III Analysis in zwei Variablen

11. Funktionen mehrerer Variablen

In den vorausgehenden Kapiteln zum Thema Analysis haben wir uns ausschließlich mit der Untersuchung von Funktionen einer Variablen beschäftigt. Eine realistische Beschreibung ökonomischer Zusammenhänge erfordert aber häufig mehrere Variablen. Die Nachfrage eines Verbrauchers nach einem Gut wie z.B. Butter hängt nicht nur vom Preis, sondern auch vom Einkommen und den Preisen sogenannter Substitute (z.B. Margarine) ab. Wir werden uns daher in den folgenden Kapiteln mit der Untersuchung von Funktionen mehrerer Variablen beschäftigen.

Dies setzt die Kenntnisse der Inhalte der letzten Kapitel voraus!

Zum Einstieg betrachten wir zwei Beispiele ökonomischer Fragestellungen im Zusammenhang mit Funktionen mehrerer Variablen.

Beispiel: In einem landwirtschaftlichen Betrieb hängt die Produktion, d.h. die Anzahl Y produzierter Einheiten vom investierten Kapital K, dem Arbeitseinsatz L und der verwendeten Anbaufläche T ab. Häufig wird ein solcher Zusammenhang durch eine Cobb-Douglas-Funktion, d.h. eine Funktion des Typs

$$Y = A \cdot K^a \cdot L^b \cdot T^c$$

mit positiven Konstanten A, a, b, c, beschrieben.

Fragestellungen können z.B. sein:

- Wie ändert sich die Anzahl der produzierten Einheiten, wenn das Kapital erhöht wird und wie stark ist die Änderung?
- Was passiert, wenn wir gleichzeitig das Kapital verringern, aber den Arbeitseinsatz und die Anbaufläche erhöhen?

Beispiel: Ein Unternehmen produziert zwei Güter, wobei das 1. Gut zum Preis p, das 2. Gut zum Preis q pro Einheit verkauft wird.

Die Kosten für die Herstellung und den Verkauf von x Einheiten des 1. Gutes und y Einheiten des 2. Gutes seien $\alpha x^2 + \beta y^2$.
Die Gewinnfunktion des Unternehmens lautet somit

$$G = px + qy - (\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Man kann z.B. untersuchen, bei welchen Werten für x und y der Gewinn maximal wird.

Auch bei den folgenden Kapiteln können wir im Zusammenhang mit Funktionen von der Vorstellung ausgehen, dass es sich z.B. um Nachfrage-, Angebots-, Kosten-, Produktions-, Konsum- oder Gewinnfunktionen handelt.
Da einerseits die meisten Schwierigkeiten beim Übergang von einer zu zwei Variablen entstehen, andrerseits die Graphen von Funktionen, die man sich zunächst als mehr oder weniger gekrümmte Flächen im dreidimensionalen Raum vorstellen kann, mit Hilfe geeigneter Software veranschaulicht werden können, werden wir Funktionen von zwei Variablen behandeln.

Grundlegende Begriffe und Definitionen

Definition: Eine reelle Funktion f von zwei Variablen ist eine Zuordnung, die jedem geordneten Paar (x_1, x_2) aus einer Menge $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$ eindeutig eine reelle Zahl, den Funktionswert, zuordnet.
$\mathbb{D}_f$ heißt Definitionsbereich von f, die Menge aller Funktionswerte $\mathbb{W}_f$ heißt Wertebereich von f.

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2)$$

Bei Funktionen von zwei Variablen schreiben wir häufig auch (x, y) statt (x_1, x_2).

Bezeichnung: Ist f eine Funktion von zwei Variablen x und y, so bezeichnen wir häufig den Wert von f an einer Stelle (x,y) mit $z = f(x,y)$. x und y heißen dann unabhängige Variable oder Argumente von f und z abhängige Variable.
In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man auch die Bezeichnungen exogene Variablen für x und y und endogene Variable für z.

Bemerkung: Auch bei Funktionen von zwei oder mehr Variablen ist bei der Definition des Funktionsbegriffs die Forderung nach der Eindeutigkeit der Zuordnung wichtig.

Definitionsbereich: Wir vereinbaren, analog zu dem Vorgehen für Funktionen einer Variablen, dass der Definitionsbereich aus allen geordneten Zahlenpaaren $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bestehen soll, für die die Funktion berechnet werden kann, es sei denn, dass ein anderer Definitionsbereich durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist.
Da der Definitionsbereich nun eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist, ist die Bestimmung häufig komplizierter.

Beispiel: Wir bestimmen den Definitionsbereich von

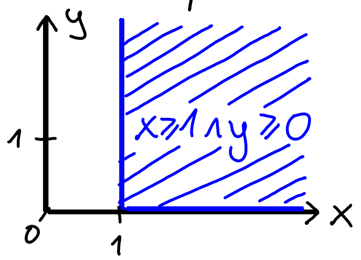
$$f(x,y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}.$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Argumente definiert ist, muss gelten:

$$(x-1 \geq 0 \wedge y \geq 0) \iff (x \geq 1 \wedge y \geq 0)$$

Somit ist $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \wedge y \geq 0\}$

