Nichtlineare Optimierung II - Restringierte Optimierung

2. Übung

Wintersemester 2011/2012

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Angewandte Mathematik / Optimierung und Approximation
Prof. Dr. Kathrin Klamroth, Dipl. Math. Markus Kaiser

Besprechung des Übungsblattes: 25.04.2012, 14-16 Uhr, D 13.15

Aufgabe 5: *(Präkonditioniertes CG-Verfahren)*
Die Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ kann verbessert werden, indem man die Kondition der Matrix A verbessert (siehe Bemerkung 4 nach Satz 10.7). Dies kann z.B. erreicht werden durch lineare Transformation der Variable $x = Sz$ mit $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Damit ergibt sich das transformierte Problem

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{2} z^\top S^\top ASz - (S^\top b)^\top z.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass $\bar{f}(z) = f(x) := \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ gilt.

(b) Formulieren Sie das sogenannte präkonditionierte CG-Verfahren, indem Sie auf $\bar{f}$ das CG-Verfahren anwenden und die Rücktransformationen $x^k = Sz^k$, $\bar{g}^k = S^\top g^k$, $d^k = S^\top \bar{d}^k$ sowie $B := SS^\top$ verwenden.

(c) Oft verwendet wird die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ zur Präkonditionierung. Man setzt dann $S = (L^\top)^{-1} =: L^{-\top}$. Formulieren Sie den Algorithmus der Cholesky-Zerlegung.

(d) Die optimale Konditionszahl von A würde man mit $S = A^{-1}$ erzielen. Warum verwendet man die Inverse von A trotzdem nicht als Präkonditionierer? Und warum ist es in Ordnung bei der Präkonditionierung mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens L^{-1} zu verwenden?

Aufgabe 6: *(CG-Verfahren: Beispiel)*
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie die ersten beiden Iterationen des CG-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = (1,1)^\top$ durch.

(b) Zeigen Sie, dass die berechneten Richtungen d^i, $i = 0,1,2$, A-konjugiert sind.

(c) Skizzieren Sie die Iterationsschritte aus Aufgabenteil (a) zusammen mit den Höhenlinien der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b$, die durch die Punkte x^0, x^1 und x^2 verlaufen.

(d) Berechnen Sie die Kondition der Matrix A, die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ und die Kondition der Matrix $L^{-1}AL^{-\top}$.

Aufgabe 7: *(Krylov-Unterräume)*
Wir betrachten das CG-Verfahren für lineare Gleichungssysteme angewandt auf das unrestringierte Optimierungsproblem $\min f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - b^\top x$, mit einer positiv definiten und quadratischen Matrix Q.
Zeigen Sie, dass die Iterierte x^k die Zielfunktion auf dem affin linearen Unterraum

$$K_k = x^0 + \operatorname{span}(g^0, Qg^0, \ldots, Q^{k-1}g^0)$$

minimiert.
Bemerkung: Man nennt span$(g^0, Qg^0, \ldots, Q^{k-1}g^0)$ einen Krylov-Unterraum und zählt das CG-Verfahren aufgrund obiger Eigenschaft zu den Krylov-Unterraum Verfahren.
Bearbeitungshinweis: Nach Konstruktion des CG-Verfahrens ist x^k optimal für $\bar{K}_k = x^0 + span(g^0, g^1, \ldots, g^{k-1})$. Es genügt also - beispielsweise mit vollständiger Induktion - zu zeigen, dass $K_k = \bar{K}_k \; \forall k$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 8: *(Behauptung 1 aus dem Beweis zu Satz 10.12)*
Zeigen Sie: ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $N(f, \alpha = f(x^0))$ konvex und f gleichmäßig konvex auf $N(f, \alpha)$ so ist $N(f, \alpha)$ kompakt.
Hinweis: $N(f, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ *bezeichnet wie üblich die Niveaumenge von* $f(x)$ *zum Niveau* α.

Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/NLO/