14. Handwerkszeug der Differentialrechnung in mehreren Variablen

In diesem Kapitel werden wir wichtige Methoden für den praktischen Umgang mit Funktionen von zwei Variablen im Zusammenhang mit der Differentialrechnung kennenlernen. Die Anwendungen und Interpretationen werden dabei wenn möglich an Hand ökonomischer Beispiele erläutert.
Bereits in der Analysis I haben wir gesehen, wie wichtig die Kettenregel für die Berechnung von Ableitungen ist. Wir werden uns daher auch für Funktionen von zwei Variablen mit einer sehr allgemeinen Kettenregel beschäftigen, die im Spezialfall wieder die uns bereits bekannten Regeln liefert.
Häufig gibt es Zusammenhänge, in denen eine Funktion nicht in expliziter Form, sondern implizit durch eine Gleichung gegeben ist. Mit Hilfe der impliziten Differentiation, bei der wiederum die Kettenregel eine wichtige Rolle spielt, können wir solche Funktionen weiter untersuchen.

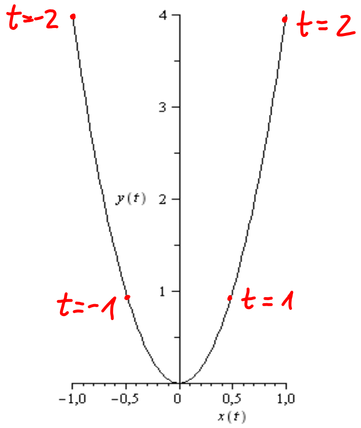
Die Kettenregel

In vielen ökonomischen Modellen werden verkettete Funktionen verwendet. Dabei handelt es sich um Funktionen von einer oder mehreren Variablen, in denen die Variablen selbst wieder Funktionen von einer oder mehreren Variablen sind.
Im letzten Kapitel haben wir bereits einen Spezialfall behandelt, nämlich $f(x,y) = u(v(x,y))$ mit $u: \mathbb{D}_u \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v: \mathbb{D}_v \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Ziel ist eine Regel für die (partielle) Differentiation einer Funktion $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ nach ein bzw. zwei Parametern (Variablen) t bzw. t und s anzugeben, wenn x und y ihrerseits von t bzw. t und s abhängen.
Zur Ergänzung wird die allgemeine Kettenregel für die Differentiation von $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ nach t_j, $j = 1, 2, \dots, m$, angegeben, wenn $x_1, \dots, x_n$ von den Parametern t_j, $j = 1, \dots, m$, abhängen.
Bevor wir allgemeine Regeln formulieren, betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x,y)=x^2y$, wobei die Variablen x und y von einer Variablen t gemäß $x=x(t)=\frac{1}{2}t$, $y=y(t)=t^2$ abhängen. Für jedes $t\in\mathbb{R}$ ist $(x(t),y(t))$ ein Punkt in der xy-Ebene und $(x(t),y(t),z(t))$ mit $z(t)=f(x(t),y(t))$ ein Punkt der durch die Funktion beschriebenen Fläche.

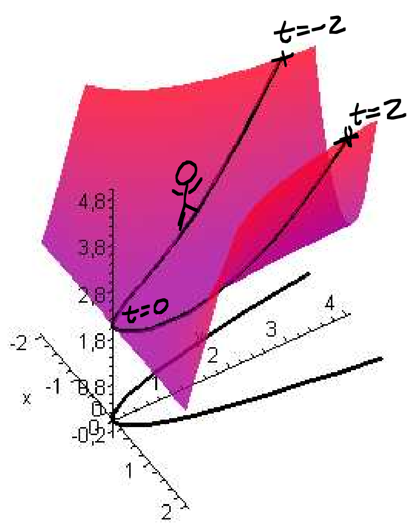
Wir gewinnen zunächst mit Hilfe einer Wertetabelle eine Vorstellung davon, welche Punkte in der xy-Ebene durch $(x(t),y(t))$ beschrieben werden.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$x(t)$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	...
$y(t)$	9	4	1	0	1	4	9	...



Es handelt sich hier also um eine parabelförmige Kurve, bei der man zusätzlich noch Informationen notieren kann, welcher Variablenwert (man sagt auch Parameterwert) von t zu bestimmten Punkten gehört.

