 = 98$

Für den zweiten Kunden wird somit die Produktionsmatrix erweitert zu:

$$P = \begin{pmatrix} 65 & 54 \\ 153 & 118 \\ 107 & 98 \end{pmatrix}$$

Die zweite Spalte ergibt sich analog zur ersten Spalte durch Verwendung der zweiten Spalte der Auftragsmatrix.

Man kann sich nun leicht vorstellen, wie man das Beispiel um weitere Kunden ergänzen kann.

Prinzipiell haben wir im letzten Beispiel bereits eine Multiplikation von Matrizen durchgeführt, die nun exakt definiert wird.

Definition: Seien $A = (a_{ik})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{ik})_{n \times p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dann ist das Produkt

$$C = (c_{ik})_{m \times p} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

diejenige Matrix, deren Element c_{ik} in der i-ten Zeile und k-ten Spalte das sogenannte innere Produkt (Skalarprodukt) der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B ist, d.h.

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{ij} b_{jk} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Um c_{ik} zu erhalten, muss jede Komponente a_{ij} in der i-ten Zeile von A mit der entsprechenden Komponente b_{jk} in der k-ten Spalte von B multipliziert werden; diese Produkte müssen dann addiert werden.

Achtung! Bei der Multiplikation von Matrizen muss die Anzahl der Spalten der 1. Matrix mit der Anzahl der Zeilen der 2. Matrix übereinstimmen! Sonst ist die Multiplikation nicht definiert.

Die Multiplikation $A \cdot B$ zweier Matrizen lässt sich einfacher in einem Schema durchführen:

2. Matrix

k-te Spalte

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & & b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1k}} & \cdots & b_{1p} \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jp} \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \\
\hline
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{ip} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp}
\end{array}
$$

1. Matrix

i-te Zeile →

Ergebnis

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) + 4\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 & 3\cdot 6 + 4\cdot 7 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot(-2) + 2\cdot(-3) + (-5)\cdot 5 & 0\cdot 6 + 2\cdot 7 + (-5)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 45 \\ -31 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 + 6\cdot 0 & (-2)\cdot 4 + 6\cdot 2 & (-2)\cdot(-1) + 6\cdot(-5) \\ (-3)\cdot 3 + 7\cdot 0 & (-3)\cdot 4 + 7\cdot 2 & (-3)\cdot(-1) + 7\cdot(-5) \\ 5\cdot 3 + 1\cdot 0 & 5\cdot 4 + 1\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 1\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -28 \\ -9 & 2 & -32 \\ 15 & 22 & -10 \end{pmatrix}$$

Achtung! Wie das Beispiel zeigt, sind $A \cdot B$ und $B \cdot A$ (wenn überhaupt definiert) im Allgemeinen verschieden!
Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ!

Im Folgenden wollen wir weitere allgemeingültige Rechenregeln für Matrizen zusammenstellen. Dabei ist jeweils zu beachten, dass die Ordnungen der Matrizen so gewählt werden, dass die angegebenen Rechenoperationen definiert sind, d.h. bei der Addition müssen Zeilen- und Spaltenzahl beider Matrizen übereinstimmen, bei der Multiplikation muss die Spaltenzahl der 1. Matrix mit der Zeilenzahl der 2. Matrix übereinstimmen.

Weitere Rechenregeln für Matrizen

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Dann gilt:

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativgesetz)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann gilt:

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (linksseitiges Distributivgesetz)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Dann gilt:

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (rechtsseitiges Distributivgesetz)

Beispiel: Ein Unternehmen benötigt für die Herstellung dreier Güter G_1, G_2, G_3 vier verschiedene Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4. Bezeichnen wir mit r_{ik} die Menge an Einheiten des Rohstoffes R_i, der zur Herstellung von G_k benötigt wird, so sei die Matrix $R = (r_{ik})_{4 \times 3}$ gegeben durch:

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Planung für die nächsten beiden Zeitperioden sei gegeben durch die Produktionsmatrix $P = (p_{ik})_{3 \times 2}$, wobei p_{ik} die zu produzierende Menge in der k-ten Zeitperiode bezeichnet.

$$P = \begin{pmatrix} 27 & 21 \\ 15 & 24 \\ 23 & 19 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Bedarfsmatrix $B = (b_{ik})_{5\times 2}$, wobei b_{ik} den Bedarf an Einheiten des Rohstoffes R_i in der k-ten Planungsperiode bezeichnet.

$$B = R \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & 21 \\ 15 & 24 \\ 23 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 407 & 358 \\ 229 & 242 \\ 463 & 452 \\ 376 & 437 \end{pmatrix}$$

Weiter nehmen wir an, dass die Preise $\tilde{p}_k$ für die Rohmaterialien durch die (1×4)-Matrix (Zeilenvektor)

$$\tilde{P} = (20, 15, 10, 25)$$

gegeben ist und berechnen die Kosten, die in den beiden Planungsperioden für die Rohstoffe anfallen durch

$$K = \tilde{P} \cdot B = (20, 15, 10, 25) \cdot \begin{pmatrix} 407 & 358 \\ 229 & 242 \\ 463 & 452 \\ 376 & 437 \end{pmatrix} = (25605, 26235)$$

In der 1. Planungsperiode fallen somit 25605, in der 2. Planungsperiode 26235 Geldeinheiten für die Rohstoffe an.
Insgesamt haben wir zur Ermittlung der Kosten $K = \tilde{P} \cdot (R \cdot P)$ berechnet. Wegen der Gültigkeit des Assoziativgesetzes hätten wir auch $K = (\tilde{P} \cdot R) \cdot P$ rechnen können.

