

## 10. Integralrechnung

Häufig gibt es Problemstellungen, in denen eine Funktion aus der Kenntnis ihrer Ableitung bestimmt werden muss. Dies ist Gegenstand der Integralrechnung, die auch als Umkehrung zur Differentialrechnung betrachtet werden kann.

Anwendungen der Integralrechnung sind z.B.

- Flächenberechnungen
- Bestimmung der Kostenfunktion aus der Grenzkostenfunktion
- Bestimmung des mittleren Einkommens von Personen mit einem Einkommen zwischen  $a$  und  $b$ .
- Bestimmung der Gesamtnachfrage nach einem Gut aus der Nachfragefunktion

Bevor wir uns beispielhaft solchen Anwendungsproblemen zuwenden können, müssen wir uns mit den Grundlagen der Integralrechnung vertraut machen.

### Unbestimmte Integrale

Wir behandeln zunächst folgende Fragestellung:

Zu einer gegebenen Funktion  $f$  sind Funktionen  $F$  gesucht, so dass  $F' = f$  gilt.

Beispiel:  $f(x) = x^2$

Aus der Differentialrechnung wissen wir, dass  $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$  gilt. Also gilt für  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ , dass  $F'(x) = x^2 = f(x)$  ist.

Solche Funktionen  $F$  heißen Stammfunktionen von  $f$ .  
Genauer definieren wir:

Definition: Sei  $I$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Jedes  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$  heißt eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ .

Beispiel:  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$  ist ebenfalls Stammfunktion von  $f(x) = x^2$ , da  $F'(x) = x^2 = f(x)$  gilt.

Zwei Funktionen, die dieselbe Ableitung besitzen, können sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, da nur die Ableitung einer Konstanten verschwindet. Ist also  $F$  Stammfunktion von  $f$ , dann ist auch  $F + C$  für jede Konstante  $C \in \mathbb{R}$  Stammfunktion von  $f$ . Weitere Stammfunktionen gibt es nicht.

Die Menge aller Stammfunktionen von  $f$  fasst man unter folgendem Begriff zusammen.

Definition: Sei  $F$  eine (beliebige) Stammfunktion von  $f$ . Dann heißt die Menge aller Stammfunktionen von  $f$

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

unbestimmtes Integral von  $f$ .

( $\int$  ist das Integralzeichen,  $f(x)$  der Integrand und  $C$  die Integrationskonstante. Aus  $dx$  ist ersichtlich, dass  $x$  die Integrationsvariable ist.)

Beispiel: Die Grenzkostenfunktion (1. Ableitung der Kostenfunktion) eines Unternehmens sei  $K'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ . Weiter sei bekannt, dass die Fixkosten 200 sind. Gesucht ist die zugehörige Kostenfunktion.

Wir bestimmen zunächst  $\int (3x^2 + 2x + 1) dx$ .

Da  $\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 + x) = 3x^2 + 2x + 1 = K'(x)$  ist, gilt

$$\int (3x^2 + 2x + 1) dx = x^3 + x^2 + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Mit den vorgegebenen Fixkosten von 200 ermitteln wir daraus die Kostenfunktion  $K(x) = x^3 + x^2 + x + 200$  des Unternehmens.

Aus der Definition des unbestimmten Integrals folgt, dass die Ableitung eines unbestimmten Integrals mit dem Integranden übereinstimmt, d.h.

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) = f(x),$$

denn: Ist  $F$  Stammfunktion zu  $f$ , dann gilt

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = F'(x) = f(x).$$

Mit Hilfe dieser Aussage lassen sich nun einige wichtige Integrale von Grundfunktionen unmittelbar bestätigen, wobei sich die folgenden Aussagen stets auf den jeweiligen Definitionsbereich der Funktion beziehen.