Jedem $(x(t),y(t))$ wird nun durch die Funktionsvorschrift ein Funktionswert (eine "Höhe") zugeordnet. Dies bedeutet, dass man Senkrechten zu der xy-Ebene durch die Kurvenpunkte $(x(t),y(t))$ errichtet und diese mit der durch $f(x,y)$ beschriebenen Fläche schneidet. Dadurch wird aus der Fläche eine Kurve ausgeschnitten, die allerdings in der Regel keine ebene Kurve mehr ist, sondern im Allgemeinen eine Raumkurve.



Untersucht man nun die Funktion in Abhängigkeit vom Parameter t, so bedeutet dies anschaulich, dass man auf dieser Kurve ("einem bestimmten Pfad im Gebirge") entlangwandert. Die Steigung dieser Kurve ist also die Ableitung der Funktion nach t, d.h. die momentane Änderungsrate bzgl. t. Diese berechnen wir zunächst, indem wir in die Funktionsgleichung die Ausdrücke für x und y in Abhängigkeit von t einsetzen.

$$f(x(t), y(t)) = \left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 \cdot t^2 = \tfrac{1}{4}t^4 = \tilde{f}(t)$$

Da dies nur noch von t abhängt, können wir nun direkt nach t differenzieren, d.h.

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = t^3$$

Um nun den Zusammenhang mit Ableitungen von f genauer analysieren zu können, schreiben wir zunächst einige Ausdrücke getrennt auf.

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{2} \qquad \frac{dy}{dt}(t) = 2t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) = 2x(t)y(t) \qquad \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) = (x(t))^2$$

und berechnen

$$\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t))}^{\text{Äußere Abl. von } f \text{ nach } x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}(t)}_{\text{Innere Abl. von } x \text{ nach } t} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t))}^{\text{Äußere Abl. von } f \text{ nach } y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}(t)}_{\text{Innere Abl. von } y \text{ nach } t}$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2}t \cdot t^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}t^2 \cdot 2t = t^3 = \frac{df}{dt}(x(t), y(t))$$

Statt die Ausdrücke für $x(t)$ und $y(t)$ einzusetzen und anschließend nach t zu differenzieren, erhalten wir dasselbe Ergebnis, wenn wir

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y(t)}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)$$ berechnen.

Bevor wir eine allgemeine Regel formulieren, betrachten wir noch ein Beispiel mit etwas komplizierteren Funktionen.

Beispiel: Wir betrachten eine Nachfragefunktion

$$N(p,m) = p^{-1.5} \cdot m^2$$

in Abhängigkeit vom Preis p und Einkommen m.

Wir behandeln nun das Problem, dass sich Preis und Einkommen mit der Zeit t ändern, d.h. Funktionen $p(t)$, $m(t)$ der Zeit t sind, z.B. $p(t) = 1.05^t$, $m(t) = 1.07^t$.

Setzt man dies in den Funktionsausdruck für die Nachfrage ein, so erhält man

$$N(p(t), m(t)) = (1.05^t)^{-1.5} \cdot (1.07^t)^2$$
$$= 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} = \tilde{N}(t),$$

d.h. eine Funktion, die nur von der Variablen (dem Parameter) t abhängt. Die Frage nach der momentanen Änderungsrate der Nachfrage mit der Zeit t lässt sich nun mit den Methoden der Analysis 1 beantworten, wenn wir beachten, dass gilt:

$$1.05^{-1.5t} = e^{-1.5t \cdot \ln(1.05)}, \quad 1.07^{2t} = e^{2t \cdot \ln(1.07)}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{d\tilde{N}}{dt}(t) = -1.5 \cdot \ln(1.05) \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t} + 1.05^{-1.5t} \cdot 2 \cdot \ln(1.07) \cdot 1.07^{2t}$$
$$= \underbrace{(2 \cdot \ln(1.07) - 1.5 \cdot \ln(1.05))}_{\approx 0.06213\ldots} \cdot 1.05^{-1.5t} \cdot 1.07^{2t}$$

Die momentane Änderungsrate der Nachfrage in Abhängigkeit von der Zeit ist also in diesem Fall positiv, d.h. die Nachfrage ist bzgl. der Zeit t streng monoton wachsend.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie man direkt ohne Einsetzen von $p(t)$ und $m(t)$ die momentane Änderungsrate $\frac{dN}{dt}(p,m)$ bestimmen kann. Um den oben erhaltenen Ausdruck genauer analysieren zu können, schreiben wir uns zunächst einige Ableitungsausdrücke wieder explizit auf. Es gilt:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \ln(1.05)\cdot 1.05^t \qquad \frac{dm}{dt}(t) = \ln(1.07)\cdot 1.07^t$$

$$\frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t),m(t)) = -1.5\cdot(p(t))^{-2.5}\cdot(m(t))^2 = -1.5\cdot 1.05^{-2.5t}\cdot 1.07^{2t}$$

$$\frac{dN}{dm(t)}(p(t),m(t)) = 2\cdot(p(t))^{-1.5}\cdot m(t) = 2\cdot 1.05^{-1.5t}\cdot 1.07^t$$

