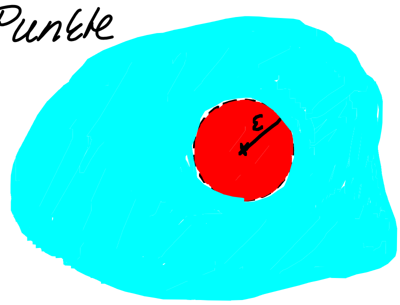
13. Optimierungsaufgaben ohne Nebenbedingungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Problemstellung, lokale und globale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen zu bestimmen.
Wir haben bereits notwendige und hinreichende Bedingungen bei unterschiedlichen Differenzierbarkeitseigenschaften für Funktionen von einer Variablen angegeben. Viele der interessanten ökonomischen Optimierungsprobleme hängen jedoch häufig von einer Vielzahl von Variablen ab. Ein Verbraucher wählt Mengen von vielen verschiedenen Gütern, um einen möglichst großen Nutzen zu erreichen. Ein Unternehmen versucht die Kosten für Lohn, Lagerhaltung, Maschineneinsatz, Transport etc. für ein vorgegebenes Produktionsziel möglichst gering zu halten.
Da auch hier die größten Schwierigkeiten bereits beim Übergang von einer zu zwei Variablen entstehen, und wir für die Behandlung von Funktionen von zwei Variablen die graphischen Möglichkeiten der Darstellung von Funktionsgraphen und Niveaulinien nutzen können, behandeln wir hier Problemstellungen mit zwei unabhängigen Variablen.

Bevor wir die Begriffe lokale und globale Extrema definieren, müssen wir uns zunächst mit einem anderen Thema beschäftigen. Wir erinnern uns an Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen, die prinzipiell offen, halboffen oder abgeschlossen sein können, je nachdem, ob Intervallrandpunkte dazugehören oder nicht.
Bei Funktionen von zwei Variablen ist der Definitionsbereich eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und kann sehr unterschiedliche Eigenschaften aufweisen. Wichtig in den folgenden Erklärungen sind die Begriffe offene, abgeschlossene, beschränkte und unbeschränkte Mengen, innere Punkte, Randpunkte.

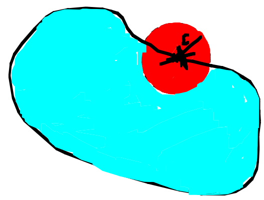
Definition: Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

1) Ein Punkt $(x^*, y^*) \in S$ heißt **innerer Punkt** von S, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass alle Punkte von $U_\varepsilon(x^*, y^*) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 < \varepsilon^2\}$ in S liegen. Dabei beschreibt $U_\varepsilon(x^*, y^*)$ die Punkte eines Kreises um (x^*, y^*) mit Radius ε, die **nicht** auf dem Kreisrand liegen.



2) S heißt **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

3) Ein Punkt $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ heißt **Randpunkt** von S, wenn jeder Kreis um (x^*, y^*) sowohl Punkte von S als auch Punkte, die nicht zu S gehören, enthält.

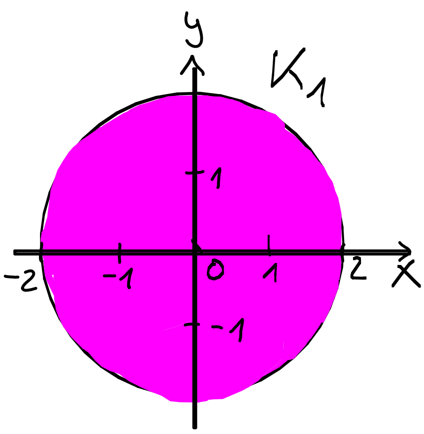


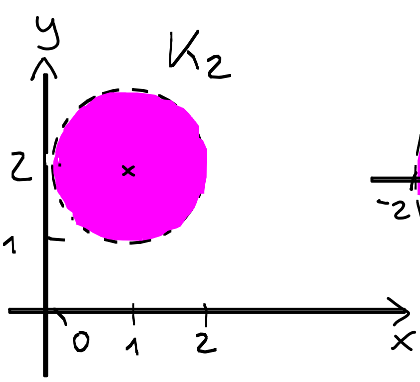
4) S heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement von S in $\mathbb{R}^2$, d.h. die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus S$, offen ist. Anschaulich bedeutet dies, dass jeder Randpunkt von S zu S gehört.

