12. Differentialrechnung für Funktionen von zwei Variablen

Wir erinnern uns zunächst an einige Zusammenhänge für Funktionen von einer Variablen, die wir in Kapitel 9 behandelt haben.

Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion einer Variablen, so versteht man unter dem Differenzenquotienten den Ausdruck

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad , h \neq 0.$$

Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x bis $x+h$ an. Geometrisch ist dies die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_0(x, f(x))$ und $P_h(x+h, f(x+h))$.

Den Differentialquotienten bzw. die 1. Ableitung erhält man aus dem Differenzenquotienten, indem man den Grenzwert für $h \to 0$ bildet, d.h.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

Der Differentialquotient gibt die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x an. Geometrisch ist dies die Steigung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle x.

"Stellt" man sich auf den Graphen einer Funktion von einer Variablen, so hat man nur eine mögliche "Richtung", auf dem Graphen "entlang zu wandern", nämlich in x-Richtung. Es geht dann entweder rauf, runter oder bleibt auf derselben Höhe.

Bei einer Funktion von zwei Variablen ist dies anders. "Steht" man auf dem Graphen einer Funktion von zwei Variablen (man kann sich z.B. einfach eine Gebirgslandschaft vorstellen), so kann man prinzipiell in beliebig viele Richtungen "wandern". Während es in einer Richtung steil bergauf geht, geht es in einer anderen Richtung möglicherweise sanft bergab oder bleibt auf gleicher Höhe. Es ist nun naheliegend, die Betrachtungen zunächst auf spezielle, ausgewählte Richtungen, nämlich die der Koordinatenrichtungen einzuschränken und die durchschnittlichen bzw. momentanen Änderungsraten in x- bzw. y-Richtung zu untersuchen. Dazu hält man eine Variable fest und lässt nur Änderungen in der anderen Variablen zu.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^4y^3 + x - y}{x^4 + y^4 + 3} + 1.$$

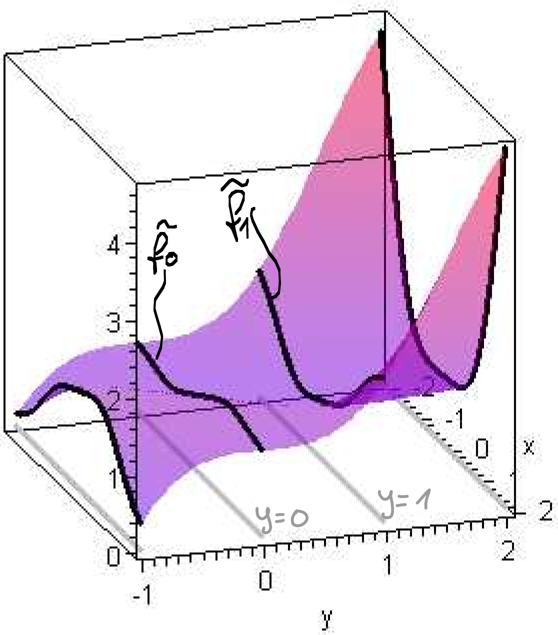
Wenn wir für y einen festen Wert vorgeben, erhalten wir eine Funktion, die nur von x abhängt, z.B.

$y = 0: \ \tilde{f}_0(x) = f(x,0) = \dfrac{x}{x^4+3} + 1$

Der Graph von $\tilde{f}_0$ ist der Schnitt des Graphen von $f(x,y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy-Ebene durch die Gerade $y=0$ in der xy-Ebene verläuft.

$y = 1: \ \tilde{f}_1(x) = f(x,1) = \dfrac{x^4+x-1}{x^4+4} + 1$

Der Graph von $\tilde{f}_1$ ist der Schnitt des Graphen von $f(x,y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy-Ebene durch die Gerade $y=1$ in der xy-Ebene verläuft.



In der xy-Ebene sind einige Parallelen zur x-Achse in grau eingezeichnet.
Die schwarzen Kurven entsprechen den Einschränkungen der Funktion auf diese Parallelen im Definitionsbereich.