Damit berechnen wir

$$\frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t),m(t))\cdot\frac{dp}{dt}(t) + \frac{\partial N}{\partial m(t)}(p(t),m(t))\cdot\frac{dm}{dt}(t)$$

$$= -1.5\cdot 1.05^{-2.5t}\cdot 1.07^{2t}\cdot \ln(1.05)\cdot 1.05^t$$

$$+ 1.05^{-1.5t}\cdot 2\cdot 1.07^t\cdot \ln(1.07)\cdot 1.07^t$$

$$= (2\cdot\ln(1.07) - 1.5\ln(1.05))\cdot 1.05^{-1.5t}\cdot 1.07^{2t} = \frac{dN}{dt}(p(t),m(t))$$

Statt die Ausdrücke für $p(t)$ und $m(t)$ einzusetzen und anschließend nach t zu differenzieren, kann man – analog zum vorhergehenden Beispiel

$$\frac{\partial N}{\partial p(t)}(p(t),m(t))\cdot\frac{dp}{dt}(t) + \frac{\partial N}{\partial m(t)}(p(t),m(t))\cdot\frac{dm}{dt}(t) \text{ berechnen.}$$

Man sieht, dass dies formelmäßig genauso aufgebaut ist wie im ersten Beispiel.

Tatsächlich kann man folgende allgemeine Regel formulieren.

Spezielle Kettenregel: Sei $f(x,y)$ stetig partiell differenzierbar und $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{df}{dt}(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t).$$

Wenn die Funktionen $x(t), y(t)$ explizit gegeben sind, ist es prinzipiell immer möglich, zuerst die Ausdrücke in die Funktion einzusetzen, was aber häufig unpraktisch ist. Mit der Kettenregel lassen sich zunächst allgemeine Darstellungen herleiten, in die man dann gegebenenfalls spezielle Funktionen einsetzen kann.

Beispiel: Wir betrachten wieder die landwirtschaftliche Produktionsfunktion $Y(K,L) = A \cdot K^a \cdot L^b$,
wobei nun das Kapital K und der Arbeitseinsatz L Funktionen der Zeit t sein sollen mit $K, L > 0$.
Dann ist (in abgekürzter Schreibweise):

$$
\begin{aligned}
Y_t &= Y_K \cdot K_t + Y_L \cdot L_t \\
&= A a K^{a-1} L^b + A b K^a L^{b-1} \\
&= A K^a L^b \cdot \left\{ a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} \right\} \\
&= Y \cdot \left\{ a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} \right\}
\end{aligned}
$$

Wenn wir für $Y \neq 0$ die Gleichung durch Y dividieren, erhalten wir:

$$\frac{Y_t}{Y} = a \cdot \frac{K_t}{K} + b \cdot \frac{L_t}{L} .$$

Die relative Änderungsrate $\frac{Y_t}{Y}$ des Outputs bzgl. der Zeit ist also eine gewichtete Summe der Änderungsraten von Kapital und Arbeitseinsatz.

Beispiel: $u(x,s)$ sei eine Funktion, die das gesamte Wohlbefinden einer Gesellschaft misst, wobei x ein Index für die in der Gesellschaft produzierten und konsumierten Güter und s ein Maß für den Verschmutzungsgrad der Umwelt bezeichnet (vgl. auch Beispiel im letzten Kapitel).
u sei stetig partiell differenzierbar für $x, s > 0$ und für die partiellen Ableitungen gelte $u_x(x,s) > 0$, $u_s(x,s) < 0$.
Wir nehmen nun an, dass der Grad s der Umweltbelastung eine differenzierbare, streng monoton wachsende Funktion von x ist, d. h.