Im Zusammenhang mit der Multiplikation wollen wir zeigen, was unter der Potenz A^n, $n \in \mathbb{N}$, einer Matrix zu verstehen ist. In Analogie zu Potenzen von reellen Zahlen ist $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\text{-mal}}$. Da das Produkt zweier Matrizen nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl der 1. Matrix mit der Zeilenzahl der 2. Matrix übereinstimmt, ist $A^2 = A \cdot A$ nur definiert, wenn A eine quadratische Matrix ist (Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von A).

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist die m-te Potenz von A definiert durch $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\text{-mal}}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Auch wenn die Definition für Potenzen einfach und naheliegend ist, muss man aufpassen, dass man keine Fehler macht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 31 \\ 45 & 36 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^2 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 & 85 \\ 255 & 156 \end{pmatrix}$$

Es ist also $A^2 \cdot B^2 \neq (AB)^2$!

Dies liegt daran, dass für die Multiplikation von Matrizen das Kommutativgesetz nicht gilt: $(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = A \cdot B \cdot A \cdot B$

dürfen nicht vertauscht werden

Aus dem Umgang mit reellen Zahlen wissen wir, dass die Zahl 1 bei der Multiplikation eine besondere Rolle spielt: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
Wir zeigen nun, welche Matrizen diese Rolle bei der Multiplikation von Matrizen übernimmt.

Definition: Die Einheitsmatrix der Ordnung n ist diejenige $(n \times n)$-Matrix E_n (oder auch einfach E, in manchen Büchern auch I_n bzw. I), deren Elemente e_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$, auf der Hauptdiagonalen 1 sind und deren sonstige Elemente alle 0 sind, d.h.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass E die Rolle des Einselementes bei der Multiplikation von Matrizen übernimmt, wobei die Dimensionen zu beachten sind.

Regel: Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so gilt:

$$A \cdot E_n = E_m \cdot A = A$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Aus dem Umgang mit reellen Zahlen wissen wir auch, dass es zu jedem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein inverses Element, nämlich $\frac{1}{\alpha}$ gibt, d.h. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Diese Zusammenhänge sind beim Umgang mit Matrizen deutlich komplizierter und werden an späterer Stelle behandelt (vgl. Inverse Matrizen).

Das folgende Beispiel zeigt, dass auch die Regel im Bereich der reellen Zahlen, wonach ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist, nicht übertragen werden kann.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Zum Schluss des Kapitels wenden wir uns noch einer weiteren Matrixoperation, dem Transponieren einer Matrix zu. Dazu betrachten wir noch einmal das Beispiel auf S. 11.

Beispiel: Im Beispiel S. 11 hatten wir diejenige Matrix R angegeben, in der die Elemente die Mengen an Einheiten des Rohstoffes R_i, $i=1,..,4$, die zur Herstellung des Gutes G_k, $k=1,2,3$, nötig sind, angeben.

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & G_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \end{array}$$

Die gleichen Informationen lassen sich auch an der Matrix R^T ablesen, in der die Zeilen als Spalten aufgeschrieben werden:

$$R^T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array} \end{array}$$

Definition: Sei $A=(a_{ik})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die Transponierte $A^T=(a^T_{ik})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist diejenige Matrix, in der die Zeilen von A nacheinander als Spalten aufgeschrieben werden, d.h.

$$a^T_{ik} = a_{ki} \text{ für alle } i=1,..,n;\ k=1,..,m.$$

Für das Transponieren von Matrizen gelten wieder einige Regeln, wovon nur die letzte nicht offensichtlich ist.

Regeln für das Transponieren von Matrizen

Seien $A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Dann gilt:

$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Wir schauen uns die letzte Regel an einem Beispiel an.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & -7 \\ 10 & -14 & 11 \end{pmatrix} ; \; (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -14 \\ 8 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -14 \\ 8 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 13 \\ 3 & 1 & -1 \\ 14 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Eine besondere Rolle spielen Matrizen, die mit ihrer Transponierten übereinstimmen.

Definition: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt symmetrisch, wenn gilt $A = A^T$,
d.h. wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für alle $i,k = 1,2,\dots,n$.

Beispiel: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$$ sind symmetrisch.

Beispiel: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige $(m \times n)$-Matrix. Wir zeigen, dass a) $A \cdot A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und b) $A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stets symmetrisch sind.

zu a) Wir müssen zeigen, dass $A \cdot A^T = (A \cdot A^T)^T$.

Mit den Rechenregeln für das Transponieren von Matrizen gilt:

$$(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T,$$

also ist $A \cdot A^T$ symmetrisch.

zu b) Wir müssen zeigen, dass $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

Mit den Rechenregeln für das Transponieren von Matrizen gilt:

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, also $A^T \cdot A$ symmetrisch.

Selber versuchen!

Matrizen mit weiteren speziellen Eigenschaften werden später behandelt.