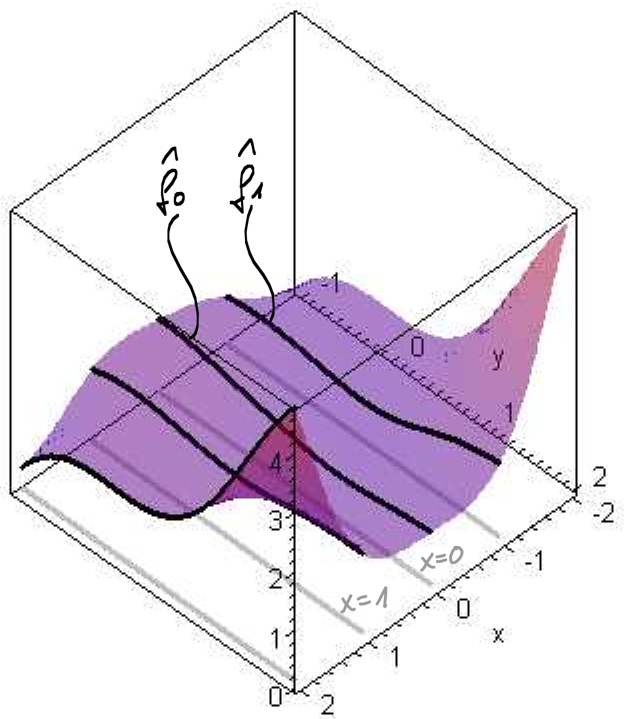
Entsprechend kann man x fest vorgeben und erhält dann eine Funktion, die nur von y abhängt, z.B.

$x = 0: \quad \hat{f}_0(y) = f(0,y) = \frac{-y}{y^4+3} + 1$

Der Graph von $\hat{f}_0$ ist der Schnitt des Graphen von $f(x,y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy-Ebene durch die Gerade x=0 in der xy-Ebene verläuft.

$x = 1: \quad \hat{f}_1(y) = f(1,y) = \frac{y^3+1-y}{y^4+4} + 1$

Der Graph von $\hat{f}_1$ ist der Schnitt des Graphen von $f(x,y)$ mit der Ebene, die senkrecht zur xy-Ebene durch die Gerade x=1 in der xy-Ebene verläuft.



In der xy-Ebene sind einige Parallelen zur y-Achse in grau eingezeichnet. Die schwarzen Kurven entsprechen den Einschränkungen der Funktion auf diese Parallelen im Definitionsbereich.

Partielle Ableitungen für Funktionen von zwei Variablen

Die vorstehenden Überlegungen führen uns auf die Definition von partieller Differenzierbarkeit und partieller Ableitung. Die partielle Ableitung einer Funktion f von zwei Variablen nach x bedeutet gerade die Ableitung von f nach x, wenn y konstant gehalten wird. Entsprechend ist die partielle Ableitung nach y gerade die Ableitung von f nach y, wenn x konstant gehalten wird. Genauer halten wir fest:

Definition: Sei f eine Funktion mit $f: \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $(x^*, y^*) \in \mathbb{D}_f$.

1) f heißt an der Stelle (x^*, y^*) partiell differenzierbar bzgl. x, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^* + \Delta x, y^*) - f(x^*, y^*)}{\Delta x}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f_x(x^*, y^*)$ oder mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)$ bezeichnet und heißt 1. partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (x^*, y^*).

Ist f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{D}_f$ partiell nach x differenzierbar, so heißt f_x bzw. $\frac{\partial f}{\partial x}$ erste partielle Ableitung von f nach x.

2) f heißt an der Stelle (x^*, y^*) partiell differenzierbar bzgl. y, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x^*, y + \Delta y) - f(x^*, y^*)}{\Delta y}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f_y(x^*, y^*)$ oder mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$ bezeichnet und heißt 1. partielle Ableitung von f nach y an der Stelle (x^*, y^*).

Ist f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{D}_f$ partiell nach y differenzierbar, so heißt f_y bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$ erste partielle Ableitung von f nach y.

3) Ist die Funktion f an allen Stellen $(x, y) \in \mathbb{D}_f$ sowohl nach x als auch nach y partiell differenzierbar, so heißt die Funktion partiell differenzierbar.

Sind zusätzlich die partiellen Ableitungen f_x und f_y stetig, so heißt f stetig partiell differenzierbar.

Wir halten noch einmal fest, dass mit den vorangegangenen Überlegungen und Definitionen folgt, dass f_x die momentane Änderungsrate bzgl. x bei konstant gehaltenem y und f_y die momentane Ände-

rungsrate bzgl. y bei konstant gehaltenem x bedeutet.
Die Bestimmung der partiellen Ableitungen einer Funktion von zwei Variablen ist nicht allzu schwierig, wenn man die Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen beherrscht!
Will man $\frac{\partial f}{\partial x}$ bestimmen, so denkt man sich y als Konstante und differenziert f nach der Variablen x so, als ob f nur von x abhängen würde. Entsprechendes gilt für $\frac{\partial f}{\partial y}$. Somit werden alle Ableitungsregeln, die wir bereits besprochen haben, hier wieder verwendet.
Konkret bedeutet dies folgendes:

Regeln für die Berechnung partieller Ableitungen unter der Voraussetzung, dass die auftretenden Ableitungen existieren.

Faktoren, die nicht von der Variablen abhängen, nach der differenziert wird, bleiben erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(c(y)\cdot u(x,y)\big)=c(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(c(x)\cdot u(x,y)\big)=c(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

Summenregel: Die partielle Ableitung einer Summe (Differenz) ist die Summe (Differenz) der partiellen Ableitungen.