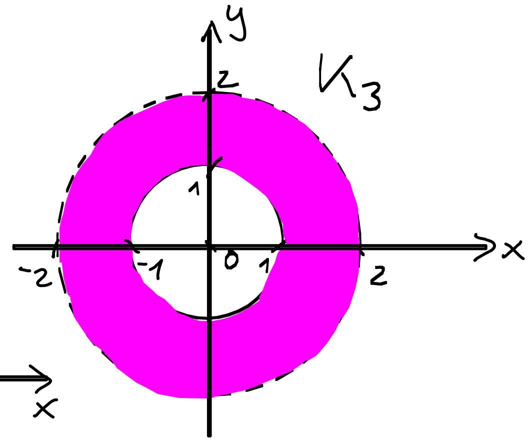
5) S heißt **beschränkt**, wenn es einen (hinreichend großen) Kreis gibt, der S enthält.

Beispiel:

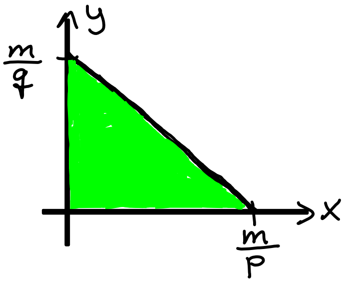
1) $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, Kreis um $(0,0)$ mit Radius 2 ist abgeschlossen.
2) $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 < 1\}$, Kreis um $(1,2)$ mit Radius 1 ist offen.
3) $K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.







Beispiel: Die (Budget-)Menge $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: px+qy\leq m, x\geq 0, y\geq 0\}$ mit Preisen p und q, Mengen x und y für zwei Güter und Einkommen $m>0$ ist abgeschlossen. Die Randpunkte von B sind gerade die Seiten des Dreiecks, das durch B beschrieben wird.



Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns nun dem Hauptthema dieses Kapitels zu und geben zunächst eine Erweiterung der Begriffe bzgl. globaler und lokaler Extrema für Funktionen von zwei Variablen an.

Definition: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $(x^*, y^*)\in D_f$.

1) Globale Extrema

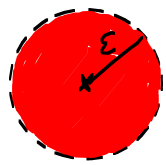
a) f hat an der Stelle (x^*, y^*) ein globales Minimum $f(x^*,y^*)$, wenn $f(x,y)\geq f(x^*,y^*)$ für alle $(x,y)\in D_f$.

b) f hat an der Stelle (x^*,y^*) ein globales Maximum $f(x^*,y^*)$, wenn $f(x,y)\leq f(x^*,y^*)$ für alle $(x,y)\in D_f$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe Optimal-, Extremalstellen und Optimal-, Extremwerte.

2) Lokale (relative) Extrema

Zu $\varepsilon>0$ bezeichnen wir mit $U_\varepsilon(x^*,y^*)$ die offene Kreisscheibe um (x^*,y^*) mit Radius ε, d.h. $U_\varepsilon(x^*,y^*)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-x^*)^2+(y-y^*)^2<\varepsilon^2\}$.



a) f hat an der Stelle (x^*,y^*) ein lokales (relatives) Minimum $f(x^*,y^*)$, wenn es ein $\varepsilon>0$ gibt, so dass $f(x,y)\geq f(x^*,y^*)$ für alle $(x,y)\in U_\varepsilon(x,y)\cap D_f$.

b) f hat an der Stelle (x^*,y^*) ein lokales (relatives) Maximum $f(x^*,y^*)$, wenn es ein $\varepsilon>0$ gibt, so dass $f(x,y)\leq f(x^*,y^*)$ für alle $(x,y)\in U_\varepsilon(x,y)\cap D_f$.

Zusammenfassend verwendet man auch die Begriffe lokale (relative) Extremalstellen und Extremwerte bzw. Extrema.

Wir beschäftigen uns nun mit Kriterien, wann Minima und Maxima existieren und mit Methoden, wie man diese findet. In diesem Zusammenhang erinnern wir uns zunächst an ein hinreichendes Kriterium für die Existenz von Extremwerten für Funktionen von einer Variablen, das wir im letzten Semester kennengelernt haben.

Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in [a,b]$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein $x_1 \in [a,b]$, in dem f ein Maximum besitzt, d.h.