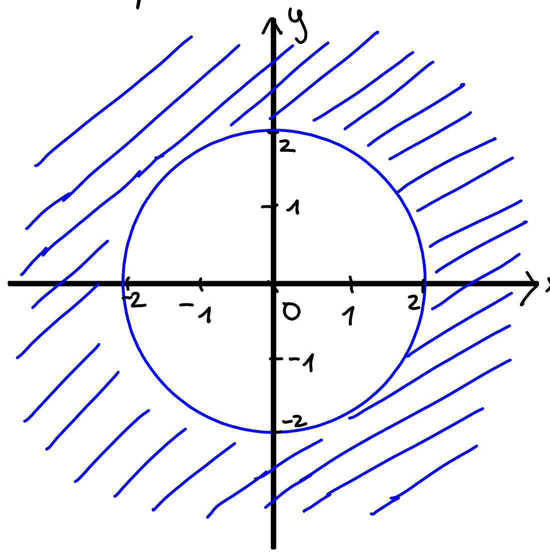
Skizze des Definitionsbereichs in der xy-Ebene:



Bemerkung: Für das nächste Beispiel benötigen wir folgenden Sachverhalt.
Der Graph von $x^2+y^2=r^2, r>0$, besteht aus allen Punkten (x,y) in der xy-Ebene, die vom Ursprung den Abstand r haben, also auf dem Rand des Kreises um den Ursprung mit Radius r liegen. Entsprechend liegen die Punkte mit $x^2+y^2<r^2$ innerhalb und die mit $x^2+y^2>r^2$ außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius r.

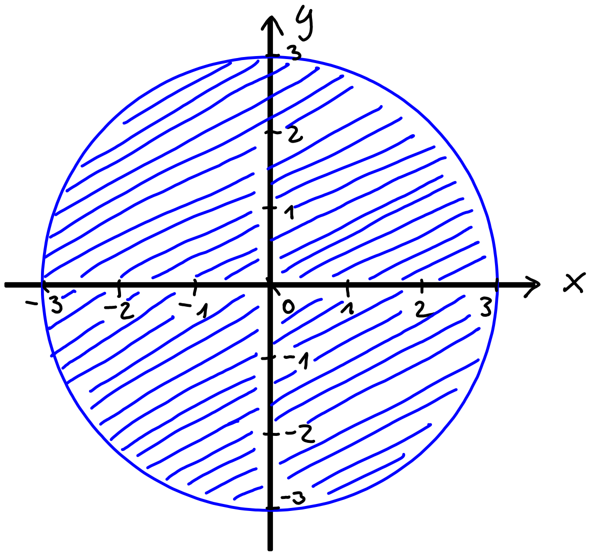
Beispiel:

1) Wir bestimmen den Definitionsbereich von $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$.
Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden, d.h.
$x^2+y^2-4\geq 0 \iff x^2+y^2\geq 4$
Der Definitionsbereich besteht also aus allen Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, die auf dem Rand oder außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 2 liegen, d.h. $\mathbb{D}_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 4\}$
Skizze des Definitionsbereichs:



2) Wir bestimmen den Definitionsbereich von $h(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)}$.
Es gilt: $9-(x^2+y^2)\geq 0 \iff x^2+y^2\leq 9$
Der Definitionsbereich $\mathbb{D}_h=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\}$ besteht somit aus allen Punkten (x,y) in der xy-Ebene, die auf dem Rand oder innerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 3 liegen.

Skizze des Definitionsbereichs:



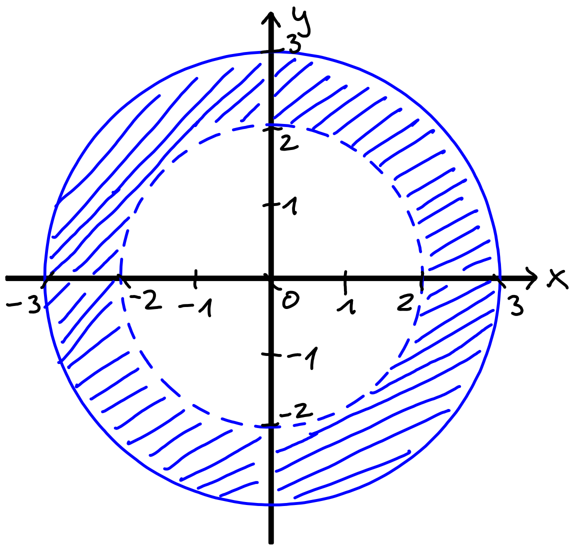
3) Wir bestimmen den Definitionsbereich von $f(x,y)=\frac{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2-4}}=\frac{h(x,y)}{g(x,y)}$

Der Nenner darf nicht Null werden. Zusammen mit den Überlegungen in 1) und 2) gilt also:

$\mathbb{D}_f=\{\mathbb{D}_h\cap\mathbb{D}_g\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4<x^2+y^2\leq 9\}$.

Das ist der Kreisring, der von den Kreisen um den Ursprung mit den Radien 2 und 3 eingeschlossen wird, wobei der Rand des Kreises mit Radius 2 nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

Skizze des Definitionsbereichs:

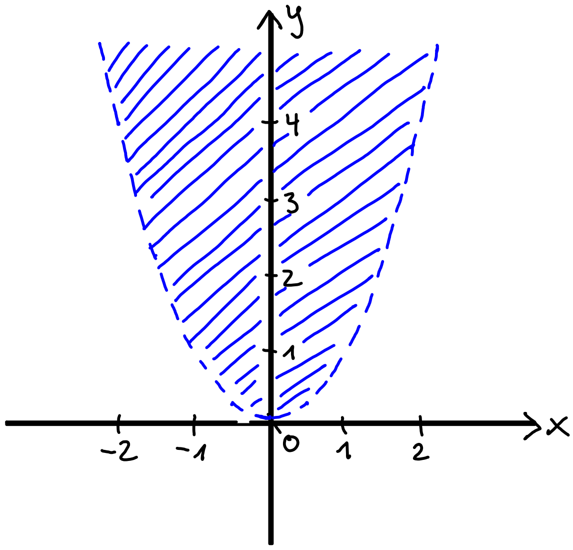


Bemerkung: Die Gleichung $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, $r>0$, beschreibt einen Kreis um den Mittelpunkt (x_0,y_0) mit Radius r.