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(u(x,y)+v(x,y)\big)=u_x(x,y)+v_x(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(u(x,y)+v(x,y)\big)=u_y(x,y)+v_y(x,y)$$

Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(u(x,y)\cdot v(x,y)\big)=u_x(x,y)\cdot v(x,y)+u(x,y)\cdot v_x(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(u(x,y)\cdot v(x,y)\big)=u_y(x,y)\cdot v(x,y)+u(x,y)\cdot v_y(x,y)$$

Quotientenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x,y)}{v(x,y)}\right) = \frac{u_x(x,y)\cdot v(x,y) - u(x,y)\cdot v_x(x,y)}{[v(x,y)]^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u(x,y)}{v(x,y)}\right) = \frac{u_y(x,y)\cdot v(x,y) - u(x,y)\cdot v_y(x,y)}{[v(x,y)]^2}$$

Einfache Kettenregel: $f(x,y) = u(v(x,y))$, $v: \mathbb{D}_v \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u: \mathbb{D}_u \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_x(x,y) = \frac{du}{dv}(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \frac{du}{dv}(v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

("äußere" · "innere" Ableitung)

Beispiel: Wir bestimmen die partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = x^3y + 2x^2y^2 - 7x + 3y^2 - xy$$

Für die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial x}$ betrachten wir y als konstant und x als variabel.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2\cdot 2xy^2 - 7 - 1\cdot y = 3x^2y + 4xy^2 - 7 - y$$

Für die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial y}$ betrachten wir x als konstant und y als variabel.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3\cdot 1 + 2x^2\cdot 2y + 3\cdot 2y - x\cdot 1 = x^3 + 4x^2y + 6y - x$$

Beispiel: $$f(x,y) = \frac{x^2y+1}{x^2y^2+y^4+2} = \frac{u(x,y)}{v(x,y)}$$

Es gilt: $u_x(x,y) = 2xy$ $\qquad v_x(x,y) = 2xy^2$

$u_y(x,y) = x^2$ $\qquad v_y(x,y) = 2x^2y + 4y^3$

Somit:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2y^2+y^4+2) - (x^2y+1)\cdot 2xy^2}{(x^2y^2+y^4+2)^2}$$

$$= \frac{2xy(x^2y^2+y^4+2-x^2y^2-y)}{(x^2y^2+y^4+2)^2} = \frac{2xy(y^4-y+2)}{(x^2y^2+y^4+2)^2}$$

Speziell z.B. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$ $\qquad$ Zum Vergleich: $f(x,1) = \frac{x^2+1}{x^2+3}$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2+1}{x^2+3}\right\} = \frac{2x(x^2+3) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2y^2+y^4+2)-(x^2y+1)\cdot(2x^2y+4y^3)}{(x^2y^2+y^4+2)^2}$$

$$= \frac{x^4y^2+x^2y^4+2x^2-2x^4y^2-4x^2y^4-2x^2y-4y^3}{(x^2y^2+y^4+2)^2}$$

$$= \frac{-x^4y^2-3x^2y^4+2x^2-2x^2y-4y^3}{(x^2y^2+y^4+2)^2}$$

Speziell z.B. $\frac{\partial f}{\partial y}(2,y) = \frac{-16y^2-12y^4+8-8y-4y^3}{(4y^2+y^4+2)^2}$

Zum Vergleich: $f(2,y) = \frac{4y+1}{4y^2+y^4+2}$

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{4y+1}{4y^2+y^4+2}\right\} = \frac{4(4y^2+y^4+2)-(4y+1)(8y+4y^3)}{(4y^2+y^4+2)^2}$$

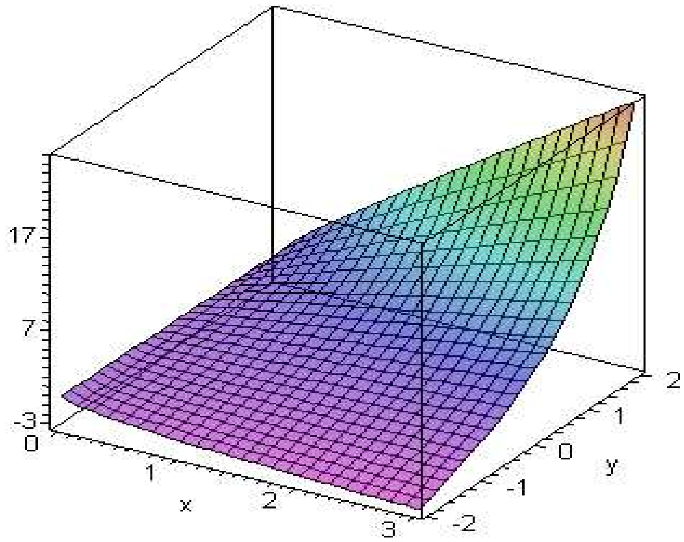
$$= \frac{-16y^2-12y^4+8-8y-4y^3}{(4y^2+y^4+2)^2}$$