### Wichtige Integrale von Grundfunktionen

1) Für  $a \neq -1$  gilt:  $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$

denn:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \right) = x^a$

2)  $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

denn:

1. Fall:  $x > 0$ . Dann gilt  $|x| = x$ , also  $\ln|x| = \ln x$  und

$$\frac{d}{dx} (\ln x + C) = x^{-1}$$

2. Fall:  $x < 0$ . Dann gilt  $|x| = -x$ , also  $\ln|x| = \ln(-x)$ .

Mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{d}{dx} (\ln(-x) + C) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = x^{-1}$$

$$3) \int e^x dx = e^x + C, \text{ denn: } \frac{d}{dx} (e^x + C) = e^x$$

$$4) \int \ln(x) dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\text{denn: } \frac{d}{dx} (x \cdot \ln x - x + C) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

Im Kapitel Differentialrechnung haben wir gesehen, dass wir durch konsequentes Anwenden der Differentiationsregeln auch komplizierte Funktionen differenzieren können. Die Bestimmung unbestimmter Integrale sogar einfacher Funktionen kann dagegen sehr schwierig sein. Ein Beispiel dafür ist die Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$ , die bei der Gaußschen Normalverteilung in der Statistik eine wesentliche Rolle spielt. Man kann zwar zeigen, dass  $\int e^{-x^2} dx$  existiert, das Ergebnis lässt sich aber nicht in einer "einfachen Form" durch unsere Standardfunktionen ausdrücken.

Wir werden jedoch einige mathematische Methoden behandeln, mit deren Hilfe man schon eine Menge häufig vorkommender Fälle behandeln kann.

Neben den folgenden einfachen Integrationsregeln werden wir uns mit der Methode der partiellen Integration und der Substitution beschäftigen, die in engem Zusam-

menhang mit der Produktregel und der Kettenregel der Differentialrechnung stehen.

### Elementare Integrationsregeln

1) Konstante Faktoren

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

2) Integral einer Summe

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

3) "Lineare Substitution" (Begriffsbildung s.u.)

Ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$ , dann gilt mit  $a \neq 0$ :

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

(Lineare Funktion von  $x$ )

$$\text{denn: } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax+b) = f(ax+b)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + x - 3) dx &= 2 \cdot \int x^2 dx + \int x dx - 3 \cdot \int 1 dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 3 \cdot x + C \end{aligned}$$

$$\int \left( \frac{2}{x} - 4 \cdot e^x \right) dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx - 4 \cdot \int e^x dx = 2 \ln|x| - 4e^x + C$$

$$\int (2x-5)^{184} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{185} (2x-5)^{185} + C$$

$$\int \frac{1}{(4x-7)} dx = \frac{1}{4} \ln|4x-7| + C$$

$$\int \ln\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2}x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}x \right) + C = x \cdot \ln\left(\frac{1}{2}x\right) - x + C$$

$$a > 0 \wedge a \neq 1: \int \log_a x \, dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} (x \ln x - x) + C$$

$$a \neq 0: \int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$a > 0 \wedge a \neq 1: \int a^x \, dx = \int e^{(\ln a) \cdot x} \, dx = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{(\ln a) \cdot x} + C = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$$

### Partielle Integration

Aus der Regel für die Differentiation eines Produktes zweier Funktionen  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  lässt sich eine sehr wichtige und häufig anzuwendende Integrationsregel herleiten.

Indem man auf beiden Seiten der Produktregel das unbestimmte Integral bildet und beachtet, dass  $f(x) \cdot g(x)$  eine Stammfunktion zu  $(f(x) \cdot g(x))'$  ist, erhält man

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) g(x) \, dx + \int f(x) g'(x) \, dx.$$

Durch Umordnen erhält man daraus die Formel der partiellen Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

In den folgenden Beispielen werden wir sehen, wie sich diese Regel verwenden lässt.

Prinzipiell lässt sich die Formel für die partielle Integration sinnvoll anwenden, wenn

- 1)  $g(x)$  bestimmt werden kann und das neue Integral auf der rechten Seite leichter zu bestimmen ist als das

ursprüngliche Integral.

2)  $g(x)$  bestimmt werden kann und man eine Gleichung für das unbekannte Integral erzeugen kann.

Beispiele:  $\int x \cdot e^x dx$

Zunächst müssen wir überlegen, welche der Funktionen  $f(x)$  und welche  $g'(x)$  sein soll.

Prinzipiell hat man dafür zwei Möglichkeiten.

1. Nehmen wir  $f(x) = e^x$  und  $g'(x) = x$ , dann ist  $f'(x) = e^x$  und  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ . Wenn wir dies in die Formel für die partielle Integration einsetzen, erhalten wir auf der rechten Seite ein Integral, das nicht einfacher, sondern komplizierter ist als das ursprüngliche. Diese Wahl ist also ungeeignet.