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1) \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Dieses Resultat lässt sich nun auf Funktionen von zwei Variablen übertragen, wenn man die Voraussetzungen geeignet verallgemeinert.

Satz: Sei $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{D}_f$, wobei $\mathbb{D}_f \neq \{\}$, $\mathbb{D}_f$ abgeschlossen und beschränkt sein soll. Dann existiert (mindestens) ein $(x^*, y^*) \in \mathbb{D}_f$, in dem f ein Minimum besitzt und (mindestens) ein (x^{**}, y^{**}), in dem f ein Maximum besitzt, d.h.

$$f(x^*, y^*) \le f(x,y) \le f(x^{**}, y^{**}) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{D}_f.$$

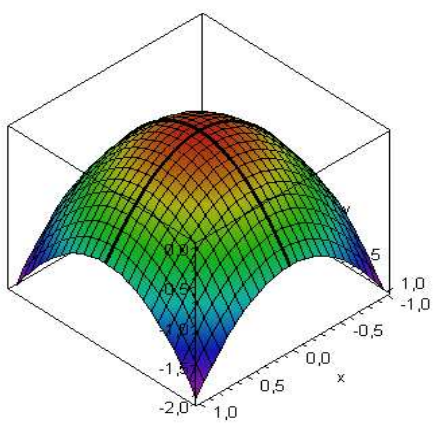
Wichtig zu bemerken ist, dass der Satz ein hinreichendes Kriterium liefert. Weiter muss $\mathbb{D}_f$ nicht der maximal mögliche Definitionsbereich sein, sondern wesentlich ist, dass die Voraussetzungen an $\mathbb{D}_f$ (nichtleer, abgeschlossen, beschränkt) erfüllt sind. Bei dem Resultat handelt es sich um einen reinen Existenzsatz ohne Angabe eines Verfahrens, wie die Extrema zu bestimmen sind.

Im Allgemeinen sind zur Bestimmung globaler Extrema prinzipiell folgende Punkte abzuarbeiten:

- Bestimmung aller lokalen Extrema im Innern

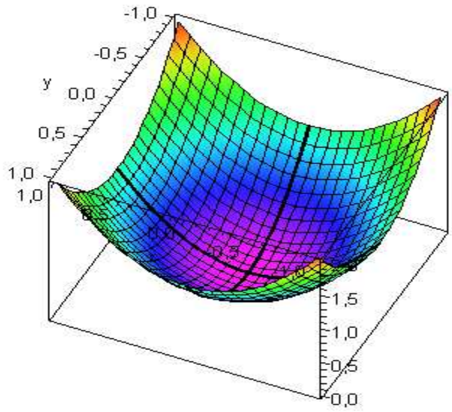
- gegebenenfalls Untersuchung der Funktion
  - an Randpunkten des Definitionsbereichs
  - Grenzbetrachtungen, wenn Variablen gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ gehen
  - an Definitionslücken

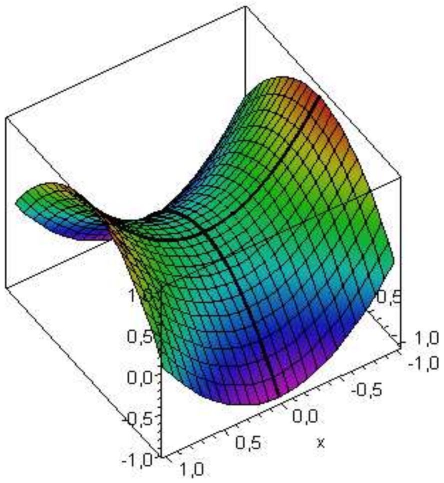
Sind Minimum und Maximum einer Funktion zu bestimmen, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ definiert und dort stetig ist, so müssen alle lokalen Extrema im Inneren und die größten bzw. kleinsten Funktionswerte auf dem Rand untersucht werden.
Wir werden uns insbesondere damit befassen, wie man unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion lokale Extrema im Inneren eines Definitionsbereiches bestimmen kann.
Anschaulich kann man sich zunächst folgendes klarmachen.
Steht man in einer "Gebirgslandschaft" an einem lokalen Minimum, so bedeutet dies, dass der Weg dorthin (lokal) aus einer beliebigen Richtung kommend monoton fallend und danach monoton wachsend ist.
Entsprechend ist der Weg (lokal) zu einem lokalen Maximum zunächst monoton wachsend und ab dem Maximum monoton fallend.
Insbesondere gilt: Ist $f(x^*, y^*)$ lokales Minimum bzw. Maximum, dann ist $f(x^*, y^*)$ insbesondere auch ein lokales Minimum bzw. Maximum auf denjenigen Kurven, die durch den Schnitt von $f(x,y)$ mit den Ebenen durch $x = x^*$ bzw. $y = y^*$ beschrieben werden. Existieren die partiellen Ableitungen, so müssen diese an der Stelle (x^*, y^*) Null sein.



