Nichtlineare Optimierung II - Restringierte Optimierung

4. Übung

Wintersemester 2011/2012

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Angewandte Mathematik / Optimierung und Approximation
Prof. Dr. Kathrin Klamroth, Dipl. Math. Markus Kaiser

Besprechung des Übungsblattes: 16.05.2012, 14-16 Uhr, D 13.15

Aufgabe 10: *(Alternativsatz von Gale)*
Zeigen Sie, dass genau eine der Aussagen

(a) Das System $A^\top y = 0, \quad y \geq 0, \quad b^\top y < 0$ hat eine Lösung $y \in \mathbb{R}^m$.

(b) Die Gleichung $Ax \leq b$ hat eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.

für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ richtig ist.

Aufgabe 11: *(Tangentialkegel)*
Zeigen Sie, dass die folgenden Definitionen für den Tangentialkegel $T_X(x)$ einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ in $x \in X$ äquivalent sind:

(a)

$$T_X(x) := \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \{x^k\} \subseteq X \text{ und } \exists \{t_k\} \subseteq \mathbb{R} \text{ mit } x^k \to x,\ t_k \to 0^+ \text{ und } \frac{x^k - x}{t_k} \to d\}$$

(b)

$$T_X(x) := \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \{\lambda_k\} \to 0^+ \text{und } \exists \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \text{ mit } \alpha(\lambda) \to 0 \text{ für } \lambda \to 0 :\ x^k = x + \lambda_k d + \lambda_k \alpha(\lambda_k) \in X\ \forall k\}$$

(c)

$$T_X(x) := \{d \in \mathbb{R}^n : d = \lambda \lim_{k \to \infty} \frac{x^k - x}{\|x^k - x\|}, \text{ mit } \lambda \geq 0,\ \{x^k\} \to x \text{ und } x \neq x^k \in X\ \forall k\}$$

Aufgabe 12: *(Grundlagen)*
Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gilt: Der Abschluss des Inneren einer Niveaumenge von f entspricht der Niveaumenge, d.h. $N(f, f(x^0)) = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < f(x^0)\}$. (Dabei ist für ein $X \subseteq \mathbb{R}^n$ der Abschluss $\mathrm{cl}(X) := X \cup \partial X$.)

(b) Beinhaltet eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle $x, y \in X$ auch $z = \frac{1}{2}(x - y)$, so ist die Menge konvex.

(c) Jede konvexe Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Aufgabe 13: *(Linearisierter Tangentialkegel)*
Beweisen Sie Satz 12.8 aus der Vorlesung: Zeigen Sie, dass $T_X(x) \subseteq T_{\text{lin}}(x)$ für $x \in X$ gilt.

Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/NLO/