2. Nehmen wir  $f(x) = x$  und  $g'(x) = e^x$ , dann ist  $f'(x) = 1$  und  $g(x) = e^x$ . Einsetzen in die Formel für die partielle Integration liefert

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$\downarrow$   
 $f(x)$

$\downarrow$   
 $g'(x)$

$\downarrow$   
 $f(x)$

$\downarrow$   
 $g(x)$

$\downarrow$   
 $f'(x)$

$\downarrow$   
 $g(x)$

**Wichtig!**

Wie man ohne viel "Rumprobieren" die Rollen von  $f(x)$  und  $g'(x)$  verteilt, lernt man am besten durch ÜBEN!

Beispiel:  $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$

Wenn wir hier  $f(x) = e^{3x}$  und  $g'(x) = x^2$  wählen, ist  $f'(x) = 3e^{3x}$  und  $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ , d.h. "das neue Integral" wird schwieriger.

Wenn wir dagegen  $f(x) = x^2$  und  $g'(x) = e^{3x}$  wählen, wird  $f'(x) = 2x$  und  $g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$  und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \cdot e^{3x} dx &= x^2 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int 2x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx \\
 \begin{array}{cccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 f(x) & g'(x) & f'(x) & g(x)
 \end{array} & & & \\
 &= \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx & \text{(noch mal partiell} & \\
 & & \begin{array}{cc}
 \downarrow & \downarrow \\
 f(x) & g'(x)
 \end{array} & \text{integrieren!)} & \\
 &= \frac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \left\{ x \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} dx \right\} \\
 & & \begin{array}{cc}
 \downarrow & \downarrow \\
 f(x) & g(x)
 \end{array} & \begin{array}{cc}
 \downarrow & \downarrow \\
 f'(x) & g(x)
 \end{array} & \\
 &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x e^{3x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C \\
 &= \frac{1}{3}e^{3x} \left( x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \right) + C
 \end{aligned}$$

Probe möglich durch Differenzieren der rechten Seite! Die Ableitung muss den Integranden ergeben!

Beispiel:  $\int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx$  für  $x > 0$ .

Wir wählen  $f(x) = \ln x$  und  $g'(x) = \frac{1}{x}$ . Dann ist  $f'(x) = \frac{1}{x}$  und  $g(x) = \ln x$ . Somit

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx &= \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx \\
 \begin{array}{cccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 g'(x) & f(x) & f'(x) & g(x)
 \end{array} & & & 
 \end{aligned}$$



Wir haben nun auf der rechten Seite das ursprüngliche Integral stehen mit einem anderen Vorfaktor  $(c-1)$ .

Damit haben wir eine Gleichung für das unbekannte Integral hergeleitet, die wir nun nach dem unbekannten Integral auflösen können.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx \quad | + \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = (\ln x)^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + \frac{1}{2} C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Mit der Umbenennung von  $\frac{1}{2} C_1 = C$  erhalten wir insgesamt:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

### Integration durch Substitution

Auch die Kettenregel der Differentialrechnung lässt sich verwenden, um eine wichtige Integrationsmethode herzuleiten. Ist  $F$  Stammfunktion von  $f$ , so liefert uns die Kettenregel  $(F(g(x)) + C)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ . Geht man auf beiden Seiten zum unbestimmten Integral über und beachtet, dass  $\int (F(g(x)) + C)' \, dx = F(g(x)) + C$  ist, erhält man die Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C = \int f(u) \, du$$

mit  $u = g(x)$ .

Beispiel:  $\int 9x^2 (3x^3 - 1)^{16} \, dx$

Wir substituieren  $u = 3x^3 - 1$ .