Beispiel: $f(x,y) = y\sqrt{x} + x\cdot e^y$, $\mathbb{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

$f_x(x,y) = y\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + e^y$

$= \frac{y}{2\sqrt{x}} + e^y$

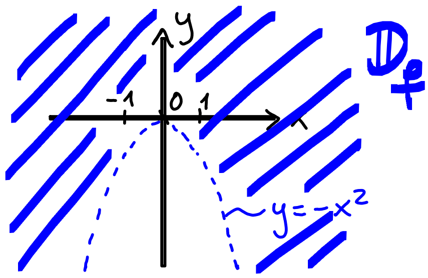
$f_y(x,y) = \sqrt{x} + x\cdot e^y$



Beispiel: $f(x,y) = xy\cdot\ln(x^2+y)$

Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, gilt $\mathbb{D}_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > -x^2\}$.

Skizze des Definitionsbereichs



Es gilt: $f(x,y) = x \cdot y \cdot u(v(x,y))$ mit $u(v) = \ln(v)$, $v(x,y) = x^2+y$

Nach der einfachen Kettenregel gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\ln(x^2+y)\} = \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\{\ln(x^2+y)\} = \frac{1}{x^2+y} \cdot 1$$

Nun können wir die partiellen Ableitungen von f mit der Produktregel bestimmen:

$$f_x(x,y) = y\,\{1 \cdot \ln(x^2+y) + x \cdot \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x\} = y\,\{\ln(x^2+y) + \frac{2x^2}{x^2+y}\}$$

$$f_y(x,y) = x\,\{1 \cdot \ln(x^2+y) + y \cdot \frac{1}{x^2+y}\} = x\,\{\ln(x^2+y) + \frac{y}{x^2+y}\}$$

Beispiel: $f(x,y) = \dfrac{x-y}{e^{xy}} = \dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$

Es gilt: $u_x(x,y) = 1 \quad , \quad v_x(x,y) = y \cdot e^{xy}$

$u_y(x,y) = -1 \quad , \quad v_y(x,y) = x \cdot e^{xy}$

Somit erhalten wir für die partiellen Ableitungen von f:

$$f_x(x,y) = \frac{1 \cdot e^{xy} - (x-y) \cdot y \cdot e^{xy}}{(e^{xy})^2} = \frac{e^{xy}(1-(x-y)y)}{(e^{xy})^2} = \frac{1-(x-y)y}{e^{xy}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-1 \cdot e^{xy} - (x-y) \cdot x \cdot e^{xy}}{(e^{xy})^2} = \frac{e^{xy}(-1-(x-y)x)}{(e^{xy})^2} = \frac{-1-(x-y)x}{e^{xy}}$$

Beispiel: Eine Untersuchung der Nachfrage $N(p,m)$ nach Milch in Abhängigkeit vom relativen Preis $p>0$ und dem Familieneinkommen $m>0$ ergab den Zusammenhang

$$N(p,m) = A \cdot \frac{m^{2.08}}{p^{1.5}} = A \cdot p^{-1.5} \cdot m^{2.08},$$

mit einer Konstanten $A>0$.

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen der Nachfragefunktion.

$$\frac{\partial N}{\partial p}(p,m) = A \cdot (-1.5) \cdot p^{-2.5} \cdot m^{2.08} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial m}(p,m) = A \cdot 2.08 \cdot p^{-1.5} \cdot m^{1.08}$$

Da A, p und m positiv sind, ist $\frac{\partial N}{\partial p}(p,m) < 0$, $\frac{\partial N}{\partial m}(p,m) > 0$, d.h. mit wachsendem Preis nimmt die Nachfrage bei einem festen Einkommen ab und bei wachsendem Einkommen nimmt die Nachfrage bei einem festen Preis zu.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Für eine Funktion f von zwei Variablen x und y sind die ersten partiellen Ableitungen wieder Funktionen von x und y.

Sind diese wieder partiell differenzierbar, so können wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bilden, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

und entsprechend auch partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung spielen bei der Bestimmung von Extremalstellen eine wichtige Rolle.

Beispiel: Wir bestimmen alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für $f(x,y) = x^3 \cdot e^{y^2}$.