$$s = s(x) \quad \text{mit} \quad \frac{ds(x)}{dx} > 0 .$$

In diesem Fall ist dann $u(x, s(x)) = \tilde{u}(x)$ eine Funktion, die nur von x abhängt. Wir bestimmen nun allgemein eine notwendige Bedingung dafür, dass $\tilde{u}(x)$ an einer Stelle $x^* > 0$ ein Maximum besitzt.
Notwendige Bedingung für ein Maximum von $\tilde{u}$ an einer Stelle x^* ist (vgl. Analysis I): $\frac{d\tilde{u}}{dx}(x^*) = 0$
Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}(x^*) = 0 \iff \frac{du}{dx}(x^*, s(x^*)) = 0$$

$$\iff u_x(x^*, s(x^*)) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}(x^*)}_{=1} + u_s(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{ds}{dx}(x^*) = 0$$

$$\iff u_x(x^*, s(x^*)) + u_s(x^*, s(x^*)) \cdot \frac{ds}{dx}(x^*) = 0$$

Als spezielles Beispiel betrachten wir die Funktion

$$u(x,s) = \ln(x^2+s^2) - 2\ln(s) \text{ mit } s = s(x) = \sqrt[3]{3x^4+16}\,.$$

Für $x > 0$ ist auch $s > 0$ und es gilt:

$$u_x(x,s) = \frac{2x}{x^2+s^2} > 0\,, \quad u_s(x,s) = \frac{2s}{x^2+s^2} - \frac{2}{s} = \frac{-2x^2}{(x^2+s^2)\cdot s} < 0$$

$$\frac{ds}{dx}(x) = \frac{1}{3}\cdot(3x^4+16)^{-2/3} \cdot 12x^3 = \frac{4x^3}{(\sqrt[3]{3x^4+16})^2} = \frac{4x^3}{(s(x))^2}$$

Die notwendige Bedingung ergibt in diesem Fall somit:

$$\frac{2x}{x^2+[s(x)]^2} + \frac{-2x^2}{(x^2+[s(x)]^2)\cdot s(x)} \cdot \frac{4x^3}{[s(x)]^2} = 0 \quad \Big|\ :2 \text{ und auf Hauptnenner bringen}$$

$$\iff \frac{x\cdot[s(x)]^3 - 4x^5}{(x^2+[s(x)]^2)\cdot[s(x)]^3} = 0 \quad \Big|\ \cdot \text{Nenner} (\neq 0)$$

$$\iff x\,\{[s(x)]^3 - 4x^4\} = 0$$

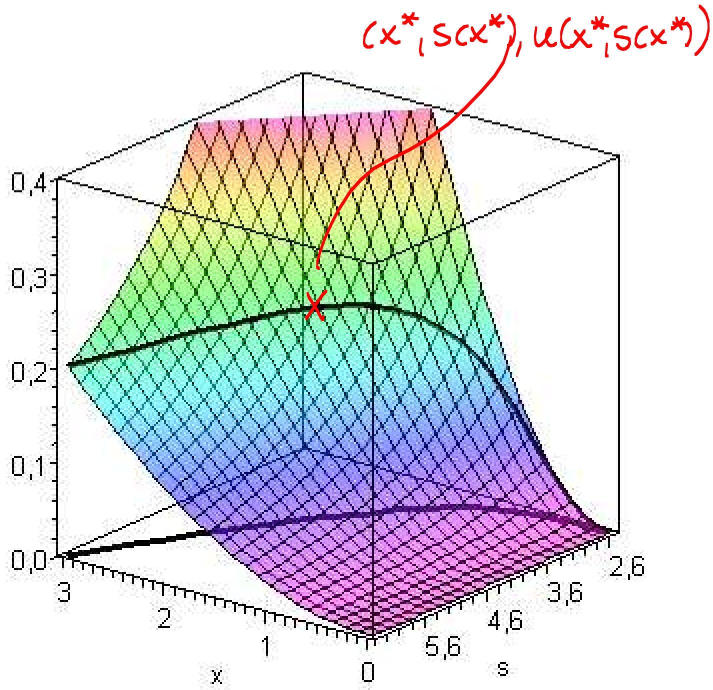
Da nach Voraussetzung $x > 0$, erhalten wir daraus nach Einsetzen von $[s(x)]^3 = 3x^4 + 16$ die äquivalente notwendige Bedingung

$$16 - x^4 = 0$$

Wieder wegen $x > 0$ ist $x^* = 2$ die einzige Lösung dieser Gleichung.
Nach den obigen Rechnungen ist

$$\frac{du}{dx}(x, s(x)) = \frac{d\tilde{u}}{dx}(x) = \frac{\overbrace{x}^{}\,\overbrace{(16-x^4)}^{>0 \text{ für } x<2 \text{ und } <0 \text{ für } x>2}}{\underbrace{(x^2+[s(x)]^2)\cdot[s(x)]^3}_{>0 \text{ für } x>0}}$$

Somit ist $\tilde{u}(x)$ streng monoton wachsend für $x \in (0,2)$ und streng monoton fallend für $x \in (2, \infty)$.