Dann gilt:  $\frac{du}{dx} = 9x^2 \Rightarrow du = 9x^2 \, dx$

Damit erhält man mit anschließender Rücksubstitution

$$\int 9x^2 (3x^3 - 1)^{16} dx = \int u^{16} du = \frac{1}{17} u^{17} + C$$

$$= \frac{1}{17} (3x^3 - 1)^{17} + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx, \quad x > -2.$$

Wir substituieren  $u = x^3 + 8$ .

$$\text{Dann gilt: } \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{1}{3} du = x^2 dx$$

Damit erhält man mit anschließender Rücksubstitution

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 8} + C$$

Zwei häufig vorkommende Spezialfälle lassen sich allgemein angeben:

1) Ist  $F$  Stammfunktion zu  $f$  und  $a \neq 0$ , so gilt

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (\text{s.o.})$$

2) Ist  $g$  differenzierbar, dann gilt

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

Mit der Substitution  $u = g(x)$ , d.h.  $du = g'(x) dx$  erhält

$$\text{man } \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |g(x)| + C$$

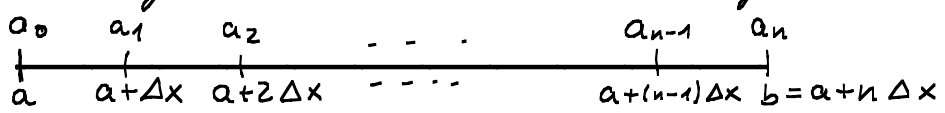
Beispiel:

$$\int \frac{\overbrace{7x^6 + 6x - 9}^{g'(x)}}{\underbrace{x^7 + 3x^2 - 9x + 10}_{g(x)}} dx = \ln |x^7 + 3x^2 - 9x + 10| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{\overbrace{6e^{2x}}^{g'(x)}}{\underbrace{1-3e^{2x}}_{g(x)}} dx = -\frac{1}{6} \ln|1-3e^{2x}| + C$$

Bestimmte Integrale

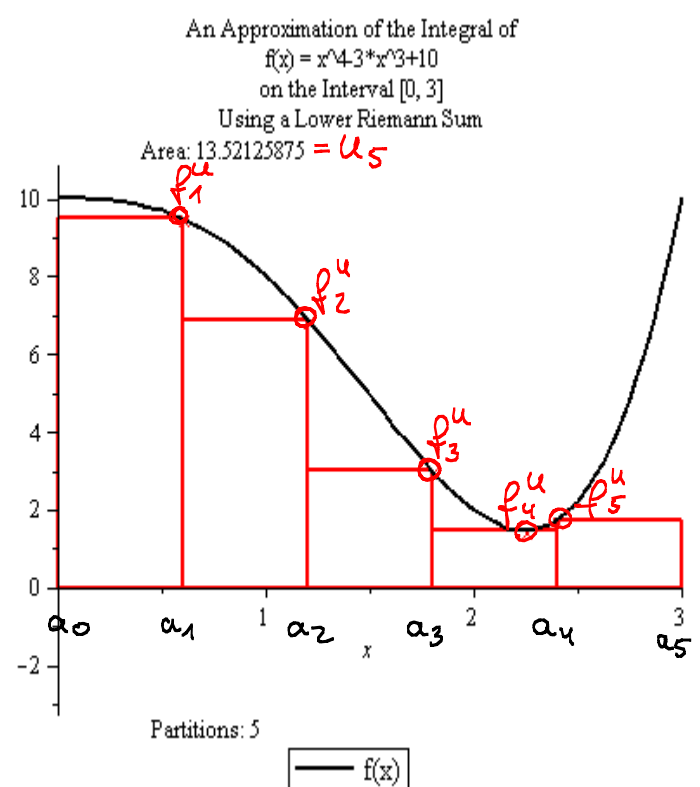
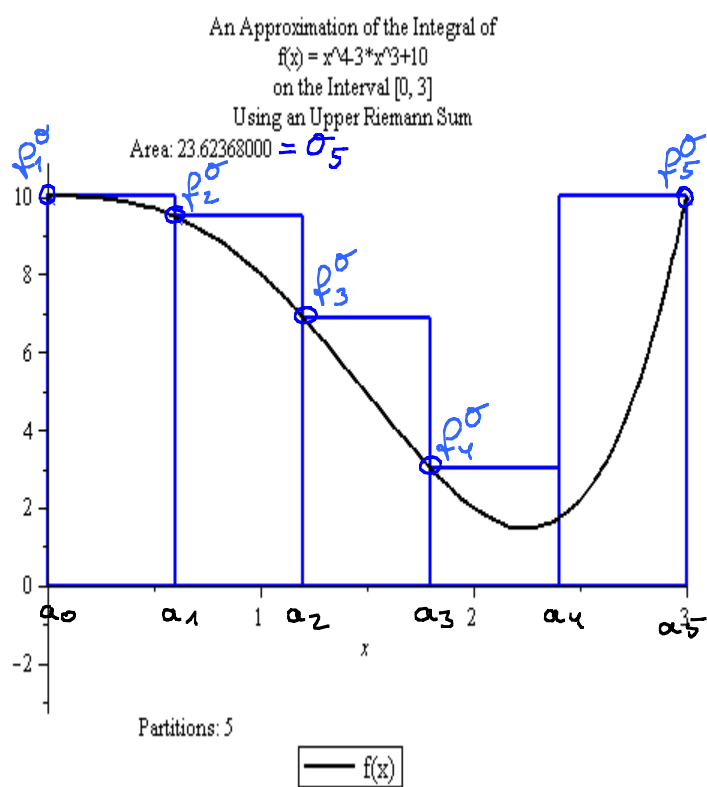
Im folgenden setzen wir voraus, dass  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist auf  $[a, b]$ . Wir teilen das Intervall  $[a, b]$  in  $n$  gleichlange Teilintervalle der Länge  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .



D.h.  $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$

Sei nun zunächst  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .

Mit  $f_j^u$  bezeichnen wir den minimalen Funktionswert und mit  $f_j^o$  den maximalen Funktionswert auf dem Intervall  $[a_{j-1}, a_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ .



Für die Summe der Rechteckflächen gilt dann:

$$O_n = \Delta x \cdot f_1^o + \Delta x \cdot f_2^o + \dots + \Delta x \cdot f_n^o = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^n f_j^o \quad (\text{Obersumme})$$

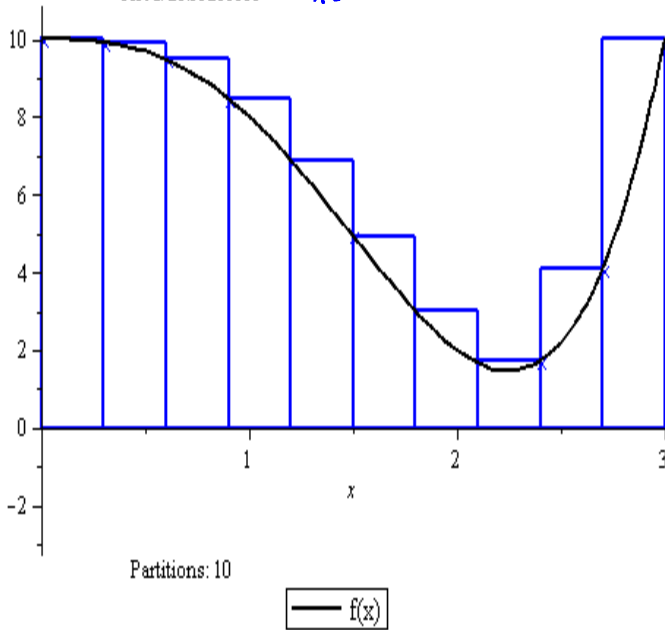
$$U_n = \Delta x \cdot f_1^u + \Delta x \cdot f_2^u + \dots + \Delta x \cdot f_n^u = \Delta x \cdot \sum_{j=1}^n f_j^u \quad (\text{Untersumme})$$

$\sigma_n$  ist eine obere Schranke und  $u_n$  eine untere Schranke für den Inhalt der Fläche  $A$  zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[a, b]$ , d. h.  $u_n \leq A \leq \sigma_n$ .

Lässt man nun die Anzahl  $n$  der Teilintervalle wachsen, d. h.  $\Delta x$  kleiner werden, so kann man (bei genügend gutartigen Funktionen) beobachten, dass  $u_n$  und  $\sigma_n$  immer dichter aneinanderrücken (siehe Bieder unten).