Beispiel: Wir bestimmen den Definitionsbereich von $f(x,y) = \ln(y-x^2)$.
Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, muss gelten: $y - x^2 > 0 \iff y > x^2$

Somit ist $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

Skizze des Definitionsbereichs:



Lineare, affin lineare Funktionen und Polynome

Bei diesen Funktionen handelt es sich um verhältnismäßig einfache Funktionen, so dass wir hier die Definitionen direkt für den allgemeinen Fall mehrerer Variablen angeben wollen.

Beispiel: Die Nachfrage N nach Zucker in den Vereinigten Staaten zwischen 1929 und 1935 wird näherungsweise beschrieben durch

$$N(p,w,t) = 108.83 - 6.0294 \cdot p + 0.164 \cdot w - 0.4217\, t$$

mit den drei Variablen p (Preis für Zucker), w (ein Produktionsindex) und t (Zeit, wobei $t=0$ dem Jahr 1929 entspricht).
Die Variablen p, w und t erscheinen hier nur in der 1. Potenz und werden nur mit Konstanten multipliziert. Hinzu kommt noch eine additive Konstante. Solche Funktionen heißen affin-lineare Funktionen.

Definition: Eine Funktion der Form $f(x_1,x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ mit beliebigen reellen Konstanten a_0, a_1, a_2 heißt affin-lineare Funktion in den beiden Variablen x_1 und x_2.
Falls $a_0 = 0$ ist, heißt sie lineare Funktion.

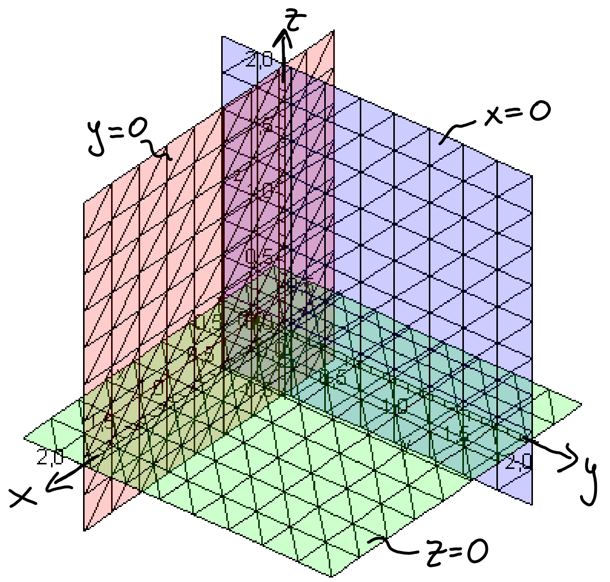
Beispiel: $f(x_1, x_2) = 5 - 7x_1 + \pi x_2$ ist affin linear.
$g(x_1, x_2) = \sqrt{2}\, x_1 + e \cdot x_2$ ist linear.

Definition: Eine Summe von Ausdrücken der Form $c \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2}$ mit nichtnegativen, ganzzahligen Potenzen k_1 und k_2 heißt **Polynom**. Der **Grad des Polynoms** ist die maximal vorkommende Summe der auftretenden Potenzen.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = -2 + x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2 - x_2^3$ ist ein Polynom vom Grad 2.
$g(x_1, x_2) = \sqrt{2}\, x_1^4 - 27 x_1 x_2^2 + \pi x_1^4 x_2$ ist ein Polynom vom Grad 5.

Geometrische Darstellung von Funktionen zweier Variablen

Bei der Analyse von Funktionen einer Variablen haben wir gesehen, dass es häufig sehr nützlich ist, Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem in der Ebene darzustellen. Funktionen von zwei Variablen lassen sich ebenfalls durch ihre Graphen, die Flächen im dreidimensionalen Raum bilden, visualisieren. Grundlage bildet wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem, diesmal mit 3 Koordinatenachsen, die jeweils zueinander orthogonal sind. Jeder Punkt im dreidimensionalen Raum ist durch Angabe der Koordinaten als Tripel (x_0, y_0, z_0) reeller Zahlen festgelegt.



Die Gleichung $z=0$ wird von allen Punkten in einer Koordinatenebene, die von der x- und der y-Achse aufgespannt wird, erfüllt (xy-Ebene).
Analog xz-Ebene für $y=0$ und yz-Ebene für $x=0$.

Ähnlich, wie die Koordinatenachsen die Ebene in 4 Quadranten unterteilt, wird der dreidimensionale Raum durch die Koordinatenebenen in 8 Oktanten eingeteilt. Der Oktant $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0 \wedge y\geq 0 \wedge z\geq 0\}$ heißt auch der nichtnegative Oktant.

Definition: Unter dem Graphen einer Funktion $z=f(x,y)$ versteht man die Menge $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\mathbb{D}_f,\ z=f(x,y)\}$.