Auf der eingezeichneten Linie geht es also bis zur Stelle $(x^*, s(x^*)) = (2,4)$ aufwärts und danach abwärts.

Bemerkung: Als zusätzliche Übung können Sie zum Vergleich auch erst $s(x)$ in $u(x,s)$ einsetzen und das Maximum bestimmen.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, dass die Variablen von f von einer Variablen (einem Parameter) abhängen. Wir wenden uns nun dem allgemeineren Fall zu, in dem die Variablen von zwei Parametern abhängen und geben zur Vertiefung die allgemeine Kettenregel für Funktionen von n Variablen an, wo die Variablen von m Parametern abhängen.

Kettenregel bei zwei Parametern: Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $x: \mathbb{D}_x \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,s) \mapsto x(t,s)$, $y: \mathbb{D}_y \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,s) \mapsto y(t,s)$.

Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

wobei hier zur Vereinfachung der Schreibweise die Argumente weggelassen wurden.

Beispiel: Sei $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ mit $x = t^2 - s$, $y = t + 2s^3$

Dann gilt: $\frac{\partial f}{\partial t} = 4x \cdot 2t + 6y \cdot 1 = 4(t^2 - s) \cdot 2t + 6(t + 2s^3)$

$$= 8t^3 - 8st + 6t + 12s^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 4x \cdot (-1) + 6y \cdot 6s^2 = 4(t^2 - s) \cdot (-1) + 6(t + 2s^3) \cdot 6s^2$$

$$= -4t^2 + 4s + 36ts^2 + 72s^5$$

Beispiel: Sei $f(v,w) = \frac{v-w}{v+w}$ mit $v = e^{t+s}$, $w = e^{ts}$

Es gilt: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}$

$$= \frac{(v+w)-(v-w)}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} + \frac{-(v+w)-(v-w)}{(v+w)^2} \cdot s \cdot e^{ts}$$

$$= \frac{2w}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} - \frac{2v}{(v+w)^2} \cdot s \cdot e^{ts}$$

$$= 2 \cdot \frac{e^{ts} \cdot e^{t+s} - e^{t+s} \cdot s \cdot e^{ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

$$= 2 \cdot (1-s) \cdot \frac{e^{t+s+ts}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$= \frac{2w}{(v+w)^2} \cdot e^{t+s} - \frac{2v}{(v+w)^2} \cdot t \cdot e^{ts}$$

$$= 2 \cdot (1-t) \cdot \frac{e^{t+s+st}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

In ökonomischen Problemstellungen kommt es häufiger vor, dass nicht alle Funktionen explizit angegeben sind. Hier ist das Beherrschen der Kettenregel besonders wichtig.

Implizites Differenzieren

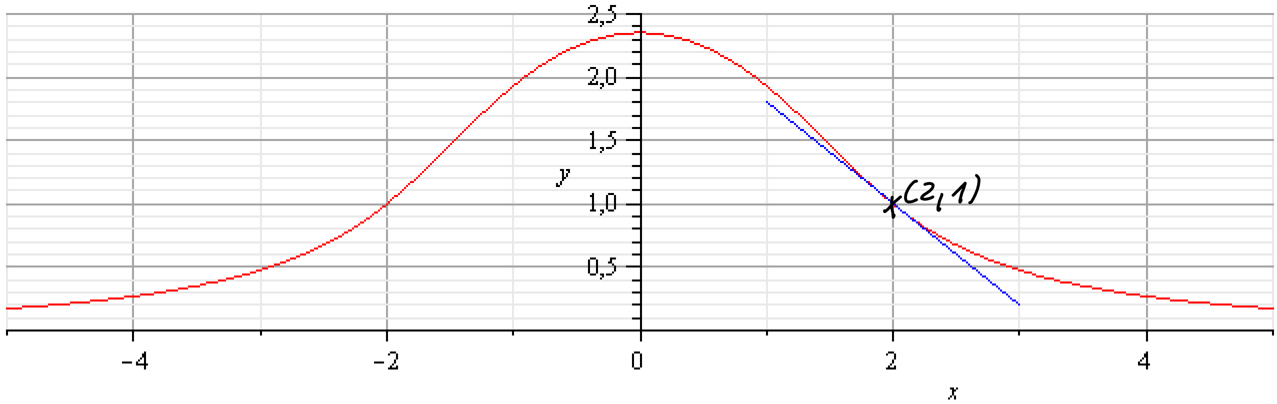
Die Kettenregel lässt sich gut für die Untersuchung von Funktionen verwenden, die nicht in expliziter, sondern in impliziter Form gegeben sind. Um mit dem Thema vertraut zu werden, betrachten wir zunächst den Fall einer unabhängigen Variablen x. Eplizit bedeutet, dass die abhängige Variable explizit in der Form $y = y(x)$ gegeben ist. Implizit bedeutet, dass der funktionale Zusammenhang von x und y(x) in Form einer Gleichung angegeben ist, die sich möglicherweise gar nicht nach y(x) auflösen lässt.
Das Folgende gilt auch, wenn die durch die Gleichung beschriebene Kurve kein Funktionsgraph ist.