Maximum an der Stelle $(x^*, y^*) = (0,0)$.
Die Kurven auf der Fläch durch den Punkt $(0,0,f(0,0))$ in Richtung x- bzw. y-Achse sind durch dickere schwarze Linien hervorgehoben. Beide Kurven sind konkav.

Minimum an der Stelle $(x^*, y^*) = (0,0)$. Die Kurven auf der Fläche durch den Punkt $(0,0,f(0,0))$ in Richtung x- bzw. y-Achse sind durch dickere schwarze Linien hervorgehoben. Beide Kurven sind konvex.





Auch in dieser Graphik sind die Kurven auf der Fläche durch $(0,0,f(0,0))$ in Richtung x- bzw. y-Achse durch dickere schwarze Linien gekennzeichnet. Man erkennt, dass man bei der Kurve in x-Richtung an der Stelle $(0,0)$ ein Minimum, bei der in y-Richtung ein Maximum durchläuft. Eine Kurve ist konvex, die andere konkav. Einen solchen Punkt nennt man auch Sattelpunkt. Obwohl die Steigungen beider Kurven an der Stelle $(0,0)$ Null sind, handelt es sich weder um ein Minimum noch um ein Maximum.
Damit haben wir anschaulich folgendes überlegt.

Notwendige Bedingung für relative Extrema

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Weiter besitze f an der Stelle (x^*, y^*) im Inneren von D_f ein relatives Extremum. Dann gilt:

$f_x(x^*, y^*) = 0$ und $f_y(x^*, y^*) = 0$, kurz $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) = \vec{0}$.

Bemerkung: 1) Anschaulich bedeutet die Bedingung, dass die durch f beschriebene Fläche an einem Extremum eine zur xy-Ebene parallele Tangentialebene besitzt. (Vgl. auch Lineare Approximation: Wenn $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) = \vec{0}$, dann ist $t(x,y) = f(x^*, y^*)$ die Gleichung der Tangentialebene.)

2) Die Bedingung $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) = \vec{0}$ ist eine notwendige Bedingung, sie ist nicht hinreichend.

3) Punkte (x^*, y^*), für die die notwendige Bedingung $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) = \vec{0}$ erfüllt ist, heißen stationäre Punkte.

4) Man spricht auch von notwendiger Bedingung 1. Ordnung, weil hier die partiellen Ableitungen 1. Ordnung betrachtet werden.

Zum Auffinden innerer lokaler Extrema eine stetig partiell differenzierbaren Funktion müssen also zunächst alle stationären Punkte bestimmt werden. Dazu muss ein in der Regel nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden, was ziemlich kompliziert sein kann. Es ist leider nicht möglich, ein "stets funktionierendes Kochrezept" anzugeben. Es hilft nur umfangreiches Üben 🙂 Wie man nach Auffinden stationärer Punkte entscheiden kann, ob es sich um Extremalstellen handelt, werden wir behandeln, nachdem wir einige Beispiele gerechnet haben.

Beispiel: Wir bestimmen die stationären Punkte von $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.

Es gilt: $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y - 3x^2 \\ 3x - 3y^2 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0} \iff \begin{cases} 1)\ y - x^2 = 0 \\ 2)\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Auflösen von 1) nach y: $y = x^2$

Einsetzen von $y = x^2$ in 2): $x - x^4 = 0 \iff x(1 - x^3) = 0$

$$\iff x = 0 \lor x = 1$$

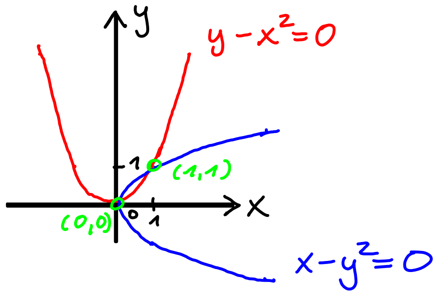
Die zugehörigen y-Werte erhalten wir aus 1).