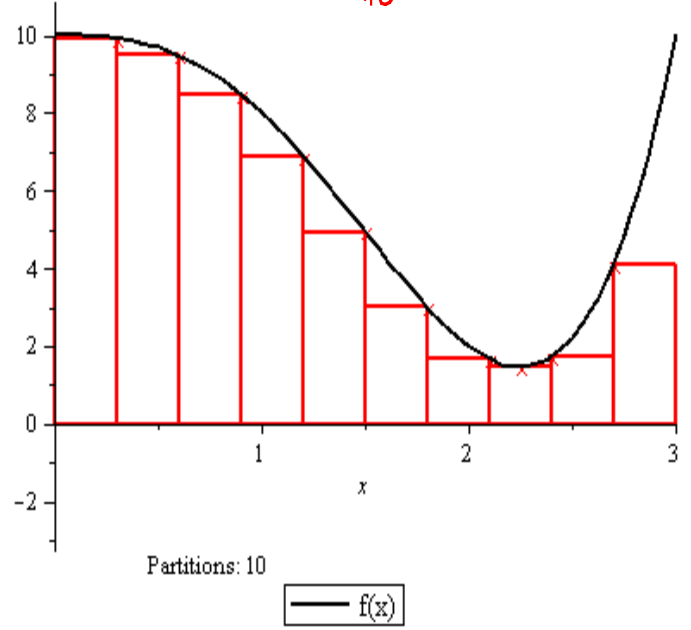
An Approximation of the Integral of  $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$  on the Interval  $[0, 3]$  Using an Upper Riemann Sum

Area: 20.55216000 =  $\sigma_{10}$



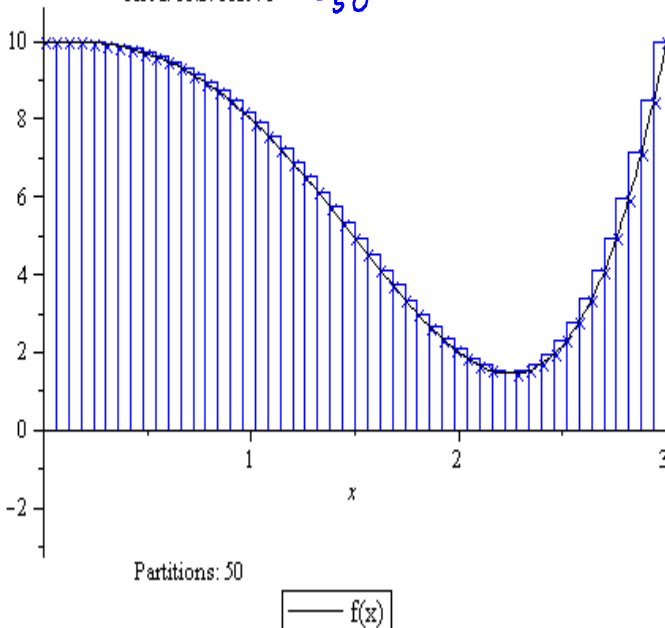
An Approximation of the Integral of  $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$  on the Interval  $[0, 3]$  Using a Lower Riemann Sum

Area: 15.48879938 =  $u_{10}$



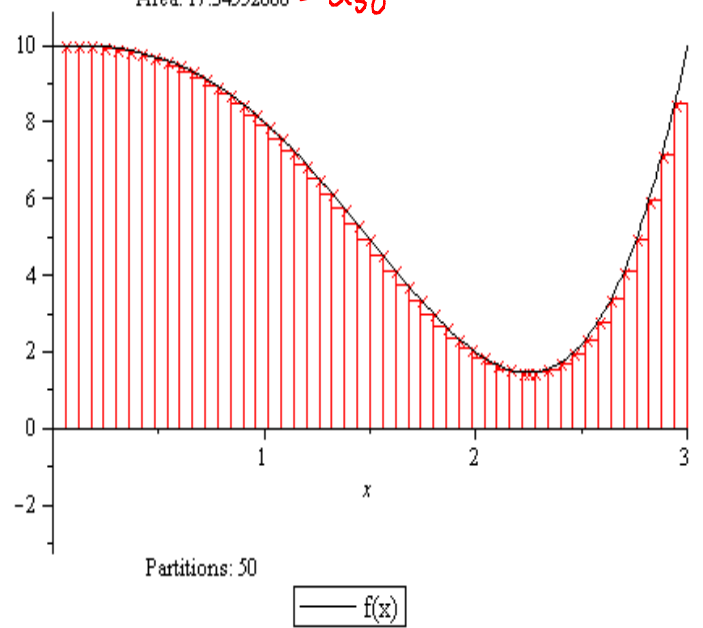
An Approximation of the Integral of  $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$  on the Interval  $[0, 3]$  Using an Upper Riemann Sum

Area: 18.37013978 =  $\sigma_{50}$



An Approximation of the Integral of  $f(x) = x^4 \cdot 3 \cdot x^3 + 10$  on the Interval  $[0, 3]$  Using a Lower Riemann Sum

Area: 17.34552060 =  $u_{50}$



Definition: Falls die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$  existieren und denselben Grenzwert  $G$  besitzen, dann heißt  $G = \int_a^b f(x) dx$

bestimmtes Integral von  $f(x)$  über  $[a, b]$ .