Beispiel: $[y(x)]^3 + 3x^2 y(x) - 13 = 0$

Diese Gleichung lässt sich nicht einfach nach y auflösen.
Trotzdem kann man Punkte ermitteln, die auf dem Graphen liegen.
Setzen wir z.B. $x = 2$ in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$[y(2)]^3 + 12\,y(2) - 13 = 0$$

Man sieht leicht ein, dass $y(2) = 1$ die Gleichung erfüllt, d.h. der Punkt (2,1) liegt auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve.
Tatsächlich beschreibt die Gleichung die in der unten stehenden Graphik eingezeichnete rote Kurve. Bilder von solchen implizit gegebenen Kurven lassen sich im Allgemeinen nur mit leistungsfähigen Programmen erstellen.



Wir möchten nun die Steigung der Tangenten an den Kurvenpunkt $(2,1)$ bestimmen. Dazu differenzieren wir die Gleichung unter Verwendung der Kettenregel auf beiden Seiten nach x und erhalten:

$$3\,[y(x)]^2 \cdot y'(x) + 6x\,y(x) + 3x^2 y'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x)\left\{ 3[y(x)]^2 + 3x^2 \right\} = -6x\,y(x)$$

Für $[y(x)]^2 + x^2 \neq 0$ lässt sich dies nach $y'(x)$ auflösen:

$$y'(x) = -\frac{6x\,y(x)}{3(x^2 + [y(x)]^2)}$$

Für den Punkt $(2,1)$ ergibt sich somit $y'(2) = -\frac{4}{5}$ als Steigung der Tangenten durch den Kurvenpunkt $(2,1)$, die in der oben stehenden Graphik blau eingezeichnet ist.

Beispiel: $x^2 [y(x)]^3 + [y(x)+1]e^{-x} = x+2$

Für $x=0$ ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung

$$y(0) + 1 = 2 \Leftrightarrow y(0) = 1$$

Der Punkt $(0,1)$ liegt also auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve. Um die Steigung der Tangenten an diesen Kurvenpunkt zu ermitteln, differenzieren wir wieder die Gleichung auf beiden Seiten nach x:

$$2x\,[y(x)]^3 + 3x^2 [y(x)]^2 \cdot y'(x) + y'(x)\cdot e^{-x} - [y(x)+1]e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow y'(x)\{\underbrace{3x^2 [y(x)]^2 + e^{-x}}_{>0}\} = 1 - 2x\,[y(x)]^3 + [y(x)+1]e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1 - 2x\,[y(x)]^3 + [y(x)+1]e^{-x}}{3x^2 [y(x)]^2 + e^{-x}}$$

Einsetzen von $x=0$, $y(0)=1$ liefert: $y'(0) = 3$.

Die Tangente am Kurvenpunkt $(0,1)$ hat also die Steigung 3.

Prinzipiell kann man für Funktionen von mehreren Variablen analog vorgehen, was wir exemplarisch an einigen Beispielen zeigen.