$x = 0$ in 1): $y = 0$

$x = 1$ in 1): $y = 1$

Die Funktion besitzt also die beiden stationären Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$. Sie sind "Kandidaten" für lokale Extremalstellen.

Manchmal kann es auch hilfreich sein, die durch die Bedingung $\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0}$ gegebenen Kurven in der xy-Ebene zu skizzieren.



Beispiel: Sei $f(x,y) = x \cdot \ln(x^2+y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

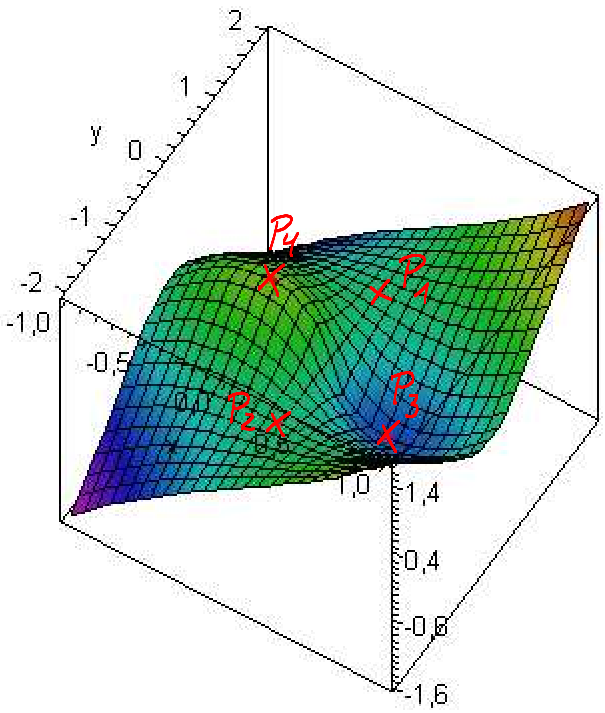
$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 1)\ \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ 2)\ \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Auflösen von 2): $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$, aber nicht beide gleichzeitig Null (vgl. Nenner)

Einsetzen $x=0$ in 1): $\ln(y^2) = 0 \iff y^2 = 1 \iff y = 1 \vee y = -1$

Einsetzen $y=0$ in 1): $\ln(x^2) + 2 = 0 \iff x^2 = e^{-2} \iff x = e^{-1} \vee x = -e^{-1}$

Die Funktion besitzt also die vier stationären Punkte $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(e^{-1},0)$, $P_4(-e^{-1},0)$.



Wie man an der Graphik erkennen kann, handelt es sich nur bei P_3 und P_4 um lokale Extremalstellen.

Beispiel: $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x+4 \\ -2y+4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0} \iff \left\{ \begin{array}{l} 1)\ -4x+4=0 \\ 2)\ -2y+4=0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array} \right.$$

$P(1,2)$ ist somit einziger stationärer Punkt. In diesem speziellen Beispiel kann man recht einfach feststellen, dass f an der Stelle $(1,2)$ ein Maximum besitzt, das sogar global ist.

Dazu bringt man die Funktion mittels quadratischer Ergänzung auf die Form $f(x,y) = a_1(x-b_1)^2 + a_2(y-b_2)^2 + c$, d.h.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -2(x^2-2x+1) - (y^2-4y+4) - 3 + 2 + 4 \\ &= -2(x-1)^2 - (y-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

Da die quadratischen Terme $(x-1)^2$ und $(y-2)^2$ stets nicht negativ sind und mit negativen Faktoren multipliziert werden, wird f maximal für $(x-1)^2 = 0$ und $(y-2)^2 = 0$, d.h. $x=1$, $y=2$.