Ist $(x_0,y_0)\in\mathbb{D}_f$ eine Stelle im Definitionsbereich von f, so bestimmt man dazu den zugehörigen Funktionswert $z_0=f(x_0,y_0)$, der sich anschaulich als "Höhe" interpretieren lässt. Um eine Vorstellung vom Funktionsgraphen zu bekommen, muss man allerdings hinreichend viele Funktionswerte bestimmen. Eine zusätzliche Schwierigkeit besteht in der projizierten Darstellung in der Zeichenebene, da wir nicht jedesmal ein 3D-Modell bauen wollen. Tatkräftige Unterstützung erhält man von leistungsfähigen Computerprogrammen.
Einfach (auch ohne Computerprogramm) zu zeichnen sind lineare und affinlineare Funktionen im $\mathbb{R}^3$, d.h. Funktionen der Form $z=f(x,y)=ax+by+c$. Die Graphen solcher Funktionen sind Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Um sich eine Vorstellung von der Lage einer solchen Ebene im $\mathbb{R}^3$ zu verschaffen, ermittelt man z.B. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. Durch diese ist die Ebene eindeutig festgelegt.

Beispiel: $z=4-4x-2y$

Schnittpunkt mit der x-Achse, d.h. $y=0 \wedge z=0$, also

$$0=4-4x \iff x=1$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist also $(1,0,0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse, d.h. $x=0 \wedge z=0$, also

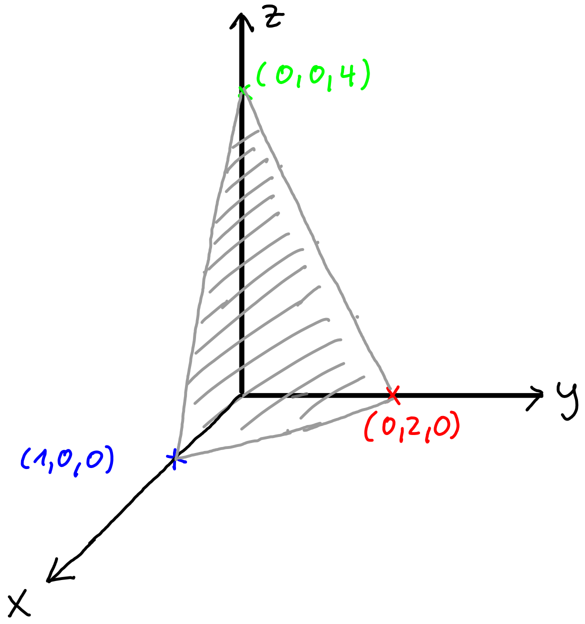
$$0=4-2y \iff y=2$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also $(0,2,0)$.

Schnittpunkt mit der z-Achse, d.h. $x=0 \wedge y=0$, also

$$z=4$$

Der Schnittpunkt mit der z-Achse ist also $(0,0,4)$.



Allgemein lässt sich jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch eine Gleichung der Form

$$px+qy+rz=m$$

beschreiben. Für $r \neq 0$ kann man die Gleichung nach z auflösen und erhält eine Funktionsgleichung der oben angegebenen Form.

Beispiel: Xantippe Fröhlich hat einen Betrag von 100 € für den Kauf von drei Gütern zur Verfügung, deren Preise 15 €, 10 € und 20 € pro Einheit sind. Kauft Xantippe Fröhlich x Einheiten des 1., y Einheiten des 2. und z Einheiten des 3. Gutes, dann betragen die Gesamtkosten

$$15x+10y+20z.$$

Wenn die gesamten 100 € ausgegeben werden sollen, muss somit gelten:

$$15x+10y+20z=100.$$

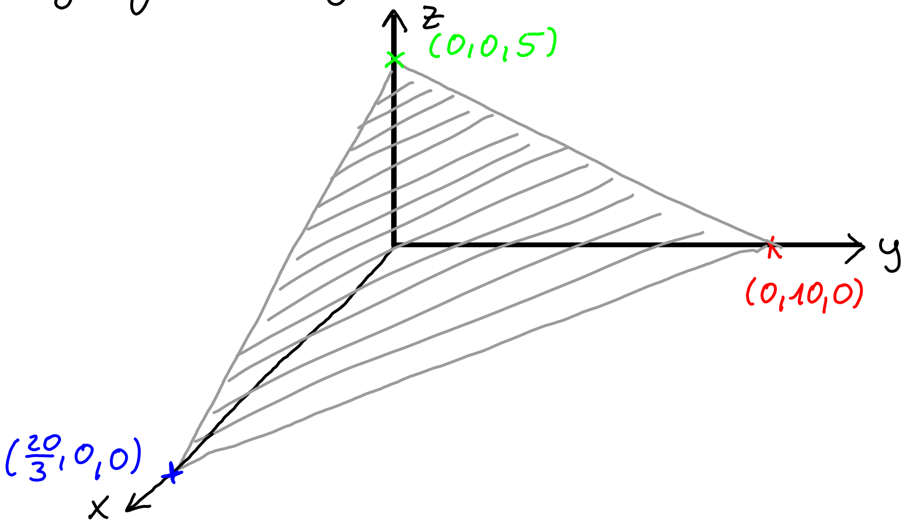
Sinnvollerweise sind hier die Bedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ zu stellen.

Auflösen der Gleichung nach z liefert: $z = 5 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y$.

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind

$\left(\frac{20}{3},0,0\right)$, $(0,10,0)$, $(0,0,5)$.

Alle Punkte des Dreiecks mit den Eckpunkten $(\frac{20}{3},0,0)$, $(0,10,0)$ und $(0,0,5)$ erfüllen die Gleichung $z=5-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y$ und die Zusatzbedingungen $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.