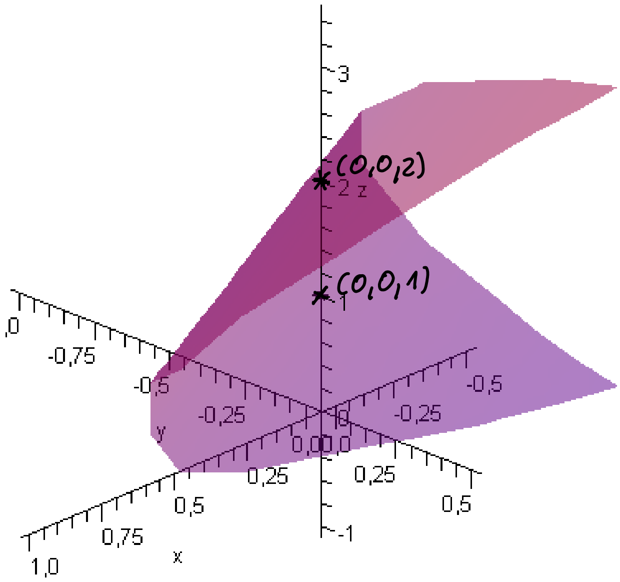
Beispiel: $z(x,y)$ sei implizit gegeben durch die Gleichung

$$x-2y-3z(x,y)+[z(x,y)]^2=-2$$

Setzen wir z.B. $x=y=0$ ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$-3z(0,0)+[z(0,0)]^2=-2$$

$$\Leftrightarrow \quad z(0,0)=1 \vee z(0,0)=2$$



Die beiden Punkte $(0,0,1)$ und $(0,0,2)$ liegen also auf der durch die Gleichung beschriebenen Fläche. Damit ist auch klar, dass es sich bei $z(x,y)$ nicht um eine Funktion handelt.

Wir differenzieren die Gleichung auf beiden Seiten partiell nach x und erhalten: $1-3z_x(x,y)+2z(x,y)\cdot z_x(x,y)=0$

Für $z(x,y)\neq\frac{3}{2}$ lässt sich dies nach $z_x(x,y)$ auflösen:

$$z_x(x,y)=\frac{1}{3-2z(x,y)}$$

Im Punkt $(0,0,1)$ ist somit $z_x=1$, im Punkt $(0,0,2)$ dagegen $z_x=-1$.

Differentiation der Gleichung auf beiden Seiten nach y liefert:

$$-2-3z_y(x,y)+2z(x,y)\cdot z_y(x,y)=0$$

Für $z(x,y)\neq\frac{3}{2}$ lässt sich dies nach $z_y(x,y)$ auflösen:

$$z_y(x,y)=\frac{2}{2z(x,y)-3}$$

Im Punkt $(0,0,1)$ ist somit $z_y=-2$, im Kurvenpunkt $(0,0,2)$ ist $z_y=-2$.

Bemerkung: Hier könnte man prinzipiell die Gleichung zunächst nach $z(x,y)$ auflösen; $z(x,y)=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-x+2y}$ und müsste dann beide Vorzeichen der Wurzel beachten.

Beispiel: Die sogenannte Nerlove-Ringstad Produktionsfunktion $Y(K,L)$ ist implizit durch die Gleichun

$$Y(K,L)^{1+c\ln(Y(K,L))} = A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta} \quad , K,L>0,$$

mit positiven Konstanten A, α, β definiert.

Wir bestimmen Ausdrücke für die Grenzproduktivitäten von $Y(K,L)$ bzgl. des Kapitals K und bzgl. des Arbeitseinsatzes L, d.h. Ausdrücke für $Y_K(K,L)$ und $Y_L(K,L)$.

In diesem Beispiel ist die linke Seite ziemlich kompliziert. Wir verwenden daher einen Trick, der auch in vielen ähnlichen Situationen hilfreich sein kann. Da beide Seiten der Gleichung positiv sind, können wir auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus anwenden und erhalten daraus unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus:

$$[1+c\ln(Y(K,L))]\cdot\ln(Y(K,L)) = \ln(A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta})$$

Diese Gleichung differenzieren wir nun auf beiden Seiten partiell nach K:

$$c\cdot\frac{Y_K(K,L)}{Y(K,L)}\cdot\ln(Y(K,L)) + [1+c\ln(Y(K,L))]\cdot\frac{Y_K(K,L)}{Y(K,L)} = \frac{A\cdot\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{Y_K(K,L)}{Y(K,L)}\{1+2c\ln(Y(K,L))\} = \frac{\alpha}{K}$$

$$\Longleftrightarrow Y_K(K,L) = \frac{\alpha\, Y(K,L)}{K\{1+2c\ln(Y(K,L))\}}$$

Entsprechend erhalten wir durch partielle Differentiation nach L:

$$Y_L(K,L) = \frac{\beta\, Y(K,L)}{L\{1+2c\ln(Y(K,L))\}}$$

Als zusätzliche Übung sollten Sie einmal versuchen, die Ausgangsgleichung ohne vorheriges Logarithmieren direkt partiell nach K bzw. L zu differenzieren, um auf die Ausdrücke für $Y_K(K,L)$ und $Y_L(K,L)$ zu kommen. Welchen Trick benötigt man, um die linke Seite zunächst geeignet umzuschreiben?