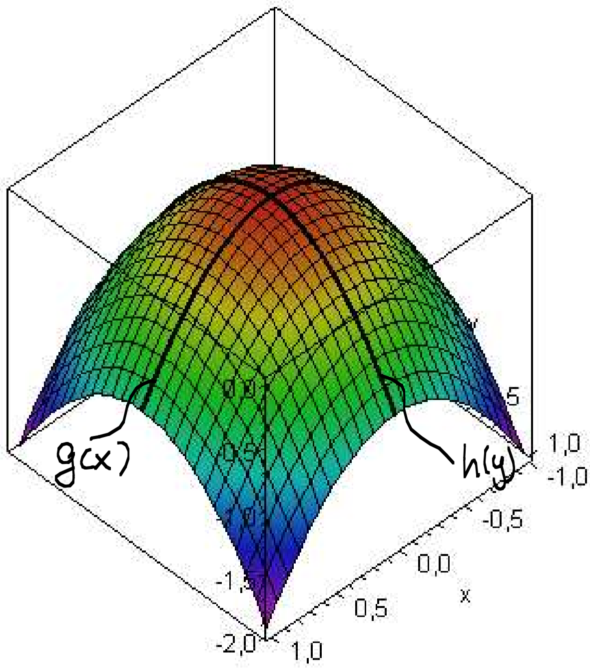
Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Wie wir gesehen haben, müssen stationäre Punkte nicht Extremalstellen einer Funktion sein, sondern es können z.B. auch Sattelpunkte vorliegen. Wir suchen nun nach hinreichenden Kriterien für die Entscheidung, ob an einem stationären Punkt ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt. Dazu stellen wir zunächst folgende Überlegung an.

Sei (x^*, y^*) ein stationärer Punkt einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Inneren von D_f.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass f an der Stelle (x^*, y^*) ein lokales Maximum besitzt.

Die Funktionen $g(x) = f(x, y^*)$ und $h(y) = f(x^*, y)$ beschreiben das Verhalten von f entlang der Geraden $y = y^*$ bzw. $x = x^*$.



$g(x)$ bzw. $h(y)$ müssen in x^* bzw. y^* ein lokales Maximum besitzen, d.h. sie müssen konkav sein.

Anders ausgedrückt:

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x^*) = f_{xx}(x^*, y^*) \leq 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} h(y^*) = f_{yy}(x^*, y^*) \leq 0.$$

Gilt sogar $\frac{d^2}{dx^2} g(x^*) < 0$ und $\frac{d^2}{dy^2} h(y^*) < 0$, dann garantiert dies, dass g und h tatsächlich in x^* bzw. y^* lokale Maxima (sogar strikte) besitzen. Anders ausgedrückt garantieren die Bedingungen $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ und $f_{yy}(x^*, y^*) < 0$, dass f ein lokales Maximum hat in den Richtungen durch (x^*, y^*), die parallel zur x- bzw. y-Achse sind. Dies sagt aber noch nichts aus über das Verhalten von f, wenn wir uns von (x^*, y^*) aus in andere als diese beiden Richtungen bewegen.

Wir erinnern uns daran, dass man unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$, $|\vec{v}| = 1$, als

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \langle \operatorname{grad} f(x,y), \vec{v} \rangle = f_x(x,y) \cdot v_1 + f_y(x,y) \cdot \vec{v}_2$$

berechnen kann.

Differenziert man dieses noch einmal in Richtung $\vec{v}$, so erhält man

$$\partial^2_{\vec{v}} f(x,y) = \langle \operatorname{grad}(f_x(x,y) \cdot v_1 + f_y(x,y) \cdot v_2), \vec{v} \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) \cdot v_1 + f_{xy}(x,y) \cdot v_2 \\ f_{xy}(x,y) \cdot v_1 + f_{yy}(x,y) \cdot v_2 \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle$$

$$= f_{xx}(x,y)\, v_1^2 + 2 f_{xy}(x,y)\, v_1 v_2 + f_{yy}(x,y)\, v_2^2$$

$$= \vec{v}^T H_f(x,y) \vec{v}$$

Ist nun $\partial_{\vec{v}}^2 f(x^*, y^*) = \vec{v}^T H_f(x^*, y^*)\vec{v} < 0$, dann garantiert dies, dass f ein lokales Maximum in Richtung $\vec{v}$ besitzt. Wenn dies für alle $\vec{v}$ mit $|\vec{v}|=1$ oder äquivalent dazu für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ erfüllt ist, haben wir tatsächlich die Garantie für ein (striktes) lokales Maximum.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass die Bedingung $\vec{v}^T H_f(x^*, y^*)\vec{v} < 0$ für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$ gerade die Definition für die negative Definitheit der Hesse-Matrix $H_f(x^*, y^*)$ von f an der Stelle (x^*, y^*) ist. In der linearen Algebra haben wir auch gesehen, wie man die negative Definitheit mit dem Hurwitz-Kriterium prüfen kann, das für den Fall einer 2x2-Matrix in der unten stehenden Bedingung für lokale Extrema direkt eingesetzt wird.