Wir betrachten das Beispiel aus einem allgemeineren Blickwinkel.

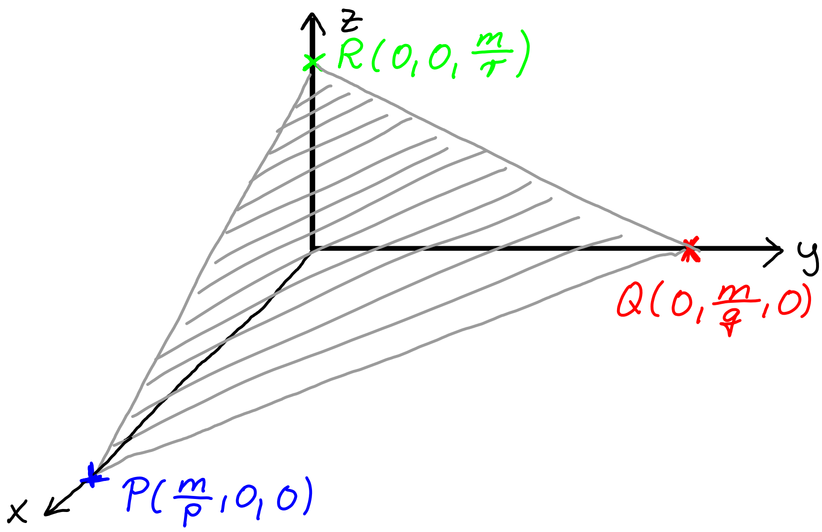
Beispiel: Für positive Konstanten p, q, r und m sei die Gleichung

$$px+qy+rz=m$$

gegeben. Diese Gleichung kann folgendermaßen ökonomisch interpretiert werden. Eine Person habe einen Betrag m für den Kauf von drei Gütern zur Verfügung, deren Preise p, q und r pro Einheit betragen. Kauft die Person x Einheiten des 1., y Einheiten des 2. und z Einheiten des 3. Gutes, dann betragen die Gesamtkosten

$$px+qy+rz.$$

Die Gleichung $px+qy+rz=m$ ist daher die Budgetgleichung. Nur solche Tripel (x,y,z) können gekauft werden, die die Budgetgleichung erfüllen. Die zugehörige Ebene heißt Budgetebene. Hat man zusätzlich die Bedingungen $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$, so hat man als Teil dieser Ebene das Dreieck mit den Eckpunkten $P(\frac{m}{p},0,0)$, $Q(0,\frac{m}{q},0)$, $R(0,0,\frac{m}{r})$.



Darf auch weniger als das vorgegebene Budget m ausgegeben werden, so erhält man die Budgetmenge

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : px + qy + rz \leq m,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Sie bildet anschaulich einen dreidimensionalen Körper, der durch die Koodinatenebenen und die Budgetebene begrenzt wird.

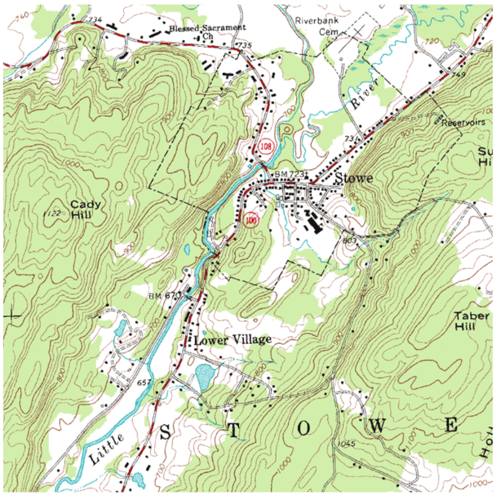
Niveaulinien, Höhenlinien

Eine weitere Möglichkeit der Visualisierung besteht in der Ermittlung und Darstellung von Niveaulinien. Die Niveaulinie (Höhenlinie) einer Funktion f zum Niveau (zur Höhe) c besteht aus allen Punkten $(x,y) \in D_f$, die die Gleichung $f(x,y) = c$ erfüllen. Es handelt sich somit um Linien, die Punkte mit gleichem Funktionswert miteinander verbinden.

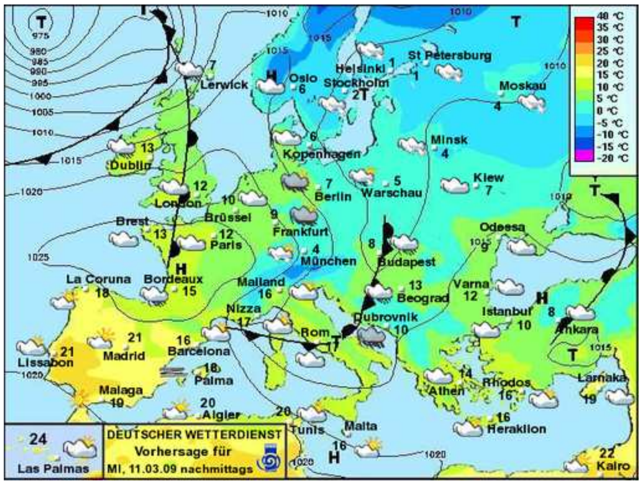
In konkreten Anwendungen haben die Niveaulinien oft spezielle Namen.

Modell einer Hotelanlage mit Höhenlinienprofil in einer Gebirgslandschaft in der Nähe der Chinesischen Mauer

Auf Landkarten findet man Höhenlinien, d.h. Linien mit gleicher Höhe über dem Meeresspiegel.



