Nichtlineare Optimierung II - Restringierte Optimierung

5. Übung

Wintersemester 2011/2012

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Angewandte Mathematik / Optimierung und Approximation
Prof. Dr. Kathrin Klamroth, Dipl. Math. Markus Kaiser

Besprechung des Übungsblattes: 23.05.2012, 14-16 Uhr, D 13.15

Aufgabe 14: *(KKT-Bedingungen)*
Betrachten Sie die beiden restringierten Minimierungsprobleme

$$
(P1)\quad \begin{array}{rl} \min & (x_1-2)^2+(x_2-\frac{1}{2})^2 \\ \text{s.t.} & x_1+\ \ x_2 \le 3 \\ & x_1+2x_2 \le 4 \\ & -x_1 \qquad \le 0 \\ & \qquad -x_2 \le 0 \end{array}
\qquad\qquad
(P2)\quad \begin{array}{rl} \min & 2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\ \text{s.t.} & x_1+\ \ x_2 \le 2 \\ & x_1+5x_2 \le 5 \\ & -x_1 \qquad \le 0 \\ & \qquad -x_2 \le 0. \end{array}
$$

(a) Stellen Sie für (P1) und (P2) die KKT-Bedingungen auf.

(b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $x^* = (2, \frac{1}{2})^\top$ ein KKT-Punkt von (P1) und $x^* = (\frac{35}{31}, \frac{24}{31})^\top$ ein KKT-Punkt von (P2) ist.

(c) Prüfen Sie nach, ob es sich bei den beiden Punkten um globale Minimierer der zugehörigen Aufgabe handelt.

Aufgabe 15: *((MFCQ)-Bedingung an einem Beispiel)*
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rl} \min & -(x_1+1)^2-(x_2+1)^2 \\ \text{s.t.} & x_1^2+x_2^2 \le 2 \\ & x_1 \le \gamma \\ & x_1, x_3 \in \mathbb{R} \end{array}
$$

in Abhängigkeit von einer rellen Zahl $\gamma \ge -\sqrt{2}$.

(a) Bestimmen Sie (z.B. mit Hilfe einer Skizze) die optimalen Lösungen $x^*(\gamma)$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\gamma = -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < \gamma \le 1$, und $\gamma > 1$.

(b) Erfüllt $x^*(\gamma)$ die (MFCQ)-Bedingung? Geben Sie, falls diese Bedingung erfüllt ist, auch einen entsprechenden Vektor d mit $\nabla g_i(x^*)^\top d < 0$ für $i \in I(x^*)$ an.

(c) Gibt es zu $x^*(\gamma)$ einen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}_+^2$, so dass x^* ein KKT-Punkt des Optimierungsproblems mit Lagrange-Multiplikator λ ist?

Aufgabe 16: *((MFCQ)-Bedingung)*
Zeigen Sie für das restringierte Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \le 0 \\ & h(x) \le 0 \\ & g(x)^\top h(x) = 0 \end{array}
$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dass die MFCQ-Bedingung in keinem zulässigen Punkt erfüllt ist.

Aufgabe 17: *((LICQ) ⇒ (MFCQ))*
Zeigen Sie, dass für einen für (CP) zulässigen Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, in dem die linear independence constraint qualification erfüllt ist auch die Mangasarian-Fromovitz constraint qualification gilt. D.h. zeigen Sie: (LICQ) ⇒ (MFCQ).

Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/NLO/