$f_x(x,y) = 3x^2 \cdot e^{y^2}$

$f_y(x,y) = x^3 \cdot 2y \cdot e^{y^2} = 2x^3 y \cdot e^{y^2}$

$f_{xx}(x,y) = 6x \cdot e^{y^2}$

$f_{xy}(x,y) = 3x^2 \cdot 2y \cdot e^{y^2} = 6x^2 y \cdot e^{y^2}$

$f_{yx}(x,y) = 6x^2 y \cdot e^{y^2}$

$f_{yy}(x,y) = 2x^3(e^{y^2} + y \cdot 2y e^{y^2}) = 2x^3(1+2y^2) \cdot e^{y^2}$

In diesem Beispiel ist $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, d.h. es spielt keine Rolle, ob wir für die sogenannten gemischten Ableitungen erst nach x und dann nach y oder umgekehrt differenzieren. Wir werden an späterer Stelle hinreichende Bedingungen für diese Vertauschbarkeit angeben.

Beispiel: Wir bestimmen alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von $f(x,y) = x^y$ mit $x, y > 0$.

Für die Differentiation nach y ist $f(x,y) = e^{\ln(x^y)} = e^{y \ln(x)}$ zu beachten.

$f_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$

$f_y(x,y) = \ln(x) \cdot e^{y \cdot \ln(x)} = \ln(x) \cdot x^y$

$f_{xx}(x,y) = y(y-1) \cdot x^{y-2}$

$f_{xy}(x,y) = x^{y-1} + y \cdot \ln(x) \cdot x^{y-1} = x^{y-1}(1 + y \cdot \ln(x))$

$f_{yx}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot x^y + \ln(x) \cdot y \cdot x^{y-1} = x^{y-1}(1 + y \cdot \ln(x))$

$f_{yy}(x,y) = [\ln(x)]^2 \cdot x^y$

Satz von Schwarz: Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetige Funktionen sind.

Bevor wir uns mit einigen ökonomischen Anwendungen befassen, führen wir im Zusammenhang mit partiellen Ableitungen noch zwei Bezeichnungen ein, die uns an späterer Stelle im Zusammenhang mit der Bestimmung relativer Extrema nützlich sein werden.

Gradient und Hesse-Matrix

Definition: Fasst man die partiellen Ableitung erster Ordnung einer Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu einem Vektor zusammen, so erhält man den Gradienten von f: $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$.

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung werden in einer quadratischen 2x2-Matrix, der Hesse-Matrix angeordnet.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f(x,y) = e^{x+2y} + y \cdot \ln(x^2+1)$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + \frac{2xy}{x^2+1} \\ 2e^{x+2y} + \ln(x^2+1) \end{pmatrix}, \text{ z.B. } \operatorname{grad} f(1,0) = \begin{pmatrix} e \\ 2e + \ln(2) \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + 2y \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & 2e^{x+2y} + \frac{2x}{x^2+1} \\ 2e^{x+2y} + \frac{2x}{x^2+1} & 4e^{x+2y} \end{pmatrix}, \text{ z.B. } H_f(1,0) = \begin{pmatrix} e & 2e+1 \\ 2e+1 & 4e \end{pmatrix}$$

Ökonomische Anwendungen partieller Ableitungen

Beispiel: Wir betrachten eine landwirtschaftliche Produktionsfunktion $Y(K,L)$, wobei Y die Anzahl produzierter Einheiten in Abhängigkeit vom investierten Kapital K und Arbeitseinsatz L bezeichnet.
$\frac{\partial Y}{\partial K}(K,L)$ ist die momentane Änderungsrate des Outputs bzgl. K, wenn L konstant gehalten wird und wird Grenzprodukt des Kapitals genannt.
Entsprechend heißt $\frac{\partial Y}{\partial L}(K,L)$ Grenzprodukt der Arbeit.
Wir nehmen nun an, dass die Produktionsfunktion eine Cobb-Douglas Funktion ist, d.h.

$$Y(K,L) = A\cdot K^a \cdot L^b \quad , K, L > 0$$

mit positiven Konstanten A, a, b. Dann ist das
Grenzprodukt des Kapitals : $Y_K(K,L) = A\cdot a\cdot K^{a-1} L^b$
Grenzprodukt der Arbeit : $Y_L(K,L) = A\cdot b\cdot K^a L^{b-1}$
Unter der Annahme, dass K und L positiv sind, sind die Grenzprodukte ebenfalls positiv. Das heißt, dass eine Erhöhung des Kapitals bei konstant gehaltenem Arbeitseinsatz und unveränderter Anbaufläche zu einer Erhöhung der produzierten Mengen führt.
Entsprechend führt eine Erhöhung des Arbeitseinsatzes bei konstanten Kapitaleinsatz ebenfalls zu einer Erhöhung der produzierten Mengen.
Weiter gilt z.B. $Y_{KK}(K,L) = A\cdot a(a-1) K^{a-2} L^b$.
Für $a<1$ ist $Y_{KK}(K,L) < 0$. Das bedeutet ein abnehmendes Grenzprodukt des Kapitals. Eine Erhöhung des Kapitals führt zwar zu einer Erhöhung des Outputs ($Y_K > 0$), der Anstieg geschieht aber mit abnehmender Rate ($Y_{KK} < 0$) (degressives Wachstum!).
Für $a>1$ ist $Y_{KK}(K,L) > 0$. Das bedeutet zunehmendes Grenzprodukt

des Kapitals. Eine Erhöhung des Kapitals führt zu einer Erhöhung des Outputs ($Y_K > 0$), der Anstieg geschieht mit einer zunehmenden Rate ($Y_{KK} > 0$) (progressives Wachstum!)