Auf Wetterkarten findet man sogenannte Isobaren, d.h. Linien mit konstantem Luftdruck.



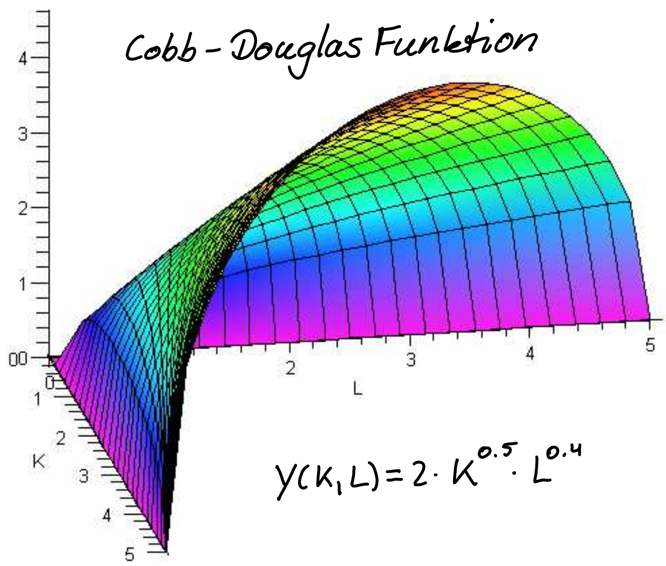
In ökonomischen Anwendungen findet man z.B. die Begriffe

- Isokostenlinien: Sie stellen die möglichen Kombinationen von Einsatzmengen zweier Produktionsfaktoren wie z.B. Kapital und Arbeit dar, die die gleichen Kosten verursachen.
- Isoquanten: Sie stellen die möglichen Kombinationen zweier Produktionsfaktoren dar, die den gleichen Output erzeugen.

Beispiel: Der produzierte Output Y eines Unternehmens sei in Abhängigkeit vom Kapital K und vom Arbeitseinsatz L durch die Cobb-Douglas Funktion

$$Y(K,L) = 2 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4}, \quad K, L \geq 0,$$

gegeben.



Zur Bestimmung der Niveaulinien interessieren uns diejenigen Wertepaare (K,L), für die $Y(K,L)$ mit einer Konstanten c übereinstimmt. Da nach Voraussetzung $K,L \geq 0$, muss $c \geq 0$ sein.

$$Y(K,L) = c \iff 2 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4} = c$$

Wir wollen die Niveaulinien im KL-Koordinatensystem darstellen.

Zunächst gilt: $c = 0 \iff (K = 0 \vee L = 0)$

Für $c > 0$, d.h. $(K > 0 \wedge L > 0)$ lösen wir die obige Gleichung nach K auf:

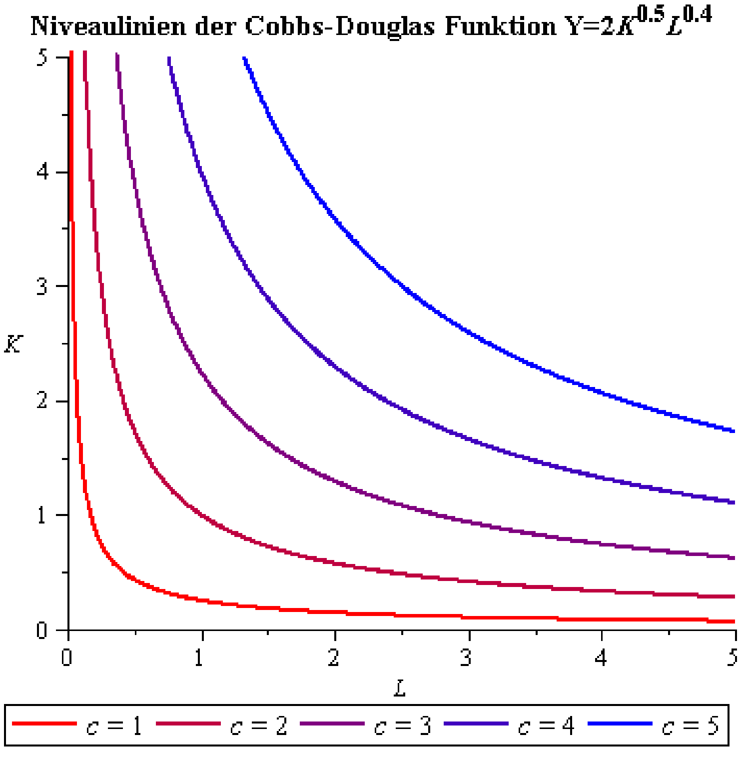
$$2 \cdot K^{0.5} \cdot L^{0.4} = c \iff K^{0.5} = \frac{c}{2} \cdot L^{-0.4}$$
$$\iff K = \frac{c^2}{4} \cdot L^{-0.8}$$

Für unterschiedliche Werte von c ergeben sich nun Gleichungen für verschiedene Niveaulinien, z.B.:

$c = 1: \quad K = \frac{1}{4} \cdot L^{-0.8}$

$c = 2: \quad K = L^{-0.8}$

$c = 3: \quad K = \frac{9}{4} \cdot L^{-0.8}$



Zu vorgegebenem Output $Y(K,L) = c$ kann man nun auf den Isoquanten "entlangwandern", um die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von Kapital K und Arbeitseinsatz L abzulesen, die zu diesem Output führen.