Die Funktion  $f$  heißt dann integrierbar über  $[a, b]$ .

Man kann zeigen, dass eine im Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion stets über  $[a, b]$  integrierbar ist.

Den Zusammenhang zu den vorher behandelten unbestimmten Integralen und Stammfunktionen liefert der folgende wichtige Satz. Gleichzeitig liefert er auch eine Berechnungsvorschrift für bestimmte Integrale.

Satz (Hauptsatz der Integralrechnung)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F$  eine (beliebige) Stammfunktion von  $f$ . Dann existiert das bestimmte Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(Zur Abkürzung schreibt man auch  $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ .)

Jedes Integral  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$  ist eine Stammfunktion zu  $f(x)$ .

Beispiel:  $\int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = 21$

$$\int_1^2 \ln x dx = x \cdot (\ln x - 1) \Big|_1^2 = 2(\ln 2 - 1) - 1 \cdot (\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3 = -\ln 3$$

Wie wir aus der Herleitung gesehen haben, berechnet man für eine Funktion  $f$  mit  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  mit

dem bestimmten Integral die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse auf dem Intervall  $[a, b]$ . Hat  $f(x)$  wechselndes Vorzeichen, so gehen in  $\int_a^b f(x) dx$  die Flächenanteile unterhalb der  $x$ -Achse negativ ein. Mit  $\int_a^b |f(x)| dx$  berechnet man die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse, wobei alle Flächenanteile positiv zählen.

Für die konkrete Berechnung benötigt man häufig, dass für eine über  $[a, b]$  integrierbare Funktion und  $a < c < b$  gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Beispiel: Sei  $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+3)(x+1)(x-1)(x-2)$ .

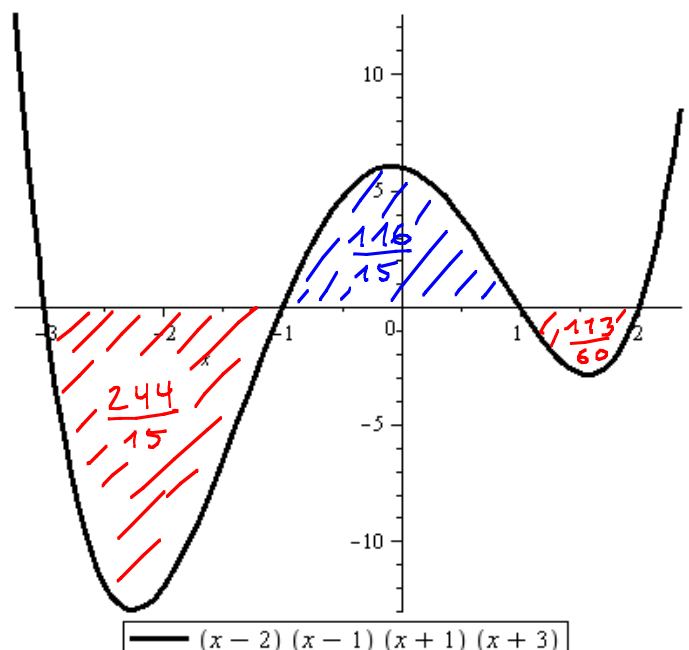
Wir berechnen das bestimmte Integral von  $f$  über dem Intervall  $[-3, 2]$ .

$$\int_{-3}^2 (x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) dx = \left. \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right|_{-3}^2 = -\frac{125}{2}$$

Zur Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[-3, 2]$  berechnen wir

$$\int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^{-1} (-f(x)) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 (-f(x)) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left( -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_{-3}^{-1} \\ &+ \left( \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_{-1}^1 \\ &+ \left( -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{244}{15} + \frac{116}{15} + \frac{113}{60} \\ &= \frac{1553}{60} \end{aligned}$$



Wir kommen nun noch einmal auf Integrationsregeln zurück, die wir im Zusammenhang mit den unbestimmten Integralen besprochen haben und überlegen, wie diese bei der Berechnung bestimmter Integrale anzuwenden sind.