Beispiel: Es sei x ein Index des Gesamtbetrags der Güter, die in einer Gesellschaft produziert und konsumiert werden und s ein Maß für den Verschmutzungsgrad der Umwelt. Weiter nehmen wir an, dass $u(x,s)$ eine Funktion ist, die das gesamte Wohlbefinden der Gesellschaft misst.
Wir überlegen, welche Vorzeichen für $u_x(x,s)$ und $u_s(x,s)$ zu erwarten sind, und was Ökonomen gewöhnlich für das Vorzeichen von $u_{xs}(x,s)$ annehmen.
Es ist sicher plausibel, anzunehmen, dass bei konstanter Umweltbelastung das Wohlbefinden steigt, wenn die Menge der Güter steigt, d.h. $u_x(x,s) > 0$.
Entsprechend wird bei konstant gehaltener Menge der Güter das Wohlbefinden bei wachsender Umweltbelastung abnehmen, d.h. $u_s(x,s) < 0$.
Wenn man nun von $u_x(x,s)$ die partielle Ableitung nach s betrachtet, untersucht man, ob das Wachstum der Zufriedenheit bei zunehmender Umweltbelastung stärker oder geringer ist. Man kann erwarten, dass der Anstieg im Wohlbefinden durch mehr Güter bei steigender Umweltbelastung geringer wird, d.h. $u_{xs}(x,s) < 0$.
(Die Steigerung des Wohlbefindens durch ein zweites Stück Kuchen ist in einem verräucherten Raum sicher geringer als in einem Raum mit frischer Luft.)
Ein Beispiel für eine Funktion mit solcher Eigenschaften, die als Modell für die oben genannte Aufgabenstellung aber sicher zu einfach wäre, ist

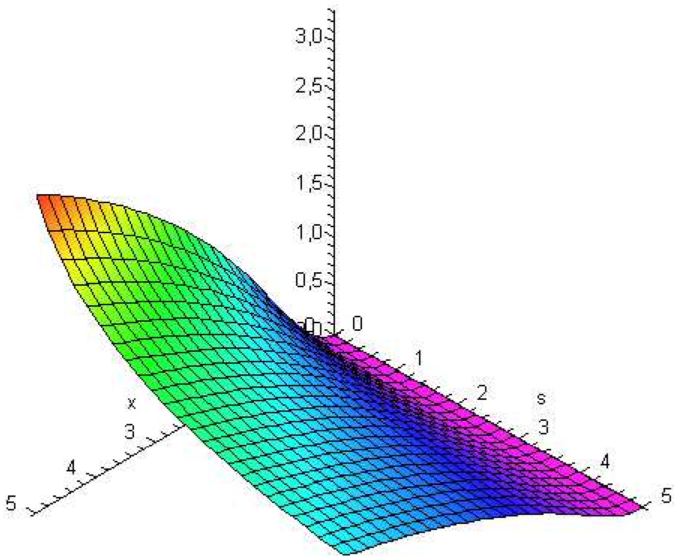
$$u(x,s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}} \cdot \ln(x^2+1), \quad x,s \geq 0.$$

Für $x, s > 0$ gilt:

$$u_x(x,s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}} \cdot \frac{2x}{x^2+1} > 0$$

$$u_s(x,s) = -\frac{1}{2\sqrt{(1+s)^3}} \cdot \ln(x^2+1) < 0$$

$$u_{xs}(x,s) = -\frac{1}{2\sqrt{(1+s)^3}} \cdot \frac{2x}{x^2+1} < 0$$

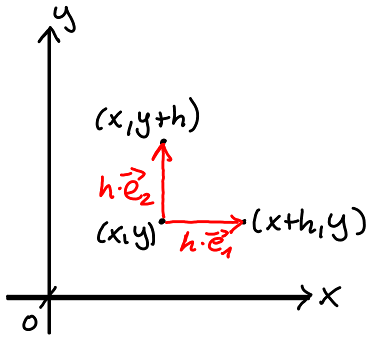


Richtungsableitung und Eigenschaften des Gradienten

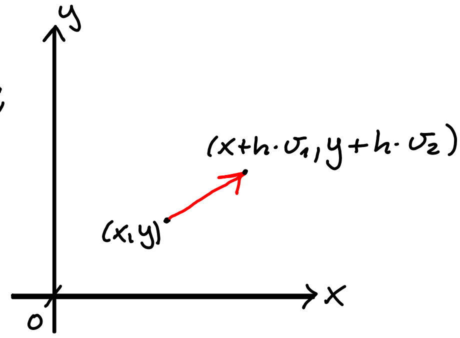
Bisher haben wir nur momentane Änderungsraten in Richtung der Koordinatenachsen, d.h. partielle Ableitungen betrachtet. Dies wollen wir nun verallgemeinern. Dazu betrachten wir zunächst wieder den Fall $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bei den partiellen Ableitungen betrachtet man die Änderung der Funktion in Richtung der kartesischen Einheitsvektoren, d.h. in Richtung von $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$ und $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$, also