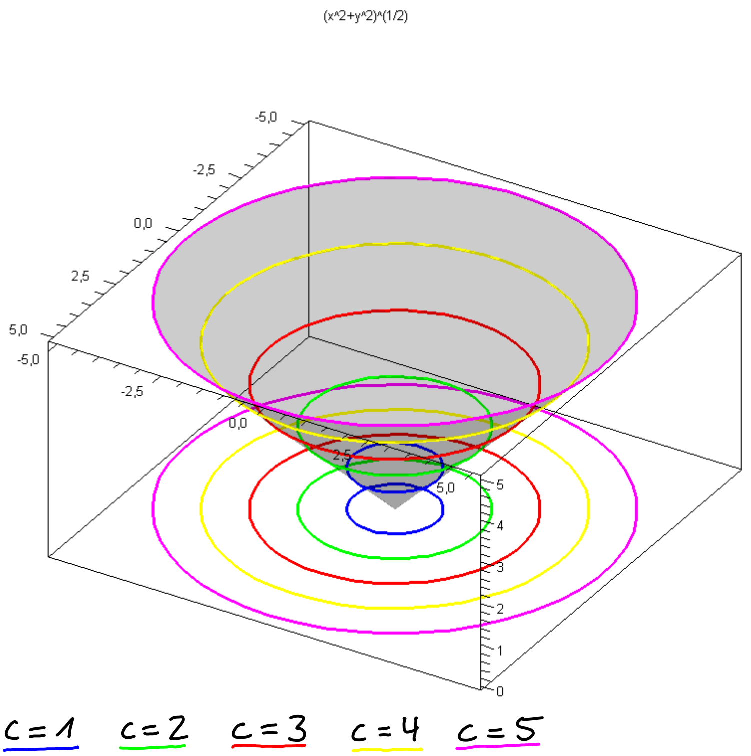
So ergeben z.B. die Kombinationen $(1,1)$ und $(\frac{1}{16}, 32)$ denselben Wert 2 für den Output.

Beispiel: Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Zur Bestimmung der Niveaulinien interessieren uns diejenigen Wertepaare (x,y), für die $f(x,y)$ mit einer Konstanten c übereinstimmt. Nach Definition der Funktion muss $c \geq 0$ sein.

Für $c \geq 0$ gilt: $f(x,y) = c \iff \sqrt{x^2+y^2} = c \iff x^2+y^2 = c^2$

Hier lohnt es nicht, nach y aufzulösen, da man erkennt, dass die Gleichung $x^2+y^2=c^2$ einen Kreis um den Ursprung mit Radius c beschreibt.



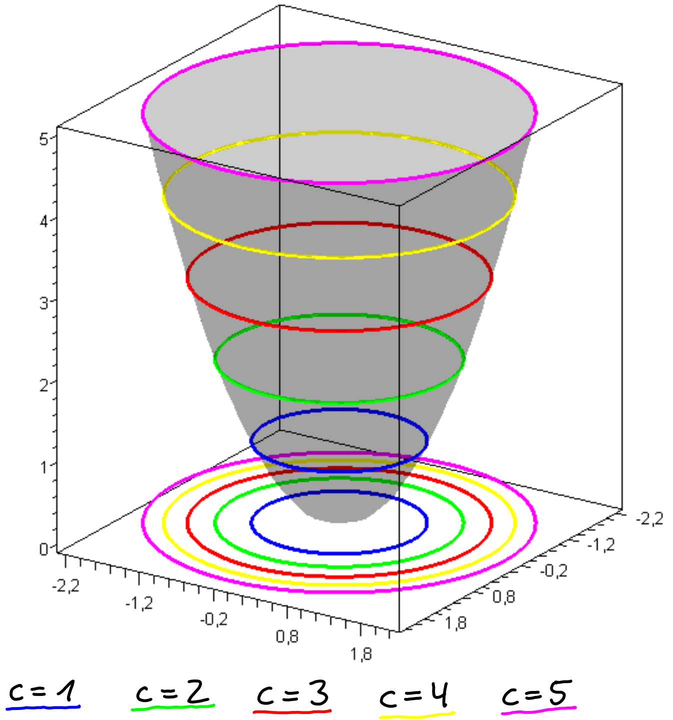
In der nebenstehenden Graphik sind neben dem Graphen von $f(x,y)$, ein Kreiskegel mit Spitze im Ursprung, auch die Niveaulinien für $c = 1, 2, 3, 4, 5$ eingezeichnet.

Beispiel: Sei $f(x,y) = x^2+y^2$.

Auch hier suchen wir wieder zur Bestimmung der Niveaulinien die Wertepaare (x,y), für die die Funktion mit einer Konstanten c übereinstimmt. Nach Definition der Funktion muss wieder $c \geq 0$ sein.

Für $c \geq 0$ gilt: $f(x,y) = c \iff x^2+y^2 = c$

Die Niveaulinien sind auch hier wieder Kreise um den Ursprung, diesmal aber mit Radius $\sqrt{c}$.



Niveaulinien von x^2+y^2.

Beispiel: Wir zeigen, dass alle Wertepaare (x,y), für die $x \cdot y = 2$ erfüllt ist, auf einer Niveaulinie der Funktion $f(x,y) = \frac{3(xy+1)^2}{x^4 y^4}$ liegen.

Dazu setzen wir $x \cdot y = 2$ in die Funktion ein und erhalten:

$$\frac{3(xy+1)^2}{(xy)^4} = \frac{3(2+1)^2}{2^4} = \frac{27}{16}$$

Alle Wertepaare (x,y) mit $xy = 2$, d.h. $y = 2 \cdot \frac{1}{x}$, liegen somit auf derselben Niveaulinie mit der "Höhe" $c = \frac{27}{16}$.