Im Falle lokaler Minima führen analoge Überlegungen (konkav durch konvex ersetzen) auf die Vorzeichenbedingung $\vec{v}^T H_f(x^*, y^*)\vec{v} > 0$ für alle $\vec{v} \neq \vec{0}$, d.h. die positive Definitheit der Hesse-Matrix $H_f(x^*, y^*)$ an der Stelle (x^*, y^*).

Wir fassen die Ergebnisse nun zusammen. Dazu bezeichnen wir noch mit

$$\Delta_f(x^*, y^*) = \det H_f(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*) \cdot f_{yy}(x^*, y^*) - f_{xy}^2(x^*, y^*)$$

die Determinante der Hesse-Matrix.

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und (x^*, y^*) aus dem Inneren von D_f ein stationärer Punkt von f. Dann gilt:

1) Ist $\Delta_f(x^*, y^*) > 0$, dann besitzt f an der Stelle (x^*, y^*) ein (striktes) lokales Extremum.

   a) Ist zusätzlich $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ (oder $f_{yy}(x^*, y^*) < 0$), dann liegt ein relatives Maximum vor.

   b) Ist zusätzlich $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ (oder $f_{yy}(x^*, y^*) > 0$), dann liegt ein relatives Minimum vor.

2) Ist $\Delta_f(x^*, y^*) < 0$, dann besitzt f an der Stelle (x^*, y^*) einen Sattelpunkt.
3) Ist $\Delta_f(x^*, y^*) = 0$, so lässt sich mit diesem Kriterium keine Aussage machen.

Bemerkung: $f_{xx}(x^*, y^*) > 0$ und $\Delta_f(x^*, y^*) > 0$ bedeutet nach dem Hurwitz-Kriterium, dass $H_f(x^*, y^*)$ positiv definit ist; $f_{xx}(x^*, y^*) < 0$ und $\Delta_f(x^*, y^*) > 0$ dagegen, dass $H_f(x^*, y^*)$ negativ definit ist.

Wir wenden das hinreichende Kriterium nun auf die vorher bereits betrachteten Beispiele an.

Beispiel: $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.

Die stationären Punkte von f sind $P_1(0,0)$ und $P_2(1,1)$.

Es gilt:
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}, \quad \Delta_f(x,y) = 36xy - 9$$

Da $\Delta_f(0,0) = -9 < 0$ ist, besitzt f an der Stelle $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

Wegen $f_{xx}(1,1) = -6 < 0$ und $\Delta_f(1,1) = 27 > 0$ folgt, dass f an der Stelle $(1,1)$ ein lokales Maximum $f(1,1) = 1$ besitzt.

Beispiel: $f(x,y) = x \cdot \ln(x^2+y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Die stationären Punkte von f sind $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(e^{-1},0)$, $P_4(-e^{-1},0)$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Es gilt:
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left(4x^2(x^2+3y^2)(x^2-y^2) - 4y^2(y^2-x^2)^2\right)$$
$$= \frac{4(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}\left(x^4+3x^2y^2-x^2y^2+y^4\right) = \frac{4(x^2-y^2)(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = 4 \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Da $\Delta_f(0,1)=-4<0$ und $\Delta_f(0,-1)=-4<0$, besitzt f an den Stellen $(0,1)$ und $(0,-1)$ Sattelpunkte.

Wegen $f_{xx}(e^{-1},0)=2e>0$ und $\Delta_f(e^{-1},0)=4e^2>0$ folgt, dass f an der Stelle $(e^{-1},0)$ ein lokales Minimum $f(e^{-1},0)=-2e^{-1}$ besitzt.

Wegen $f_{xx}(-e^{-1},0)=-2e<0$ und $\Delta_f(-e^{-1},0)=4e^2>0$ folgt, dass f an der Stelle $(-e^{-1},0)$ ein lokales Maximum $f(-e^{-1},0)=2e^{-1}$ besitzt.