Grenzrate der Substitution

Die Methode des impliziten Differenzierens ist auch geeignet, die Niveaulinien einer Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genauer zu untersuchen, da diese auch häufig in impliziter Form vorkommen (vgl. Kapitel 11).

Ist eine Niveaulinie durch die Gleichung $f(x,y)=c$ bestimmt, und betrachten wir y in Abhängigkeit von x, so haben wir

$$f(x,y(x)) = c.$$

Differentiation auf beiden Seiten nach x liefert:

$$f_x(x,y(x))\cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + f_y(x,y(x))\cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

d.h. kurz $\quad y' = -\frac{f_x}{f_y}$, falls $f_y \neq 0$.

Für das Negative dieses Ausdrucks haben Ökonomen einen speziellen Namen. Es ist

$$R_{yx} = \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$ die Grenzrate der Substitution von y durch x.

Diese Begriffsbildung soll durch das folgende Beispiel motiviert werden.

Beispiel: Es sei $Y(K,L)=K^2\cdot L$ mit $K,L>0$ eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion und $Y(K,L)=108$ die Gleichung der Isoquanten (Niveaulinie) zum Output 108, d.h.

$$K^2\cdot L = 108 \iff L = \frac{108}{K^2}$$

Für die Grenzrate der Substitution von L für K gilt:

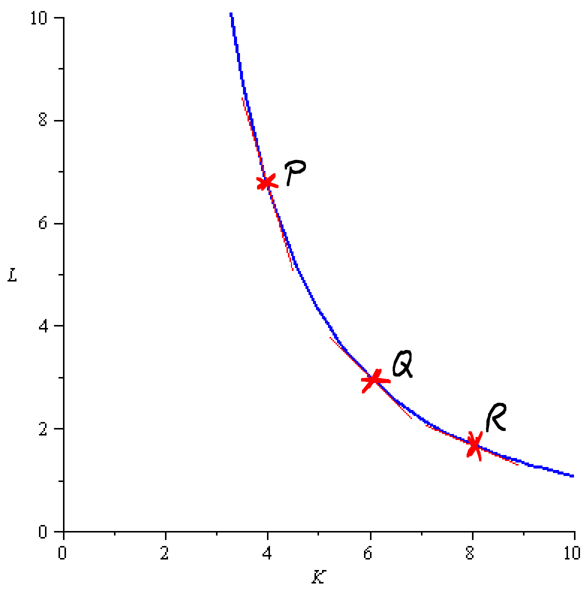
$$R_{LK} = \frac{Y_K(K,L)}{Y_L(K,L)} = \frac{2KL}{K^2} = \frac{2L}{K}$$

Daraus erhält man z.B. für

$P(4,\frac{27}{4})$: $\quad R_{LK} = \frac{27}{8} = 3.375$

$Q(6,3)$: $\quad R_{LK} = 1$

$R(8,\frac{27}{16})$: $\quad R_{LK} = \frac{27}{64} = 0.421875$



In allen Punkten P, Q, R werden jeweils 108 Einheiten produziert.
In P wird wenig Kapital und viel Arbeitseinsatz verwendet, um 108 Einheiten zu produzieren. Die Steigung der Isoquante in P ist $-\frac{27}{8}$, d.h. die GRS (Grenzrate der Substitution) beträgt $\frac{27}{8}$. Die Interpretation ist nun so, dass man näherungsweise durch Zufügung von 1 Einheit Kapital in etwa $\frac{27}{8}$ Einheiten Arbeitseinsatz weniger aufwenden muss, um das Niveau des Outputs zu halten; $\frac{27}{8}$ Einheiten Arbeitseinsatz können durch 1 Einheit Kapital substituiert werden. Dagegen kann man im Punkt Q in etwa 1 Einheit und im Punkt R nur $\frac{27}{64}$ Einheiten durch 1 Einheit Kapital substituieren.

Beispiel: Wir bestimmen die Grenzrate der Substitution für

$$f(x,y) = \ln(2x^2 + 5y^4 + 2).$$

$$R_{yx} = \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \frac{\frac{4x}{2x^2+5y^4+2}}{\frac{20y^3}{2x^2+5y^4+2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{y^3}$$