Allgemein gilt wegen $\mathbb{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ ein entsprechendes Resultat auch für alle Wertepaare (x,y) mit $x \cdot y = K$, K Konstante, $K \neq 0$.

Dies liegt daran, dass der Wert von $f(x,y)$ nur vom Wert des Produktes $x \cdot y$ abhängt. So erhält man z.B. durch Einsetzen von $x \cdot y = K$ in die Funktion $f(x,y)$ für

$K = -3$ die Niveaulinie $y = -3 \cdot \frac{1}{x}$ zur "Höhe" $c = \frac{4}{27}$

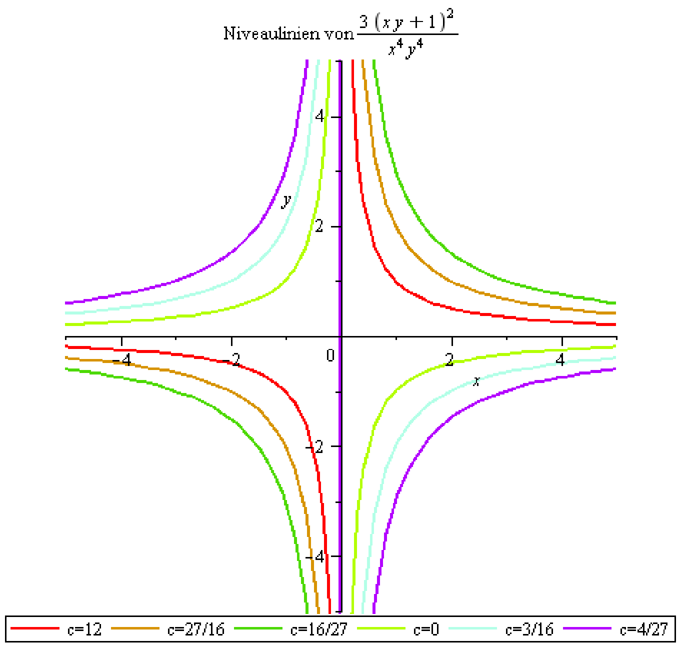
$K = -2$ die Niveaulinie $y = -2 \cdot \frac{1}{x}$ zur "Höhe" $c = \frac{3}{16}$

$K = -1$ die Niveaulinie $y = -\frac{1}{x}$ zur "Höhe" $c = 0$

$K=1$ die Niveaulinie $y=\frac{1}{x}$ zur "Höhe" $c=12$

$K=2$ die Niveaulinie $y=2\cdot\frac{1}{x}$ zur "Höhe" $c=\frac{27}{16}$

$K=3$ die Niveaulinie $y=3\cdot\frac{1}{x}$ zur "Höhe" $c=\frac{16}{27}$



Stetigkeit von Funktionen von zwei Variablen

Bereits bei Funktionen von einer Variablen hatten wir festgehalten, dass Stetigkeit durch die anschauliche Beschreibung "Zeichnen des Graphen, ohne den Stift absetzen zu müssen" unter mathematischen Gesichtspunkten völlig unzureichend ist. Für Funktionen von zwei Variablen ist eine solche Beschreibung offenkundig unmöglich.

Eine sinnvolle Betrachtung ist nur mit Hilfe von Grenzwerten möglich.

Definition: $z_0\in\mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $f(x,y)$ für (x,y) gegen (x_0,y_0), wenn für alle Folgen $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $(x_m,y_m)\in\mathbb{D}_f$ und $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x_0$, $\lim\limits_{m\to\infty}y_m=y_0$ gilt, dass $\lim\limits_{m\to\infty}f(x_m,y_m)=z_0$ ist.

Man schreibt dann $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=z_0$.

$f(x,y)$ heißt stetig im Punkt (x_0,y_0), wenn $(x_0,y_0)\in\mathbb{D}_f$ und $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ ist.

Beispiel: Wir betrachten als Beispiel die sogenannte Parabelfalte

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & , \; x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist hier die Stelle $(x_0,y_0) = (0,0)$ problematisch.
Wir untersuchen die Funktionswerte zu speziellen Linien im Definitionsbereich, die durch $(0,0)$ verlaufen. Speziell gilt:

- für $x = 0$: $f(0,y) = 0$
- für $y = 0$: $f(x,0) = 0$
- für $y = x^2$ mit $x \neq 0$: $f(x,x^2) = \dfrac{2x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = 1$
- für $y = -x^2$ mit $x \neq 0$: $f(x,-x^2) = \dfrac{2 \cdot x^2 \cdot (-x^2)}{x^4 + (-x^2)^2} = -1$

Somit gilt z.B. $f(x,x^2) \longrightarrow 1$ für $x \longrightarrow 0$
oder auch $f(x,-x^2) \longrightarrow -1$ für $x \longrightarrow 0$
aber nach Definition der Funktion $f(0,0) = 0$, d.h. die Funktion ist unstetig an der Stelle $(x_0,y_0) = (0,0)$. Die Überlegungen zeigen auch, dass es im Allgemeinen nicht reicht, das Verhalten in Richtung der Koordinatenachsen zu überprüfen.

Man sieht hier übrigens recht deutlich, dass die Darstellung solcher Unstetigkeiten auch mit leistungsfähigen Computerprogrammen beschränkt ist.

Parabelfalte