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\cdot 1, y+h\cdot 0) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\cdot 0, y+h\cdot 1) - f(x,y)}{h}$$



Wir lassen nun auch andere Richtungsvektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ mit $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ zu. Damit ergibt sich verallgemeinernd folgende Definition für die Richtungsableitung, d.h. für die momentane Änderungsrate einer Funktion bzgl. $\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$.



Definition: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Die Richtungsableitung (der Anstieg) von f in Richtung $\vec{v}$ mit $|\vec{v}|=1$ ist definiert als

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cdot v_1, y+h\cdot v_2) - f(x,y)}{h} = \partial_{\vec{v}} f(x,y),$$

falls der Grenzwert existiert.

Man sieht leicht ein, dass man speziell für $\vec{v}=\vec{e}_1$ bzw. $\vec{v}=\vec{e}_2$ die partiellen Ableitungen erhält, d.h.

$$\partial_{\vec{e}_1} f(x,y) = f_x(x,y) \text{ und } \partial_{\vec{e}_2} f(x,y) = f_y(x,y).$$

Ist die Funktion stetig partiell differenzierbar, d.h. existieren die partiellen Ableitungen und sind stetig, so lassen sich die Richtungsableitungen sehr einfach mit Hilfe der partiellen Ableitungen berechnen.

Der folgende Satz ist daher für praktische Rechnungen von großer Bedeutung.

Satz: Sei $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ mit $|\vec{v}|=1$:

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = v_1 \cdot f_x(x,y) + v_2 \cdot f_y(x,y)$$
$$= \langle \vec{v}, \operatorname{grad} f(x,y) \rangle$$

Beispiel: $f(x,y) = 8 - x^2 - 4y^2$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Es gilt $|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2} = 1$ und $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix}-2x\\-8y\end{pmatrix}$.

Somit ist $\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2x\\-8y\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2x+8y)$.

An der Stelle $(x^*, y^*) = (1,1)$ gilt z.B.

$f_x(1,1) = -2$, $f_y(1,1) = -8$, $\partial_{\vec{v}} f(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 6 = 3\cdot\sqrt{2}$

Beispiel: $f(x,y) = \ln(y^2-x)$, $\vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Es gilt $|\vec{v}| = \frac{1}{5}\sqrt{4^2+3^2} = 1$ und $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{y^2-x}\\ \frac{2y}{y^2-x}\end{pmatrix} = \frac{1}{y^2-x}\begin{pmatrix}-1\\2y\end{pmatrix}$.

Somit ist $\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \left\langle \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{y^2-x}\begin{pmatrix}-1\\2y\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{6y-4}{5(y^2-x)}$

An der Stelle $(x^*, y^*) = (-1, 2)$ gilt z.B.

$$f_x(-1,2) = -\frac{1}{5}\,,\quad f_y(-1,2) = \frac{4}{5}\,,\quad \partial_{\vec{v}} f(-1,2) = \frac{8}{25}$$

Im Folgenden nehmen wir zunächst wieder die Anschauung zu Hilfe und stellen uns vor, dass wir an einer Stelle in einer Gebirgslandschaft stehen und diejenige Richtung suchen, die uns den steilsten Anstieg bzw. Abstieg zeigt. Hierauf lässt sich tatsächlich eine allgemeingültige Antwort geben. Dies ist von großen praktischen Nutzen im Zusammenhang mit Algorithmen zur Lösung von Optimierungsproblemen, wenn man z.B. ausgehend von einem Startpunkt schrittweise immer wieder in Richtung des steilsten Anstiegs bzw. Abstiegs fortschreiten will, um (näherungsweise) zu einem Maximum bzw. Minimum zu gelangen.

Um verstehen zu können, was mathematisch dahinter steckt, muss man wissen, dass es zwei Möglichkeiten gibt, innere Produkte (Skalarprodukte) von Vektoren zu berechnen.

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$, so gilt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2\,,$$

wobei der kleinere Winkel zu nehmen ist.