### Partielle Integration bei bestimmten Integralen

Da  $f(x)g(x)$  Stammfunktion von  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  ist, gilt:

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Umstellung der Gleichung liefert die Formel für die partielle Integration bei bestimmten Integralen

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Beispiel:

$$\int_0^T (a+bt)e^{-\tau t} dt \quad \text{mit } a, b, \tau \neq 0.$$

Mit  $f(t) = a+bt$ ,  $g'(t) = e^{-\tau t}$ , d.h.  $f'(t) = b$ ,  $g(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-\tau t}$  erhalten wir

$$\int_0^T (a+bt)e^{-\tau t} dt = (a+bt) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}e^{-\tau t}\right) \Big|_0^T - \int_0^T b \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\tau t} dt$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f'(t) & g'(t) & f(t) & g(t) \end{array}$$

$$= -\frac{1}{\tau} \left\{ (a+bT)e^{-\tau T} - a \right\} + \frac{1}{\tau} b \cdot \left(-\frac{1}{\tau}e^{-\tau t}\right) \Big|_0^T$$

$$= -\frac{1}{\tau} \left\{ (a+bT)e^{-\tau T} - a \right\} - \frac{1}{\tau^2} b (e^{-\tau T} - 1)$$

## Substitution bei bestimmten Integralen

Führt man in einem bestimmten Integral eine Substitution durch, so ist zu beachten, dass auch die Integrationsgrenzen geändert werden müssen. Es gilt die Regel für die Substitution bei bestimmten Integralen

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad (u = g(x)),$$

denn, ist  $F'(u) = f(u)$ , dann gilt

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Beispiel:  $\int_0^1 x^5 \sqrt{4-x^3} dx$

Wir substituieren  $u = 4 - x^3 \Leftrightarrow x^3 = 4 - u$

Dann ist  $\frac{du}{dx} = -3x^2 \Rightarrow -\frac{1}{3} du = x^2 dx$

Untere Grenze:  $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 4 - 0^3 = 4$

Obere Grenze:  $x_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 4 - 1^3 = 3$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^5 \sqrt{4-x^3} dx &= \int_0^1 x^3 \sqrt{4-x^3} x^2 dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_4^3 (4-u) \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \int_3^4 (4u^{1/2} - u^{3/2}) du \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 4 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{2}{5} u^{5/2} \right\} \Big|_3^4 = \frac{1}{9} (64 - \sqrt{27}) + \frac{2}{15} (\sqrt{243} - 32) \end{aligned}$$

Beispiel:  $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Substitution:  $u = e^x, du = e^x dx$

Grenzen:  $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = e^0 = 1$

$x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = e^2$

$$\begin{aligned} &= \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| \Big|_1^{e^2} \\ &= \ln(1+e^2) - \ln 2 \end{aligned}$$



Bei der Durchführung von Substitutionen kann es passieren, dass die neue untere Grenze größer ist als die neue obere Grenze. Dann kann man verwenden, dann gilt:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

**Achtung!** Beim Vertauschen der Grenzen kommt ein Faktor  $(-1)$  dazu.

Beispiel:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^3 - e^x} dx$$

$$= \int_{e(e-1)(e+1)}^{e^2(e-1)} \left(-\frac{1}{u}\right) du$$

$$= \int_{e^2(e-1)}^{e(e-1)(e+1)} \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| \Big|_{e^2(e-1)}^{e(e-1)(e+1)}$$

$$= \ln(e(e-1)(e+1)) - \ln(e^2(e-1))$$

$$= \underbrace{\ln e}_{=1} + \ln(\cancel{e-1}) + \ln(e+1) - 2 \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} - \ln(\cancel{e-1})$$

$$= \ln(e+1) - 1$$

$$\text{Substitution: } u = e^3 - e^x$$

$$\frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow -du = e^x dx$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = e^3 - e = e(e^2 - 1)$$

$$= e(e-1)(e+1)$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = e^3 - e^2 = e^2(e-1)$$

$$\text{Es ist } u_2 < u_1$$