Da sich für eine stetig partiell differenzierbare Funktion die Richtungsableitung über das innere Produkt $\langle \vec{v}, \operatorname{grad} f(x,y) \rangle$, $|\vec{v}| = 1$, berechnen lässt, gilt also

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \underbrace{|\vec{v}|}_{=1} \cdot |\operatorname{grad} f(x,y)| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}, \operatorname{grad} f(x,y))$$

Der maximal mögliche Wert für den Cosinus ist 1 bei einem Winkel von 0° und der minimal mögliche Wert ist −1 für einen Winkel von 180°.

Die Richtungsableitung $\partial_{\vec{v}} f(x,y)$ wird also maximal, wenn $\vec{v}$ und $\operatorname{grad} f(x,y)$ in dieselbe Richtung zeigen und minimal, wenn $\vec{v}$ und $\operatorname{grad} f(x,y)$ in die entgegengesetzte Richtung zeigen.

Zusammenfassend ergibt sich somit:

Satz: Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs, der negative Gradient zeigt in Richtung des steilsten Abstiegs.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

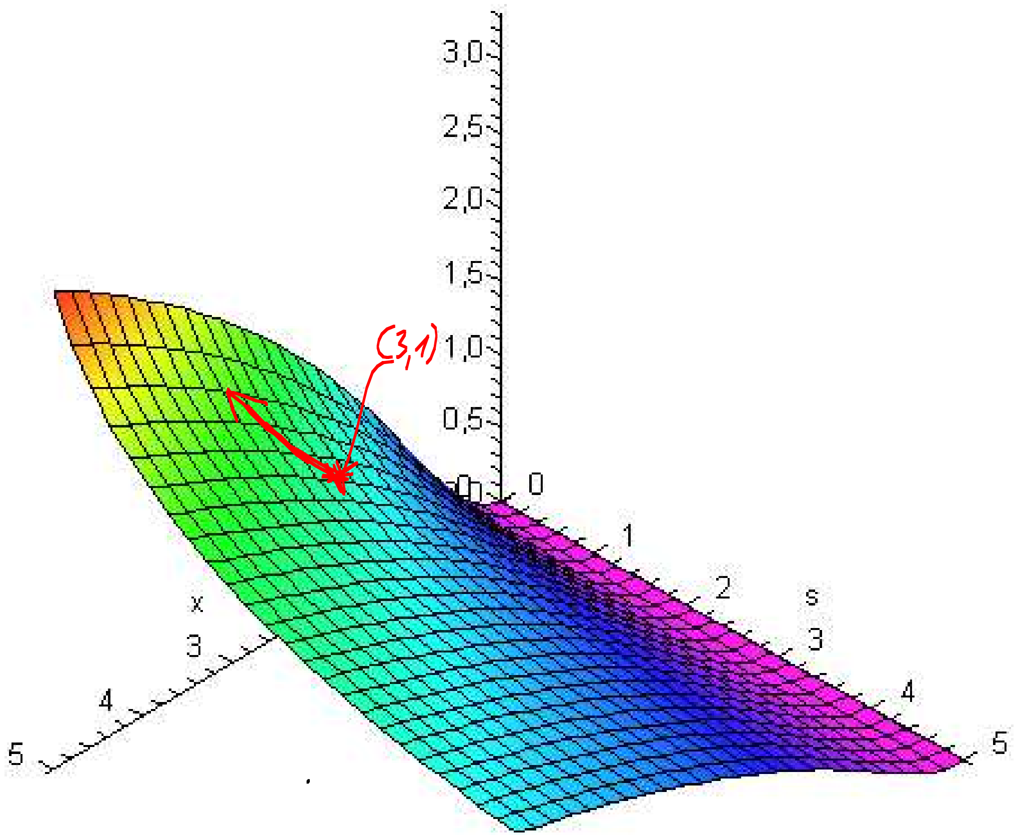
$$u(x,s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}} \ln(x^2+1) \quad , \quad x, s \geq 0,$$

die wir schon in einem früheren Beispiel untersucht haben.

Allgemein ist die Richtung des steilsten Anstiegs

$$\operatorname{grad} u(x,s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s}} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \ , \ -\frac{1}{2\sqrt{(1+s)^3}} \cdot \ln(x^2+1) \right)^T$$

An der Stelle $(x^*, s^*) = (3,1)$ z.B. $\operatorname{grad} u(3,1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot \ln(10) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.41 \end{pmatrix}$



Eine weitere Eigenschaft des Gradienten erschließt sich mit Hilfe folgender Überlegung. Zeigt $\vec{v}$ in Richtung der Tangenten einer Niveaulinie, so ist die Richtungsableitung in Richtung von $\vec{v}$ gleich Null, da sich der Funktionswert auf einer Niveaulinie nicht ändert. In diesem Fall ist also

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \langle \vec{v}, \operatorname{grad} f(x,y) \rangle = 0 .$$

Das innere Produkt zweier Vektoren ist aber genau dann Null, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind, also $\vec{v} \perp \operatorname{grad} f(x,y)$.

Zusammenfassend erhalten wir:

Satz: Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien.